

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

О. В. Скоромник

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
С ФУНКЦИЯМИ ГАУССА И ЛЕЖАНДРА В ЯДРАХ
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА**

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2019

УДК 517(035.3)
ББК 22.16я9
С44

Рекомендовано к изданию ученым советом
учреждения образования «Полоцкий государственный университет»
в качестве монографии (протокол № 3 от 07.12.2018)

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р физ.-мат. наук, проф., зам. директора по науч. работе
Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН
Г.В. ДЕМИДЕНКО

д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. геометрии и математического анализа
Витебского государственного университета им. П.М. Машерова
Ю.В. ТРУБНИКОВ

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. геометрии и математического анализа
Витебского государственного университета им. П.М. Машерова
С.А. ШЛАПАКОВ

Скормник, О. В.

С44 Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах
и интегральные уравнения первого рода / О. В. Скормник. – Новополоцк :
Полоц. гос. ун-т, 2019. – 180 с.

ISBN 978-985-531-678-8.

В монографии построены теории интегральных преобразований со специальными функциями Гаусса и Лежандра в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций, найдены решения и условия разрешимости интегральных уравнений первого рода с такими специальными функциями в ядрах. В приложениях приведены отдельные результаты для некоторых классов интегральных преобразований и интегральных уравнений первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией и функцией Бесселя в ядрах.

Предназначена для специалистов в области физико-математических наук, магистрантов, аспирантов и студентов физико-математических специальностей.

Посвящается памяти Анатолия Александровича КИЛБАСА,
Николая Васильевича ЦЫВИСА, Виктора Владимировича КУПРИЯНОВИЧА.

УДК 517(035.3)
ББК 22.16я9

ISBN 978-985-531-678-8

© Скормник О. В., 2019
© Полоцкий государственный университет, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ	9
Выводы по главе 1	19
ГЛАВА 2 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ	20
2.1 Предварительные сведения	20
2.1.1 Некоторые функциональные пространства	20
2.1.2 Некоторые специальные функции	23
2.1.3 Дробные интегралы и производные на полуоси	26
2.1.4 Дробные интегралы и производные по пирамидальным областям	30
2.1.5 Обобщенные G -преобразования	34
2.1.6 Модифицированные H -преобразования	39
2.2 $\mathcal{L}_{V, 2}$ -, $\mathcal{L}_{V, r}$ -теории интегральных преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах	45
2.2.1 Преобразования ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса	45
2.2.2 Представления преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$) в виде обобщенных G -преобразований	46
2.2.3 $\mathcal{L}_{V, 2}$ -теория преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$)	49
2.2.4 $\mathcal{L}_{V, r}$ -теория преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$)	54
2.2.5 Формулы обращения преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$)	59
2.3 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в $\mathcal{L}_{V, r}$ -пространствах	62
2.3.1 Теоремы о действии операторов ${}_j I_{0+}^c(a, b)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{V, r}$ -пространствах	62
2.3.2 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{V, r}$ -пространствах	68
2.4 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в $\mathcal{L}_{V, r}$ -пространствах	70
2.4.1 Теорема о действии операторов ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{V, r}$ -пространствах	70
2.4.2 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{V, r}$ -пространствах	72

2.5 Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области	74
Выводы по главе 2	79
ГЛАВА 3 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИЕЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО РОДА В ЯДРАХ	80
3.1 $\mathcal{L}_{\nu, 2^-}$, $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -теории преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$)	80
3.1.1 Представления преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$) в виде модифицированных H -преобразований	80
3.1.2 $\mathcal{L}_{\nu, 2^-}$ -теория преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$)	86
3.1.3 $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -теория преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$)	92
3.1.4 Формулы обращения преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$)	96
3.2 Решение интегральных уравнений с функцией Лежандра первого рода в ядрах в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах	100
3.2.1 Теоремы о действии операторов $P_{\delta, j}^{\gamma}$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах	100
3.2.2 Решение интегральных уравнений $(P_{\delta, j}^{\gamma} f)(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах	104
3.3 Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с функцией Лежандра первого рода в ядрах по пирамидальной области	105
Выводы по главе 3	111
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	112
ПРИЛОЖЕНИЕ А	122
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	124
ПРИЛОЖЕНИЕ В	127
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	130
ПРИЛОЖЕНИЕ Д	131
ПРИЛОЖЕНИЕ Е	134
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж	135
ПРИЛОЖЕНИЕ З	141
ПРИЛОЖЕНИЕ И	152
ПРИЛОЖЕНИЕ К	160
ПРИЛОЖЕНИЕ Л	167
ПРИЛОЖЕНИЕ М	173

ВВЕДЕНИЕ

Теория интегральных преобразований интенсивно развивается в последнее время. Это обусловлено тем, что интегральные преобразования часто возникают как в проблемах математики, так и в прикладных задачах физики, механики и иных естественных наук. Использование интегральных преобразований в теории дифференциальных и интегральных уравнений, операционном исчислении, теории краевых задач позволяет находить их решения в замкнутой форме и изучать структурные свойства.

Наиболее изучены классические преобразования Фурье, Меллина и Ханкеля [55; 10; 54; 113]. Они широко используются в различных проблемах математической физики и прикладной математики [58; 102; 104; 105]. Названные преобразования находят применение при решении различных модельных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Начиная с 70-х гг. XX в. решения различных прикладных немодельных задач привели к представлению их решений в виде интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах. Интерес к таким преобразованиям также вызван изучением соответствующих интегральных уравнений первого рода и так называемых парных и тройных интегральных уравнений, которые часто встречаются в приложениях. Результаты в этом направлении представлены в книгах [6; 34; 99, гл. 7; 56; 103; 108].

Интегральные преобразования с различными специальными функциями в ядрах исследовались многими авторами. В основном они изучались в пространствах L_1 и L_2 [55; 54; 10; 114; 64] и в некоторых пространствах обобщенных функций [5; 91]. Указанные монографии посвящены одномерным интегральным преобразованиям. Отдельные результаты для многомерных классических интегральных преобразований и некоторых преобразований со специальными функциями в ядрах представлены в монографии «Многомерные интегральные преобразования» [90].

Большинство интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах содержат функции гипергеометрического и бесселева типа. В частности, решение задач осесимметрической теории потенциала представляется в виде интегральных преобразований со специальными функциями Бесселя второго рода $Y_\eta(z)$ и Струве $H_\eta(z)$ в ядрах. Впервые такие конструкции рассматривались Е. Титчмаршем [55] как пара взаимно обратных преобразований в рамках L_2 -пространств. Вопросы действия этих

преобразований в весовых пространствах r -суммируемых функций $\mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 \leq r < \infty$, на действительной полуоси со степенным весом были изучены П. Руни (P. Rooney) [98; 96; 97], П. Хейтвудом (P. Heywood) и П. Руни [70; 71] на основе теории преобразования Меллина. Ими были получены аналоги равенства Парсеваля и дано описание пространств функций, представимых такими интегральными операторами. Аналогичные вопросы для интегральных преобразований с G -функцией Мейера были изучены П. Руни (P. Rooney) [95].

В 1993 – 1998 гг. была разработана теория интегральных преобразований со специальными функциями достаточно общего типа в ядрах, известными как H -функции, в пространствах $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -суммируемых функций. Применяя технику преобразования Меллина и учитывая асимптотические свойства H -функции, была построена теория интегральных **H**-преобразований с такими функциями в ядрах в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах. При этом были даны условия ограниченности операторов рассматриваемых преобразований из одних пространств $\mathcal{L}_{\nu, r}$ в другие, доказаны аналоги равенства Парсеваля, дано описание образов этих операторов, найдены различные формулы интегральных представлений для них, на основании чего установлены формулы их обращения. Полученные результаты представлены в монографии [76].

Настоящая работа посвящена исследованию интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1$ и Лежандра P_8^γ в ядрах. Показано, что правые части таких уравнений являются соответственно обобщенным **G**-преобразованием и модифицированным **H**-преобразованием специального типа. На основании теории **G**-, **H**-преобразований в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах r -суммируемых функций $\mathcal{L}_{\nu, r}$ на действительной полуоси со степенным весом. Доказаны теоремы о действии операторов рассматриваемых интегральных преобразований в указанных весовых пространствах, установлены аналоги формулы интегрирования по частям и дано описание образов этих операторов. Получены различные интегральные представления и формулы обращения для них. Результаты применены для решения одномерных интегральных уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1$ и функцией Лежандра P_8^γ .

В работе также даются решения в замкнутой форме многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра первого рода в ядрах по пирамидальным об-

ластям, а также исследуется картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций.

Целью представленной монографии является построение теории интегральных преобразований со специальными функциями Гаусса и Лежандра в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций; нахождение решений и условий разрешимости интегральных уравнений первого рода с такими специальными функциями в ядрах.

Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Построить теорию интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций; дать корректную постановку разрешимости интегральных уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в весовых пространствах суммируемых функций и вывести формулы их обращения.

2. Найти решение в замкнутой форме многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области; доказать необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций.

3. Построить теорию интегральных преобразований с функцией Лежандра первого рода в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций; дать корректную постановку разрешимости интегральных уравнений первого рода с функцией Лежандра первого рода в весовых пространствах суммируемых функций и вывести формулы их обращения.

4. Найти решение в замкнутой форме многомерных интегральных уравнений типа Абеля с функцией Лежандра первого рода в ядрах по пирамидальной области; доказать необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций.

Объектами исследования являются интегральные преобразования и интегральные уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра первого рода в ядрах. Предметом исследования выступают функциональные свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций, формулы их обращения, вопросы разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в пространствах интегрируемых функций.

Важность изучения интегральных уравнений со специальными функциями в ядрах обусловлена их широким применением при решении проблем математики и различных прикладных задач. Они используются при решении краевых задач для уравнений в частных производных, интеграль-

ных уравнений первого рода и так называемых парных и тройных уравнений, к которым сводятся разнообразные проблемы физики и механики, теории колебаний, теплопроводности, упругости, осесимметрической теории потенциала.

С точки зрения приложений одной из центральных является проблема нахождения решения в замкнутой форме интегральных уравнений, позволяющая находить явные решения математических и прикладных задач. Рассматриваемые интегральные уравнения первого рода принадлежат к так называемым некорректным задачам, в которых данная правая часть и искомое решение принадлежат к, вообще говоря, различным классам функций. Поэтому для корректной постановки задач необходимо исследовать свойства интегральных операторов (преобразований), входящих в левые части уравнений, в функциональных пространствах.

Следовательно, одной из актуальных задач теории интегральных уравнений первого рода со специальными функциями в ядрах выступает изучение функциональных свойств операторов соответствующих интегральных преобразований.

При решении поставленных задач используются методы теории интегральных преобразований и специальных функций, включающие теорию гипергеометрической функции Гаусса, функции Лежандра первого рода, дробных интегралов и производных, обобщенного **G**-преобразования и модифицированного **H**-преобразования.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах определяются интегралом вида

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} K(x, t)f(t)dt, \quad (1.1)$$

где ядро $K(x, t)$ есть некоторая специальная функция, а интеграл по некоторому подмножеству $\Omega \subset \mathbb{R}$ понимается в смысле Лебега. Примерами таких преобразований можно назвать одномерные преобразования, имеющие структуру свертки Меллина:

$$(Kf)(x) = \int_0^{\infty} k\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t} \quad (x > 0). \quad (1.2)$$

В частности, к ним относятся преобразования со специальными функциями гипергеометрического и бесселева типа, с G -функцией Мейера и H -функцией в ядрах.

В работе исследуются интегральные преобразования:

$$\begin{aligned} {}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \\ &\equiv x^{\sigma} \int_0^x \frac{(x^{\delta} - t^{\delta})^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^{\delta}}{t^{\delta}}\right) t^{\omega} \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} {}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \\ &\equiv x^{\sigma} \int_0^x \frac{(x^{\delta} - t^{\delta})^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^{\delta}}{x^{\delta}}\right) t^{\omega} \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} {}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \\ &\equiv x^{\sigma} \int_x^{\infty} \frac{(t^{\delta} - x^{\delta})^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^{\delta}}{t^{\delta}}\right) t^{\omega} \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
& {}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) \equiv \\
& \equiv x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

содержащие гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ в ядрах, где $a, b, c, \sigma, \omega \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$, а также интегральные преобразования:

$$(P_{\delta, 1}^\gamma f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \tag{1.7}$$

$$(P_{\delta, 2}^\gamma f)(x) = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \tag{1.8}$$

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(x) = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \tag{1.9}$$

$$(P_{\delta, 4}^\gamma f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0), \tag{1.10}$$

содержащие в ядрах функцию Лежандра первого рода $P_\delta^\gamma(z)$, $\delta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$.

В частности, при $\omega = \sigma = 0$ и $\delta = 1$ уравнения (1.3) – (1.6) принимают вид:

$${}_1I^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{t}\right) \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \tag{1.11}$$

$${}_2I^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t}{x}\right) \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \tag{1.12}$$

$${}_3I^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_x^\infty \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{t}\right) \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \tag{1.13}$$

$${}_4I^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_x^\infty \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t}{x}\right) \varphi(t) dt = g(x) \quad (x > 0). \tag{1.14}$$

Интерес к интегральным преобразованиям ${}_kI_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($k=1, 2, 3, 4$) и $P_{\delta, k}^\gamma f$ ($k=1, 2, 3, 4$) вызван тем, что интегральные уравнения (1.3) – (1.14) возникают при решении дифференциальных уравнений. Уравнение (1.12)

было впервые получено в [63, с. 353] при решении задачи Дирихле в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$ для гиперболического уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} + \frac{2\gamma}{x}U_x - \frac{2\delta}{y}U_y = 0.$$

Р. Бушман (R. G. Buschman) [62] впервые формально дал представление решения $\varphi(x)$ уравнения (1.12) в виде композиции двух операторов дробного интегро-дифференцирования типа Эрдейи – Кобера, (см. формулы (2.63; 2.64).

Уравнение вида (1.14), где верхний бесконечный предел заменен на 1, впервые было рассмотрено Т. Хиггинсом (T. P. Higgins) [72], который получил две формы его решения в зависимости от условий на достаточно гладкую правую часть $g(x)$. Отметим, что в публикации [72] впервые была применена техника факторизации интегрального оператора в левой части с помощью операторов дробного интегрирования и дифференцирования. Дж. Уимп (J. Wimp) [112] применил преобразование Лапласа для решения уравнения вида (1.13).

Результаты работ [72] и [112] были получены без обоснования классов решений рассматриваемых уравнений.

Э. Лав (E. R. Love) [85] впервые применил методы дробного интегро-дифференцирования для изучения интегральных уравнений (1.11), (1.12) в классе $Q_q(0, d)$, $0 < d < \infty$, функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на $(0, d)$, таких, что функция $x^q\varphi(x)$ ($q \in \mathbb{R}$) локально интегрируема на $(0, d)$. Он получил необходимые и достаточные условия существования и единственности в $Q_q(0, d)$ решений уравнений (1.11) и (1.12) и построил выражения для их решений в виде композиций операторов дробного интегро-дифференцирования со степенными весами. В статье [86] Э. Лав доказал аналогичные результаты для уравнений (1.13) и (1.14) в классе $R_r(d, \infty)$, $0 < d < \infty$, функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на (d, ∞) и таких, что функция $x^r\varphi(x)$ ($r \in \mathbb{R}$) локально интегрируема на (d, ∞) (см. также [7, гл. 2, §2]).

Результаты Э. Лава были распространены в [34; 99, §§10, 35.1] на пространства решений $\varphi(x) \in L_p(0, d)$ и $\varphi(x) \in L_p(d, \infty)$ ($p \geq 1$, $0 < d < \infty$), соответственно, для уравнений (1.11), (1.12) и (1.13), (1.14), а также на некоторые другие классы решений, представимых дробными интегралами со степенными весами.

Следуя работам Э. Лава [85; 86], Т. Прабхакар (T. R. Prabhakar) [62] построил решение уравнения вида (1.5) с $\sigma = \omega = 0$ и конечным верхним пределом $0 < d < \infty$. А. Макбрайд (A. C. McBride) [88] построил решения уравнений (1.3) – (1.6) с $\sigma = \omega = 0$ в специальных пространствах основных и обобщенных функций. Р. Саксена (R. K. Saxena) и Р. Кумбхат (R. K. Kumbhat) [100] построили формулы обращения операторов ${}_2I_{-\eta-c, \eta, 1}^c$ и ${}_3I_{\eta, -\eta-c, 1}^c$ в (1.4) и (1.5) для $\varphi(x) \in L_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq 2$, при некоторых условиях на параметры. В работе Б. Брааксма (B. L. J. Braaksma) и А. Шуйтмана (A. Schuitman) [60] установлена формула обращения оператора ${}_3I_{0, -c, 1}^c$ и сопряженного ему оператора, соответственно, в специальном пространстве основных и обобщенных функций.

В работах М. М. Смирнова [52; 53] сведением к уравнению (1.11) получены обращения некоторых уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса, которые возникают при изучении задачи Триколи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. В связи с этим отметим, что уравнения вида (1.11) – (1.14) возникают также при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [32; 25].

А. А. Килбас, Р. Райна (R. K. Raina), М. Сайго (M. Saigo), Г. Сривастава (H. M. Srivastava) [106] изучили картину разрешимости и построили решение в замкнутой форме интегрального уравнения (1.3) с $\sigma = \omega = 0$ на конечном отрезке $[0, d]$ в классе суммируемых функций $\varphi(x) \in L(a, b)$. Эти результаты были распространены на многомерные уравнения типа Абеля по пирамидальной области [33; 107].

Мы также укажем на ряд работ, в которых рассматривались интегральные уравнения первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса, отличные от уравнений (1.3) – (1.6) и (1.11) – (1.14).

В работах Н. Н. Лебедева [23], Н. И. Ахизера, В. А. Щербины [2], С. Калла (S. L. Kalla) [75] даны решения интегральных уравнений на конечном отрезке, которые возникают в задачах электростатики. С. Калла (S. L. Kalla), Р. Саксена (R. K. Saxena) [74], Э. Лав (E. R. Love) [84], Т. Прабхакар (T. R. Prabhakar), Н. Кашьяп (N. K. Kashyap) [94], О. И. Маричев [26, §8.2] получили формулы обращения некоторых интегральных уравнений первого рода на положительной полуоси. Н. А. Вирченко и В. Н. Черенко [7] вывели формулы обращения некоторых уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре.

Автор [63], Э. Копсон, дал обращение уравнения (1.10). Однако этот результат специально не выделялся, и поэтому статья [61], в которой были найдены формулы обращения уравнений (1.9) и (1.10), долгое время считалась первой работой в этом направлении. Результаты в [63] и [61] были приведены формально без указания классов функций, в которых ищутся решения.

В статье [67] были получены необходимые и достаточные условия для существования интегрируемого на конечном отрезке решения уравнения (1.7) при $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re}(\delta) \geq \left(-\frac{1}{2}\right)$ и дано его явное решение. Там же указано решение уравнения (1.8), которое ранее было исследовано в [109], но в формуле его решения содержится ошибка (см. также [69]). В [66] изучено уравнение (1.7) с произвольными действительными γ и δ в классе обобщенных функций с носителем на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, а также выделены условия, при которых полученное решение будет обычной функцией.

Результаты в [66; 67] были основаны на представлении $P_{\delta, 1}^{\gamma} f$ и $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ в виде композиций двух операторов дробного интегрирования от функции по степенной функции x^2 [34; 99, §18.2]. Эта методика была применена в [34; 99, §35.2; 7] для получения формул обращения уравнений (1.7) – (1.10).

Динь Хоанг Ань [9] получила условия существования единственных решений уравнений (1.7) – (1.8) и (1.9) – (1.10), соответственно, в пространствах $L_r((0, d), x^{\gamma})$ и $L_r((d, \infty), x^{\gamma})$, $0 < d < \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$, а также вывела формулы для их решений.

Свойства операторов $P_{\delta, k}^{\gamma} f$ ($k = 1, 2, 3, 4$), такие как унитарность, ограниченность, факторизация, в пространствах $L_2(0, \infty)$ и $L_{2, k}(0, \infty)$ были рассмотрены в работах [35; 36].

Настоящее исследование посвящено изучению преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c \Phi$, $P_{\delta, k}^{\gamma} f$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$) и интегральных уравнений (1.3) – (1.6) и (1.7) – (1.10) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{v, r}$, измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+$, для которых $\|f\|_{v, r} < \infty$, где

$$\|f\|_{v, r} = \left(\int_0^{\infty} \left| t^v f(t) \right|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}),$$

$$\|f\|_{v, \infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} \left[t^v |f(x)| \right] \quad (r = \infty).$$
(1.15)

В частности, все полученные результаты верны для классических пространств r -суммируемых функций $L_r(\mathbb{R}_+) = \mathcal{L}_{1/r, r}$ ($1 \leq r < \infty$).

Мы показываем, что преобразования ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c \Phi, P_{\delta, k}^\gamma f$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$) являются специальными случаями более общих преобразований, содержащих G -функцию Мейера и H -функцию в ядрах соответственно.

Для целых неотрицательных m, n, p, q ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и положительных $\alpha_i > 0, \beta_j > 0$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$) H -функция $H_{p, q}^{m, n}[z]$ определяется контурным интегралом Меллина – Барнса:

$$H_{p, q}^{m, n}[z] \equiv H_{p, q}^{m, n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p, q}^{m, n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (1.16)$$

где:

$$\mathcal{H}_{p, q}^{m, n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p, q}^{m, n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}; \quad (1.17)$$

L – специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице.

H -функция является наиболее общей из известных специальных функций и включает в качестве частных случаев элементарные функции, специальные функции гипергеометрического и бесселева типа, а также G -функцию Мейера, получающуюся из $H_{p, q}^{m, n}[z]$ при $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_q = 1$ [83, п. 5.6; 76, п. 2.9]. Современная теория H -функции (1.16) представлена в главах 1 – 2 монографии [76]. С элементами теории H -функции можно ознакомиться также в книгах [31, §8.3; 87, гл. 1; 110, гл. 2].

Интегралы Меллина – Барнса являются наиболее важными из всех интегралов, в которых подынтегральное выражение содержит Γ -функции Эйлера. Эти интегралы были впервые введены С. Пинчерле (S. Pincherle) [92] в 1888 г. Затем Х. Меллин (H. Mellin) [89] развил их теорию в первом десятилетии XX в. В 1908 г. Е. Барнс (E.W. Barnes) представил гипергеометрическую функцию в виде такого интеграла и тем самым построил теорию гипергеометрической функции на основе этого представления [34; 99, §35.2]. В 1936 г. А. Диксон (A. L. Dixon) и В. Феррар (W. L. Ferral) [65] ис-

следовали сходимость интеграла вида (1.16) с $m = n = 1$, $p = q = 2$, сходимость интеграла (1.16) в общем случае была представлена в [3, §1.19].

Впервые в 1961 г. Ч. Фокс (С. Fox) [68] рассмотрел интегральные преобразования с H -функцией (1.16) в ядрах, так называемые **H**-преобразования:

$$(Hf)(x) = \int_0^{\infty} H_{p,q}^{m,n}[xt] f(t) dt \quad (x > 0), \quad (1.18)$$

при исследовании G - и H - функций как симметричных ядер Фурье. Специальными случаями (1.18) являются **G**-преобразование ($\alpha_i = \beta_j = 1$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$) косинус- и синус-преобразования Фурье, преобразование Лапласа, классическое и модифицированное преобразования Ханкеля, дробные интегралы Римана – Лиувилля и Эрдейи – Кобера, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, интегральные преобразования типа Бесселя и др. [34; 99, §§1, 2, 17, 18, 39; 76, гл. 6–8].

Интегральное преобразование (1.18) и его частные случаи изучались многими авторами в различных функциональных пространствах. Условия ограниченности, различные интегральные представления и описание образов операторов **H**-преобразования в весовых пространствах суммируемых функций $\mathfrak{L}_{\nu, r}$ были получены А. А. Килбасом, М. Сайго (М. Saigo) и С. А. Шлапаковым [77 – 79], Х.-Ю. Глезге (Н.-J. Glaeske), А. А. Килбасом, М. Сайго (М. Saigo) и С. А. Шлапаковым [24; 73], а также Х. Бетанкором и К. Херезом Диазом (J. J. Betancor, С. Jerez Diaz) [59] независимо друг от друга.

Формулы обращения **H**-преобразования в $\mathfrak{L}_{\nu, r}$ были установлены С. А. Шлапаковым, М. Сайго и А. А. Килбасом [101]. Аналогичные результаты для двух модифицированных преобразований с H -функцией в ядрах были доказаны в статье [80] и отражены в 3-й – 5-й главах монографии А. А. Килбаса и М. Н. Сайго [76].

Одним из наиболее эффективных инструментов для изучения преобразований типа свертки (1.2) является техника преобразований Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt \quad (1.19)$$

и, в частности, равенство Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} k\left(\frac{x}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\mathfrak{M}k)(s) (\mathfrak{M}f)(s) x^{-s} ds, \quad (1.20)$$

где бесконечный контур интегрирования $(c - i\infty, c + i\infty)$ начинается в точке $c - i\infty$ и оканчивается в точке $c + i\infty$ с некоторым вещественным $c \in \mathbb{R}$.

Преобразование Меллина ядер гипергеометрического типа есть отношение произведений гамма-функций Эйлера $\Gamma(z)$, асимптотика которых в соответствии с формулой Стирлинга имеет степенно-экспоненциальный характер. Это позволяет изучать в совокупности данный класс интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций и получать формулы обращения непосредственно исходя из равенства (1.20) и сверточной структуры класса преобразований (1.2) [8; 26].

Техника преобразований Меллина (1.19) также может быть применена для исследования интегральных преобразований вида (1.1) с $K(x, t) = k(xt)$, для которых имеет место аналог равенства Парсеваля (1.20) в виде

$$\int_0^{\infty} k(xt)f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\mathfrak{M}k)(s)(\mathfrak{M}f)(1-s)x^{-s}ds. \quad (1.21)$$

В данной работе с помощью формул преобразования Меллина (1.19) от ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c \Phi$, $P_{\delta, k}^\gamma f$ ($j, k = 1, 2, 3, 4$) доказывается, что эти преобразования являются специальными случаями **G**- и **H**-преобразований соответственно. На основании этого строится теория ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c$ - и $P_{\delta, k}^\gamma$ -преобразований в пространстве $\mathcal{L}_{v, r}$. При этом даются условия ограниченности и взаимной однозначности операторов ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c$ - и $P_{\delta, k}^\gamma$ -преобразований из одних пространств $\mathcal{L}_{v, r}$ в другие, доказываются аналоги формулы интегрирования по частям, устанавливаются различные интегральные представления для рассматриваемых преобразований, дается описание образов ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c(\mathcal{L}_{v, r})$ и $P_{\delta, k}^\gamma(\mathcal{L}_{v, r})$, а также выводятся формулы обращения. На основании этих результатов дается корректная постановка задачи разрешимости уравнений (1.3) – (1.6) и (1.7) – (1.10) в пространствах $\mathcal{L}_{v, r}$ и выводятся формулы их обращения.

В работе также исследуется картина разрешимости многомерных интегральных уравнений типа Абеля:

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{c, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{c, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2) \right)^{-\mu/2} P_v^\mu \left[\frac{A \cdot \mathbf{x}}{A \cdot \mathbf{t}} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad (1.23)$$

где: $(\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1)$ – ограниченная пирамидальная область евклидова пространства специального вида;

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ (см. подробнее – п. 2.1.4 настоящей монографии), содержащих в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса и функцию Лежандра первого рода соответственно.

Уравнение (1.22) обобщает многомерное уравнение типа Абеля [34; 99, §28.4], получающееся из (1.22) при $\sigma = 1, r = 0$ в случаях $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. При $\sigma = 1$ уравнение (1.22) является модификацией уравнения, рассмотренного в [33; 107].

Как указывалось выше, одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах функцию Гаусса, изучены многими авторами. Они возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [32]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана – Лиувилля со степенными весами и использовании известных свойств таких дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах.

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a, b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси [34; 99, теорема 2.1]. Аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида [81].

Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [27, с. 48; 29] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [57; 34; 99, §§25.1, 28.4]. Следуя методике Я. Тамаркина, в [33; 107] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a, b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области.

В данной работе продолжены указанные исследования. Мы даем решение в замкнутой форме более общих интегральных уравнений (1.22), (1.23) по пирамидальным областям и исследуем картину их разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (1.22), (1.23), а также даются их решения в замкнутой форме.

Далее перейдем к краткому изложению основных полученных результатов.

В первом разделе второй главы излагаются некоторые вспомогательные сведения из теории функциональных пространств, теории специальных функций, теории дробного интегро-дифференцирования, теории обобщенных $\mathbf{G}$ -преобразований и модифицированных $\mathbf{H}$ -преобразований.

Во втором разделе изложены $\mathcal{L}_{v, 2}$ - и $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории интегральных преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega}^c \delta \Phi$ ($j=1, 2, 3, 4$), при этом установлены условия их ограниченности и взаимной однозначности, даны описания образов этих операторов, получены различные интегральные представления, а также доказаны формулы обращения.

В третьем разделе второй главы дается решение интегральных уравнений (1.11) – (1.14) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах.

Четвертый раздел посвящен решению более общих интегральных уравнений (1.3) – (1.6) с гипергеометрической функцией Гаусса в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах. Пятый раздел посвящен решению интегрального уравнения типа Абеля (1.22) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре по пирамидальной области.

Третья глава посвящена исследованию интегральных преобразований и уравнений, содержащих в ядрах функцию Лежандра первого рода.

В первом разделе строится $\mathcal{L}_{v, 2}$ - и $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории интегральных преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$) с функцией Лежандра первого рода в ядрах, устанавливаются условия ограниченности и взаимной однозначности этих операторов, даются описания их образов, выводятся различные интегральные представления, а также доказываются формулы обращения.

Второй раздел посвящен решению интегральных уравнений типа Абеля (1.7) – (1.10) с функцией Лежандра первого рода в ядрах в пространстве $\mathcal{L}_{v, r}$.

В третьем разделе дается решение интегрального уравнения (1.23) с функцией Лежандра первого рода в ядре по пирамидальной области.

Выводы по главе 1

В данной главе приведен краткий обзор исторических сведений по вопросам, связанным с интегральными преобразованиями и интегральными уравнениями со специальными функциями в ядрах, дано описание используемых в работе методов исследований, а также приведено краткое содержание работы.

ГЛАВА 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ

Настоящая глава посвящена исследованию интегральных преобразований и уравнений, содержащих в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса.

2.1 Предварительные сведения

В данном разделе изложены некоторые вспомогательные сведения из теории функциональных пространств, теории специальных функций, теории дробного интегро-дифференцирования, теории обобщенных **G**-преобразований и модифицированных **H**-преобразований.

2.1.1 Некоторые функциональные пространства

Пусть $\Omega = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Через $L_p = L_p(\Omega)$ обозначим множество измеримых на Ω функций $f(x)$, вообще говоря, комплекснозначных, для которых $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$. Положим

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

Для нормы (2.1) используются также обозначения

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Приведем некоторые свойства пространства L_p [34; 99, §1.2]:

a) неравенство Минковского

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}, \quad (2.3)$$

с учетом которого $L_p(\Omega)$ является нормированным пространством;

b) неравенство Гельдера

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}, \quad p' = p/(p-1), \quad (2.4)$$

где $f(x) \in L_p(\Omega)$, $g(x) \in L_{p'}(\Omega)$.

Показатель p' связан с p равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \quad (2.5)$$

с) *теорема Фубини*, позволяющая менять порядок интегрирования в повторных интегралах:

Теорема 2.1 [34; 99, теорема 1.1]. Пусть $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$, и пусть $f(x, y)$ – определенная на $\Omega_1 \times \Omega_2$ измеримая функция. Если сходится (абсолютно) хотя бы один из интегралов

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y) dy, \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y) dx, \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy,$$

то они совпадают.

Имеет место следующий частный случай теоремы Фубини (формула Дирихле):

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx, \quad (2.6)$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов.

Обобщенное неравенство Минковского имеет вид:

$$\left(\int_{\Omega_1} dx \left| \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\Omega_2} dy \left(\int_{\Omega_1} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7)$$

Определение 2.1. Пусть $\rho(x)$ – неотрицательная функция. Через $L_p(\rho) = L_p(\Omega; \rho)$ будем обозначать класс измеримых на Ω функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \left(\int_{\Omega} \rho(x) |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пространство $L_p(\rho)$ банахово ввиду изометрии

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \|\rho^{1/p} f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (2.8)$$

В силу изометрии (2.8) из (2.4) вытекает *аналог неравенства Гельдера* для весовых пространств:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_p(\rho)} \|g\|_{L_{p'}(\rho^{1-p'})}, \quad 1 < p < \infty. \quad (2.9)$$

Определение 2.2. Функция $k(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$, называется однородной степени α , если справедливо соотношение

$$k(\lambda x, \lambda t) = \lambda^\alpha k(x, t), \lambda > 0.$$

Теорема 2.2 [34; 99, теорема 1.5]. Пусть функция $k(x, t)$ однородна степени (-1) . Если

$$\kappa = \int_0^\infty |k(x, 1)| x^{-1/p'} dx = \int_0^\infty |k(1, t)| t^{-1/p} dt < \infty, \quad (2.10)$$

то интегральный оператор

$$K\phi = (K\phi)(x) = \int_0^\infty k(x, t)\phi(t)dt \quad (2.11)$$

ограничен в $L_p(0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$, при этом $\|K\phi\|_{L_p} \leq \kappa \|\phi\|_{L_p}$, где κ имеет вид (2.10).

Введем пространство $\mathcal{L}_{v, r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$, для которых $\|f\|_{v, r} < \infty$, где

$$\|f\|_{v, r} = \left(\int_0^\infty |t^v f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbf{R}). \quad (2.12)$$

Заметим, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v, r}} = \|f\|_{L_r(\mathbf{R}_+, t^{vr-1})}, \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbf{R}).$$

Для функции f определим почти всюду в $\mathbf{R}_+$ элементарные операторы M_ξ, W_δ, N_a :

$$(M_\xi f)(x) = x^\xi f(x) \quad (\xi \in \mathbf{C}); \quad (2.13)$$

$$(W_\delta f)(x) = f\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (\delta \in \mathbf{R}_+); \quad (2.14)$$

$$(N_a f)(x) = f(x^a) \quad (a \in \mathbf{R}, a \neq 0). \quad (2.15)$$

Эти операторы обладают следующими свойствами [21].

Лемма 2.1 [21, Лемма 1]. Для $v \in \mathbf{R}$ и $1 \leq r < \infty$ верны следующие утверждения:

а) M_ξ является изометрическим изоморфизмом $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(\xi), r}$; M_ξ^{-1} является изометрическим изоморфизмом $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{v+\operatorname{Re}(\xi), r}$ и

$$M_\xi^{-1} = M_{-\xi}; \quad (2.16)$$

b) W_{δ} является ограниченным изоморфизмом $\mathfrak{L}_{v,r}$ на себя и

$$W_{\delta}^{-1} = W_{1/\delta}; \quad (2.17)$$

c) N_a является ограниченным изоморфизмом $\mathfrak{L}_{v,r}$ на $\mathfrak{L}_{av,r}$; N_a^{-1} – ограниченный изоморфизм $\mathfrak{L}_{v,r}$ на $\mathfrak{L}_{v/a,r}$ и

$$N_a^{-1} = N_{1/a}. \quad (2.18)$$

2.1.2 Некоторые специальные функции

Дадим известные определения и некоторые свойства ряда специальных символов и функций.

Символ Похгаммера $(z)_n$ при комплексных $z \in \mathbb{C}$ и целых неотрицательных $n \in \mathbb{N}_0$ определяется равенством

$$(z)_0 \equiv 1, (z)_n = z(z+1) \dots (z+n-1), n=1, 2, \dots, \quad (2.19)$$

$$(z)_n = (-1)^n (1-n-z)_n, (1)_n = n!, \quad (2.20)$$

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \quad (2.21)$$

где $\Gamma(z)$ задается формулой (2.22).

Равенство (2.21) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при комплексных n .

Гамма-функцией $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (2.22)$$

который сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Re}(z) > 0$. Здесь $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$, $x > 0$. На полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$, гамма-функция доопределяется с помощью аналитического продолжения этого интеграла.

Так, получаемая из (2.22) интегрированием по частям формула понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (2.23)$$

после многократного применения, приводит к равенству

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1) \dots (z+n-1)}, \quad (2.24)$$

$$\operatorname{Re}(z) > -n, n=1, 2, \dots, z \neq 0, -1, -2, \dots,$$

позволяющему осуществить такое аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re}(z) > -n$ при любом n .

Из равенства (2.24) следует, что $\Gamma(z)$ аналитична в комплексной плоскости всюду, кроме точек $z \neq 0, -1, -2, \dots$, где она имеет простые полюса и имеет место асимптотическая оценка

$$\Gamma(z) = (-1)^k [k!(z+k)]^{-1} [1 + O(z+k)], \quad z \rightarrow -k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

которая получается из (2.24) при $z \rightarrow 1-n$ после замены $n-1$ на k .

Нам потребуется *формула удвоения* (формула Лежандра) [3]:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (2.25)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется при $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [3, §2.1]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (2.26)$$

Его параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными (причем $c \neq 0, -1, -2, \dots$), а $(a)_k$ – символ Похгаммера (2.19). Ряд сходится при $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(c-a-b) > -1$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда.

Один из способов такого продолжения – *интегральное представление Эйлера*:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (2.27)$$

$z \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c$, ($|\arg(1-z)| < \pi$, $z \neq 1$) (см. [3, формулы 2.1(2) и 2.1.(10)]), в котором правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла. Условие $|\arg(1-z)| < \pi$ означает, что функция рассматривается в комплексной плоскости z с разрезом по лучу $(1, \infty)$, который соединяет особые точки $z=1$ и $z=\infty$ функции Гаусса. Отметим еще, что в (2.27) выбирается главное значение ветви $(1-tz)^{-a} = e^{-a \ln(1-tz)}$, где $\ln(1-tz)$ имеет вещественное значение при $z \in [0, 1]$.

Укажем некоторые простейшие свойства этой функции:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z), \quad (2.28)$$

$${}_2F_1(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}, \quad (2.29)$$

$${}_2F_1(a, b; c; 0) = {}_2F_1(0, b; c; z) = 1, \quad (2.30)$$

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0. \quad (2.31)$$

Справедливо следующее равенство [3, 2.4(3)]:

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(s)\Gamma(c-s)} \times \\ \times \int_0^1 \frac{x^{s-1}(1-x)^{c-s-1}}{(1-xz)^{a'}} F(a-a', b; s; xz) F\left(a', b-s; c-s; \frac{(1-x)z}{1-xz}\right) dx, \quad (2.32)$$

формула автотрансформации [3, 2.1(23)]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z). \quad (2.33)$$

Нам потребуются также формулы [3, 2.10(2) и 2.1(22)]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = O(z^{-a}) + O(z^{-b}), \quad z \rightarrow \infty, \quad a-b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (2.34)$$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right). \quad (2.35)$$

Через функцию Гаусса определяются многие важные специальные функции. Так, *функция Лежандра первого рода* $P_\delta^\gamma(z)$, $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, определяется при комплексных $\gamma, \delta, z \in \mathbb{C}$ равенствами [3, формулы 3.2(3) и 3.4(6); 31, п. 11.18]

$$P_\delta^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\gamma}{2}} {}_2F_1\left(-\delta, 1+\delta; 1-\gamma; \frac{1-z}{2}\right), \quad z \notin [-1, 1], \quad (2.36)$$

$$P_\delta^\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\gamma}{2}} {}_2F_1\left(-\delta, 1+\delta; 1-\gamma; \frac{1-x}{2}\right), \quad -1 < x < 1. \quad (2.37)$$

На основании [3, 3.2(24)] $P_\delta^\gamma(z)$ представима в виде

$$P_\delta^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} 2^\gamma (z^2-1)^{-\frac{\gamma}{2}} z^{\delta+\gamma} F\left(-\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2}; 1-\gamma; 1-\frac{1}{z^2}\right), \quad (2.38)$$

$$\operatorname{Re}(z) > 0, \quad \left|1-\frac{1}{z^2}\right| < 1$$

2.1.3 Дробные интегралы и производные на полуоси

Приведем известные определения и некоторые свойства дробных интегралов и производных [34; 99, §§5, 18].

Определение 2.3. *Интегралы*

$$(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad 0 < x < \infty, \quad (2.39)$$

$$(\mathcal{I}_{-}^{\alpha}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad -\infty < x < 0, \quad (2.40)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, называются интегралами дробного порядка α . Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним интегралами на полуоси. Операторы $\mathcal{I}_{0+}^{\alpha}\varphi$, $\mathcal{I}_{-}^{\alpha}\varphi$ называют операторами дробного интегрирования.

Интегралы (2.39), (2.40) принято называть также дробными интегралами Римана – Лиувилля на полуоси.

Определение 2.4. Для функции $f(x)$, заданной на полуоси $(0, \infty)$, каждое из выражений

$$\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2.41)$$

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \quad (2.42)$$

называется дробной производной порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ на полуоси, соответственно, левосторонней и правосторонней.

Дробные производные (2.41), (2.42) называют обычно производными Римана – Лиувилля на полуоси.

Для $f(x) = (x-a)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$, имеет место формула Эйлера [34; 99, (2.26)]:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}},$$

в частности, [34; 99, (2.27)]

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) \equiv 0, \text{ если } f(x) = \frac{1}{(x-a)^{1-\alpha}}.$$

Для степенной функции $\varphi(x) = x^{\beta-1}$, $\text{Re}(\beta) > 0$, имеем [34; 99, (2.44)]:

$$I_{0+}^{\alpha} \varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} x^{\alpha + \beta - 1}, \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (2.43)$$

$$D_{0+}^{\alpha} \varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} x^{\beta - \alpha - 1}, \text{Re}(\alpha) \geq 0. \quad (2.44)$$

Для степенной функции $\varphi(x) = x^{\beta-1}$ [34; 99, табл. 9.2, формула 1]

$$I_{-}^{\alpha} \varphi = \frac{\Gamma(1 - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \beta)} x^{\alpha + \beta - 1}, \text{Re}(\alpha + \beta) < 1, \quad (2.45)$$

$$D_{-}^{\alpha} \varphi = \frac{\Gamma(1 + \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \beta)} x^{\beta - \alpha - 1}, \text{Re}(n - \alpha + \beta) < 1, n = [\text{Re} \alpha] + 1. \quad (2.46)$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$I_{0+}^{\alpha} f = \begin{cases} I_{0+}^{\alpha} f, \text{Re}(\alpha) > 0, \\ D_{0+}^{-\alpha} f, \text{Re}(\alpha) \leq 0; \end{cases} \quad I_{-}^{\alpha} f = \begin{cases} I_{-}^{\alpha} f, \text{Re}(\alpha) > 0, \\ D_{-}^{-\alpha} f, \text{Re}(\alpha) \leq 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ – комплексные числа, такие, что существует одно α_j , для которого $\text{Re} \alpha_j = \min(\text{Re} \alpha_1, \dots, \text{Re} \alpha_n, \text{Re} \alpha_{n+1})$. Тогда положим $\alpha_{n+1} = 0$ и введем функцию

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, \text{Re} \alpha_j > 0, i = 1, 2, \dots, n. \\ -\alpha_j, \text{если существует } \alpha_j, \text{ для которого} \\ \text{Re} \alpha_j < \min(0, \text{Re} \alpha_1, \dots, \text{Re} \alpha_{j-1}, \text{Re} \alpha_{j+1}, \dots, \text{Re} \alpha_n) \end{cases} \quad (2.48)$$

(если существуют α_j, α_k такие, что $\alpha_j \neq \alpha_k$, но $\text{Re} \alpha_j = \text{Re} \alpha_k = \min(0, \text{Re} \alpha_1, \dots, \text{Re} \alpha_n)$, то функция $m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ не определяется). Также введем пространства

$$I_{0+}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r}) = \begin{cases} \mathcal{L}_{v,r}, \text{Re} \alpha > 0, \\ I_{0+}^{-\alpha}(\mathcal{L}_{v,r}), \text{Re} \alpha < 0, \end{cases} \quad (1 < r < \infty), \quad (2.49)$$

$$I_{-}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r}) = \begin{cases} \mathcal{L}_{v,r}, \text{Re} \alpha > 0, \\ I_{0-}^{-\alpha}(\mathcal{L}_{v,r}), \text{Re} \alpha < 0, \end{cases} \quad (1 < r < \infty).$$

Справедлива лемма.

Лемма 2.2 [34; 99, лемма 3.3]. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, $m = [\alpha]$, $\nu < 1 + \min(\mu, 0)$. Тогда справедливы соотношения:

$$I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} \varphi = x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} (\varphi + A_1 \varphi), \quad (2.50)$$

$$x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} \varphi = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} (\varphi + A_2 \varphi), \quad (2.51)$$

в которых A_i – ограниченные в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ операторы, определяемые равенствами:

$$A_1 \varphi = A_1^{(\mu, \alpha)} \varphi = \sum_{j=0}^m c_j \int_0^x A_{1j}(x, \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$A_2 \varphi = x^{-\mu} A_1^{(-\mu, \alpha)} x^{\mu} \varphi,$$

$$A_{1,j}(x, \tau) = \tau^{\mu} (x - \tau)^{m-j} \int_0^1 \frac{\xi^{\alpha+m-j}}{(1-\xi)^{\{\alpha\}}} [\tau + \xi(x - \tau)]^{j-\mu-m-1} d\xi,$$

$$c_j = \binom{m+1}{j} \frac{m!(j-m-\mu)_{m-j+1}}{(m-j)! \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\{\alpha\})}.$$

Справедлива теорема.

Теорема 2.3 [34; 99, теорема 5.4]. Пусть

$$1 \leq p < \infty, \quad 0 < \alpha < m + \frac{1}{p}, \quad 0 \leq m \leq \alpha, \quad q = \frac{p}{1 - (\alpha - m)p}$$

и $m \neq 0$ при $p = 1$.

Тогда операторы I_{0+}^{α} , I_{-}^{α} ограничены из $\mathcal{L}_{\frac{\mu+1}{p}, p}$ в $\mathcal{L}_{\frac{\nu+1}{q}, q}$, $\nu = (\mu/p - m)q$:

$$\left(\int_0^{\infty} x^{\nu} |(I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \kappa_1 \left(\int_0^{\infty} x^{\mu} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \mu < p - 1, \quad (2.52)$$

$$\left(\int_0^{\infty} x^{\nu} |(I_{-}^{\alpha} \varphi)(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \kappa_2 \left(\int_0^{\infty} x^{\mu} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \mu > \alpha p - 1, \quad (2.53)$$

где $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = m$, тогда $q = p$, $\nu = \mu - \alpha p$. Неравенства (2.52) и (2.53) принимают вид:

$$\left(\int_0^{\infty} x^{\mu - \alpha p} |(I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \kappa_1 \left(\int_0^{\infty} x^{\mu} |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \mu < p - 1, \quad (2.54)$$

$$\left(\int_0^\infty x^{\mu-\alpha p} \left| (I_-^\alpha \varphi)(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \kappa_2 \left(\int_0^\infty x^\mu |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \mu > \alpha p - 1. \quad (2.55)$$

Дробный интеграл порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, функции $\varphi(x)$ по функции $g(x)$ определяется формулой [34, 99, § 18.2]

$$(I_{a+;g}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(g(x) - g(t))^{1-\alpha}} g'(t) dt, \quad x > a.$$

Дробные интегралы порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, функции $\varphi(x)$ по функции x^σ ($x > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$) определяются формулами

$$(I_{0+;x^\sigma}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{\sigma-1} \varphi(t)}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (2.56)$$

$$(I_{-;x^\sigma}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{t^{\sigma-1} \varphi(t)}{(t^\sigma - x^\sigma)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (2.57)$$

а соответствующие дробные производные порядка α ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$) имеют вид [34; 99, § 18.2]:

$$(D_{0+;x^\sigma}^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n (I_{0+;x^\sigma}^{n-\alpha} f)(x) \quad (x > 0; n = \operatorname{Re}[\alpha] + 1), \quad (2.58)$$

$$(D_{-;x^\sigma}^\alpha f)(x) = \left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n (I_{-;x^\sigma}^{n-\alpha} f)(x) \quad (x > 0; n = \operatorname{Re}[\alpha] + 1). \quad (2.59)$$

Мы будем использовать для них следующие обозначения для $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$I_{0+;x^\sigma}^\alpha \varphi = \begin{cases} I_{0+;x^\sigma}^\alpha \varphi, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ D_{0+;x^\sigma}^{-\alpha} \varphi, & \operatorname{Re} \alpha \leq 0; \end{cases} \quad (2.60)$$

$$I_{-;x^\sigma}^\alpha \varphi = \begin{cases} I_{-;x^\sigma}^\alpha \varphi, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ D_{-;x^\sigma}^{-\alpha} \varphi, & \operatorname{Re} \alpha \leq 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

Заметим, что дробные интегралы (2.56) – (2.57) связаны с дробными интегралами Римана – Лиувилля (2.39) – (2.40) соотношениями

$$I_{0+;x}^{\alpha}\varphi = N_{\sigma} I_{0+}^{\alpha} N_{1/\sigma}\varphi, \quad I_{-;x}^{\alpha}\varphi = N_{\sigma} I_{-}^{\alpha} N_{1/\sigma}\varphi, \quad (2.62)$$

где N_{σ} – элементарный оператор (2.15).

Дробные интегралы типа Эрдейи – Кобера $I_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}f$ и $I_{-;\sigma,\eta}^{\alpha}f$ порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, определяются для $\sigma > 0$, $\eta \in \mathbb{C}$ при $x > 0$ равенствами [34; 99, (18.1), (18.3)]:

$$I_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha}f(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{\sigma} - t^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt, \quad (2.63)$$

$$I_{-;\sigma,\eta}^{\alpha}f(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t^{\sigma} - x^{\sigma})^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt. \quad (2.64)$$

2.1.4 Дробные интегралы и производные по пирамидальным областям

Введем некоторые обозначения. Пусть $N = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ их скалярное произведение, в частности $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ для $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Пусть $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$; $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > 0\}$, а $k = (k_1, \dots, k_n) \in N_0^n = N_0 \times N_0 \times \dots \times N_0$ ($k_i \in N_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) – мультииндекс с $k! = k_1! \cdots k_n!$ и $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $k \in N_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}_+^n$ положим $\mathbf{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)$, $\mathbf{x}_k = (x)_{k_1} \cdots (x)_{k_n}$, $\mathbf{D}^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} \cdots (\partial x_n)^{k_n}}$, $(\mathbf{x}^{\sigma} - \mathbf{t}^{\sigma}) = (x_1^{\sigma_1} - t_1^{\sigma_1}) \cdots (x_n^{\sigma_n} - t_n^{\sigma_n})$, где $(z)_n$ – символ Похгаммера (2.19).

Пусть $A = \|a_{jk}\|$ ($a_{jk} \in \mathbb{R}^1$) – матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A$, вектор-строки которой обозначим через $(\mathbf{a}_j) = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$,

элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения общности положим $|A|=1$. Пусть [34; 99, §28.4]

$$A \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x}), (A \cdot \mathbf{x})^\alpha = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_1} \dots (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ и $r \in \mathbb{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq 0, \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0\} \quad (2.65)$$

n -мерную ограниченную в $\mathbb{R}^n$ пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, с основанием на гиперплоскости $\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r = 0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) = 0$ ($j = 1, \dots, n$). В частности, когда $A = E = \|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой вида

$$E_1(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{t} \leq \mathbf{b}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{t} \geq 0\}. \quad (2.66)$$

Известно [34; 99, лемма 26.2], что для ограниченности пирамиды A необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1} \cdot \mathbf{c} > 0$.

Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ введем функцию

$$F[\alpha, \beta; \gamma; \mathbf{x}] = \prod_{j=1}^n {}_2F_1[\alpha_j, \beta_j; \gamma_j; x_j], \quad (2.67)$$

представляющую собой произведение гипергеометрических функций Гаусса (2.26).

Для $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ введем функцию

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}}^{\mu}(\mathbf{x}) &= \prod_{j=1}^n P_{v_j}^{\mu_j}(x_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(1-\mu_j)} \left(\frac{x_j+1}{x_j-1} \right)^{\frac{\mu_j}{2}} \times \\ &\times F \left[-v_j, 1+v_j; 1-\mu_j; \frac{1-x_j}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

представляющую собой произведение функций Лежандра первого рода (2.36).

Лемма 2.3 [34; 99, §28]. Если функция $f(\mathbf{x}, t)$, определенная на $A_c(\mathbf{b}) \times A_c(\mathbf{b})$ измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:

$$\int_{A_c(\mathbf{b})} d\mathbf{t} \int_{A_c(\mathbf{t})} f(\mathbf{t}, \tau) d\tau = \int_{A_c(\mathbf{b})} d\tau \int_{\sigma(\mathbf{b}, \tau)} f(\mathbf{t}, \tau) d\mathbf{t}, \quad (2.69)$$

$$\sigma(\mathbf{b}, \tau) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \tau \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{b}\}, \quad (2.70)$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (2.69) сходится абсолютно.

Операторы

$$(I_{A_c}^\alpha \varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_c(\mathbf{x})} \frac{\varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{1-\alpha}}, \alpha > 0, \quad (2.71)$$

$$(D_{A_c}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int_{A_c(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^\alpha}, 0 < \alpha < 1, \quad (2.72)$$

называют пирамидальными аналогами смешанных дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ [34; 99, §28].

Выражения (2.71), (2.72) определены на функциях, заданных на $A_c(b)$.

В частности, если функция f имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, удовлетворяющие условию

$$D^\beta f(\mathbf{x})|_{c \cdot \mathbf{x}=0} = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq n-1, \quad (2.73)$$

то дробная производная (2.72) представима в виде

$$(D_{A_c}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_c(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}))^{-\alpha} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial t_j} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (2.74)$$

Простейшими операторами вида (2.71), (2.72) являются следующие:

$$(I_{E_1}^\alpha \varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} \frac{\varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(x - t)^{1-\alpha}}, \alpha > 0, \quad (2.75)$$

$$(D_{E_1}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{E_1(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(x - t)^{\alpha-n+1}}, \alpha > 0, n = [\alpha] + 1. \quad (2.76)$$

Их называют модельными пирамидальными аналогами смешанных дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля порядка α [34; 99, §28.4].

Введем пространства

$$L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t})^{-\nu}) = \left\{ f(\mathbf{t}): (A \cdot \mathbf{t})^{-\nu} f(\mathbf{t}) \in L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})) \right\}, \quad (2.77)$$

$$I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1) = \left\{ g: g(\mathbf{x}) = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})) \right\}, \quad (2.78)$$

где пространство $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ определяется следующим образом:

$$L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}): \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\}. \quad (2.79)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1)$ играет ту же роль, что и пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [34; 99, §2.2]. Отметим, что если $g \in I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}). \quad (2.80)$$

В частности, если $A = E$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, пространства (2.77) – (2.79) принимают вид соответственно:

$$L_1(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{-\nu}) = \left\{ f(\mathbf{t}): (A \cdot \mathbf{t})^{-\nu} f(\mathbf{t}) \in L_1(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})) \right\}, \quad (2.81)$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}(L_1) = \left\{ g: g(\mathbf{x}) = \int_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})) \right\}, \quad (2.82)$$

$$L_1(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}): \int_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\}, \quad (2.83)$$

где $h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} g(\mathbf{x})$.

2.1.5 Обобщенные G-преобразования

G -функцией Мейера порядка (m, n, p, q) , где $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса [34; 99, §1.3]

$$\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] &= G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)} z^{-s} ds, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s = -b_j - k$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, слева, а полюса $s = 1 - a_j + k$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – справа.

Отметим, что функция (2.26) является частным случаем G -функции Мейера

$$\frac{1}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} G_{2,2}^{1,2} \left[z \left| \begin{matrix} 1-a, 1-b \\ 0, 1-c \end{matrix} \right. \right].$$

Для функции $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$) преобразование Меллина $\mathfrak{M}f$ определяется равенством [95]

$$(\mathfrak{M}f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^\tau) e^{s\tau} d\tau \quad (s = v + it; v, t \in \mathbb{R}). \quad (2.85)$$

Если $f \in \mathcal{L}_{v,r} \cap \mathcal{L}_{v,1}$, $\operatorname{Re}(s) = v$, то (2.85) совпадает с обычным преобразованием Меллина:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt. \quad (2.86)$$

G -преобразованием называют интегральное преобразование [76]

$$(Gf)(x) = \int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left[xt \left| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \quad (2.87)$$

содержащее G -функцию Мейера (2.84) в ядре.

Преобразование Меллина от G -функции Мейера для достаточно хороших функций f дается формулой [76]:

$$(\mathfrak{M}Gf)(s) = \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-s), \quad (2.88)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] &= \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a)_p \\ (b)_q \end{matrix} \middle| s \right] = \\ &= \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Нам понадобится обобщенное $\mathbf{G}$ -преобразование вида [21, (1)]

$$(G_{\sigma, \omega, a, b, \lambda} f)(x) = x^\sigma \int_0^\infty G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} \lambda x^a t^b \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \right] t^\kappa f(t) dt \quad (2.90)$$

с G -функцией (2.84) $G_{p,q}^{m,n}[z]$ в ядре.

Формула преобразования Меллина от $G_{\sigma, \omega, a, b, \lambda}$ -преобразования (2.90) для «достаточно хороших» функций f имеет вид [21, (31)]

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} G_{\sigma, \omega, a, b, \lambda} f)(s) &= \frac{1}{a} \lambda^{-(s+\sigma)/a} \times \\ &\times \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| \frac{s+\sigma}{a} \right] (\mathfrak{M}f) \left(\omega + 1 - \frac{b}{a}(s+\sigma) \right), \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)$ дается (2.89).

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{v,2}$ - и $\mathfrak{L}_{v,r}$ -теории и формулы обращения обобщенного $\mathbf{G}$ -преобразования (2.90) нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры G -функции (2.84) [76, (6.1.5) – (6.1.11)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min_{1 \leq j \leq m} [\operatorname{Re}(b_j)], & m > 0, \\ -\infty, & m = 0, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1 - \max_{1 \leq i \leq n} [\operatorname{Re}(a_i)], & n > 0 \\ \infty, & n = 0 \end{cases}; \quad (2.92)$$

$$a^* = 2(m+n) - p - q; \quad (2.93)$$

$$\Delta = q - p; \quad (2.94)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}, \quad (2.95)$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max_{m+1 \leq j \leq q} [\operatorname{Re}(b_j)], & q > m; \\ -\infty, & q = m; \end{cases}, \quad \beta_0 = \begin{cases} \min_{n+1 \leq i \leq p} [\operatorname{Re}(a_i)] + 1, & p > n; \\ \infty, & p = n. \end{cases} \quad (2.96)$$

Кроме этого, для $1 \leq r \leq \infty$ обозначим

$$\gamma(r) = \max[r^{-1}, r'^{-1}] (r^{-1} + r'^{-1} = 1). \quad (2.97)$$

Назовем *исключительным множеством* $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ для функции $\mathcal{G}(s)$, определенной в (2.89), множество вещественных чисел v таких, что $\alpha < 1 - v < \beta$ и $\mathcal{G}(s)$ имеет нули на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1 - v$.

Введем необходимые обозначения:

$$\theta = b^{-1}[v - \operatorname{Re}(\omega) - 1] + 1, \quad (2.98)$$

$$\kappa = ab^{-1}[\operatorname{Re}(\omega) + 1 - v] - \operatorname{Re}(\sigma). \quad (2.99)$$

Следующее утверждение представляет $\mathcal{L}_{v, 2}$ -теорию обобщенного **G**-преобразования (2.90).

Утверждение 2.1 [21, теорема 1]. Пусть

$$\alpha < 1 - \theta < \beta \text{ и } a^* = 0, \Delta(1 - \theta) + \operatorname{Re}(\mu) \leq 0. \quad (2.100)$$

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ является инъективным элементом $[\mathcal{L}_{v, 2}, \mathcal{L}_{\kappa, 2}]$ и при $\operatorname{Re}(s) = \kappa$ его преобразование Меллина имеет вид (2.91). Если $\Delta(1 - \theta) + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $\theta \notin \mathcal{E}_{\mathcal{G}}$, то преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{L}_{v, 2}$ на $\mathcal{L}_{\kappa, 2}$.

б) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ и $g \in \mathcal{L}_{\kappa^*, 2}$, где $\kappa^* = a^{-1}b[v - \operatorname{Re}(\sigma) - 1] + \operatorname{Re}(\omega) + 1$, верно равенство

$$\int_0^{\infty} f(x) \left(G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} g \right)(x) dx = \int_0^{\infty} \left(G_{\omega, \sigma; b, a, \lambda} f \right)(x) g(x) dx. \quad (2.101)$$

с) Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$ и $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$, то почти для всех $x > 0$ справедливо представление

$$(G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(x) = \frac{1}{a} h x^{\sigma+1-a(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{a(\gamma+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[\lambda x^a t^b \left| \begin{matrix} -\gamma, & (a_i)_{1, p} \\ (b_j)_{1, q}, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^\omega f(t) dt. \quad (2.102)$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$, то

$$(G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(x) = -\frac{1}{a} h x^{\sigma+1-a(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{a(\gamma+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty G_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[\lambda x^a t^b \left| \begin{matrix} (a_i)_{1, p}, & -\gamma \\ -\gamma-1, & (b_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] t^\omega f(t) dt. \quad (2.103)$$

д) Преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ не зависит от v в том смысле что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют условию (2.100), и если преобразования $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ и $\tilde{G}_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ определены в $\mathfrak{L}_{v, 2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{v}, 2}$ соответственно равенством (2.91), то $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f = \tilde{G}_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\tilde{v}, 2} \cap \mathfrak{L}_{v, 2}$.

е) Если $a^* = 0$, $\Delta(1 - \theta) + \operatorname{Re}(\mu) < -1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$ преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ задается равенством (2.90).

$\mathfrak{L}_{v, r}$ -теория $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda}$ -преобразования представлена в [21, теоремы 2 и 3].

Утверждение 2.2 [21, теорема 2]. Пусть $a^* = \Delta = 0$, $\operatorname{Re}(\mu) = 0$, $\alpha < 1 - \theta < \beta$ и $1 < r < \infty$.

а) Преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$, определенное в $\mathfrak{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{v, r}$ как элементы $[\mathfrak{L}_{v, r}; \mathfrak{L}_{k, r}]$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ является биективным на $\mathfrak{L}_{v, r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.91) для $f \in \mathfrak{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

с) Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{v, r}$ и $g \in \mathfrak{L}_{k^*, r'}$, где $r' = r/(r-1)$ и $k^* = a^{-1}b[v - \operatorname{Re}(\sigma) - 1] + \operatorname{Re}(\omega) + 1$, верно равенство (2.101).

d) Если $\theta \notin \mathcal{E}_g$, то преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{k, r}$, т. е.

$$G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} (\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{k, r}. \quad (2.104)$$

e) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$ представление $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ дается в равенстве (2.102), а также в (2.103) при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$.

Утверждение 2.3 [21, теорема 3]. Пусть $a^* = \Delta = 0$, $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, $\alpha < 1 - \theta < \beta$ и $m > 0$ или $n > 0$. Пусть $1 < r < \infty$.

a) Преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{k, s}]$ для всех $s \geq r$ таких, что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \operatorname{Re}(\mu)$.

b) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.91) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

c) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*, s}$, где

$$k^* = a^{-1}b[v - \operatorname{Re}(\sigma) - 1] + \operatorname{Re}(\omega), \quad 1 < s < \infty, \quad 1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 - \operatorname{Re}(\mu),$$

верно равенство (2.101).

d) Если $\theta \notin \mathcal{E}_g$, то преобразование $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и

$$G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} (\mathcal{L}_{v, r}) = I_{-; ak, (\sigma/a - \alpha)/k}^{-\mu} (\mathcal{L}_{k, r}) \quad (2.105)$$

для $k \geq 1$ и $m > 0$,

$$G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} (\mathcal{L}_{v, r}) = I_{0+; ak, (\beta - \sigma/a)/k-1}^{-\mu} (\mathcal{L}_{k, r}) \quad (2.106)$$

для $0 < k \leq 1$ и $n > 0$, где $I_{-; ak, (\sigma/a - \alpha)/k}^{-\mu}$ и $I_{0+; ak, (\beta - \sigma/a)/k-1}^{-\mu}$ — операторы типа Эрдейи — Кобера (2.63) и (2.64). Если $\theta \in \mathcal{E}_g$, то $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} (\mathcal{L}_{v, r})$ являются подмножествами правых частей (2.105) и (2.106) в соответствующих случаях.

e) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$ интегральное представление $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ дается в равенстве (2.102), а также

в (2.103) при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$ соответственно. Если $\operatorname{Re}(\mu) < -1$, то $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f$ дается равенством (2.90).

Справедливо следующее утверждение об обратимости оператора преобразования (2.90).

Утверждение 2.4 [21, теорема 5]. Пусть $a^* = 0$, $\alpha < 1 - \theta < \beta$, $\alpha_0 < \theta < \beta_0$, где α_0, β_0 имеет параметры (2.96), а также $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

а) Если $\Delta(1 - \theta) + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= ah\lambda x^{b-\omega-b(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{b(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{p+1, q+1}^{q-m, p-n+1} \left[\lambda x^b t^a \left| \begin{array}{ccc} -\gamma, & (-a_i)_{n+1, p}, & (-a_i)_{1, n} \\ (-b_i)_{m+1, q}, & (-b_i)_{1, m}, & (-\gamma-1) \end{array} \right. \right] \times \\ &\times t^{a-\sigma-1} (G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= -ah\lambda x^{b-\omega-b(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{b(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{p+1, q+1}^{q-m+1, p-n} \left[\lambda x^b t^a \left| \begin{array}{ccc} (-a_i)_{n+1, p}, & (-a_i)_{1, n}, & -\gamma \\ (-\gamma-1), & (-b_i)_{m+1, q}, & (-b_i)_{1, m} \end{array} \right. \right] \times \\ &\times t^{a-\sigma-1} (G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda} f)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.108)$$

б) Если $\Delta = \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (2.107) имеет место при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (2.108) – при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

2.1.6 Модифицированные Н-преобразования

Для целых неотрицательных m, n, p, q ($0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и положительных α_i, β_j ($1 \leq i \leq p, 1 \leq n \leq q$) Н-функция $H_{p, q}^{m, n}[z]$ определяется интегралом Меллина – Барнса:

$$H_{p, q}^{m, n}[z] \equiv H_{p, q}^{m, n} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p, q}^{m, n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (2.109)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \quad (2.110)$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией H -функции (2.109) можно ознакомиться в [76, гл. 1–2].

H-преобразованием называют интегральное преобразование [46]

$$(Hf)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[xt \middle| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] f(t) dt, \quad (2.111)$$

содержащее H -функцию (2.109) в ядре.

Нам потребуется модифицированное **H-преобразование** вида

$$\left(H_{\sigma,\kappa}^1 f \right)(x) = x^\sigma \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] t^\kappa f(t) \frac{dt}{t} \quad (x > 0) \quad (2.112)$$

с H -функцией (2.109) $H_{p,q}^{m,n}[z]$ в ядре.

Преобразование (2.112) является модификацией **H-преобразования**, обобщающего многие интегральные преобразования: преобразования с G -функцией Мейера, преобразования Лапласа и Ханкеля, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, преобразования с другими функциями гипергеометрического и бесселева типа. Обзор результатов и библиография работ по этой тематике даны в [76, гл. 6–8].

Формула преобразования Меллина от $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (2.112) для «достаточно хороших» функций f имеет вид [76, (5.1.14)]:

$$(\mathfrak{M} H_{\sigma,\kappa}^1 f)(s) = \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s + \sigma \right] (\mathfrak{M} f)(s + \sigma + \kappa), \quad (2.113)$$

где $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ определяется формулой (2.110).

Пусть M_ζ – оператор (2.13), R – элементарный оператор вида

$$(Rf)(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0). \quad (2.114)$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.4 [76, лемма 3.2]. Пусть $v \in \mathbb{R}$ и $1 \leq r < \infty$.

(a) M_ζ – изометрический изоморфизм $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(\zeta),r}$ и если $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$), то

$$(\mathfrak{M} M_\zeta f)(s) = (\mathfrak{M} f)(s + \zeta) \quad (\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\zeta)). \quad (2.115)$$

(b) R – изометрический изоморфизм $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{1-v,r}$ и если $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ ($1 \leq r \leq 2$), то

$$(\mathfrak{M} Rf)(s) = (\mathfrak{M} f)(1-s) \quad (\operatorname{Re}(s) = v). \quad (2.116)$$

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathcal{L}_{v,2}$ - и $\mathcal{L}_{v,r}$ -теории и формулы обращения модифицированного **H**-преобразования (2.112) нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры *H*-функции (2.109) [76, (3.4.1), (3.4.2), (1.1.7), (1.1.8), (1.1.10)]:

$$\alpha = \begin{cases} -\min_{1 \leq j \leq m} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_j)}{\beta_j} \right], & m > 0, \\ -\infty, & m = 0; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_i)}{\alpha_i} \right], & n > 0, \\ \infty, & n = 0, \end{cases} \quad (2.117)$$

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j, \quad \Delta = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i, \quad (2.118)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}, \quad (2.119)$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} 1 + \max_{m+1 \leq j \leq q} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_j) - 1}{\beta_j} \right], & q > m; \\ -\infty, & q = m; \end{cases} \quad (2.120)$$

$$\beta_0 = \begin{cases} 1 + \min_{n+1 \leq i \leq p} \left[\frac{\operatorname{Re}(a_i)}{\alpha_i} \right], & p > n; \\ \infty, & p = n. \end{cases} \quad (2.121)$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$, определенной в (2.110), называется множество вещественных чисел v таких, что $\alpha < 1-v < \beta$ и $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)$ имеет нули на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1-v$.

Обозначим через $[X, Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

Следующее утверждение представляет $\mathcal{L}_{v, 2}$ -теорию модифицированного $\mathbf{H}$ -преобразования.

Утверждение 2.5 [76, теорема 5.37]. *Допустим, что*

$$\alpha < v - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta, \quad a^* = 0, \quad \Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) \leq 0. \quad (2.122)$$

Верны следующие утверждения:

а) Существует инъективное преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathcal{L}_{v, 2}, \mathcal{L}_{v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), 2}]$, такое, что равенство (2.113) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a^ = 0$, $\Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то $H_{\sigma, \kappa}^1$ биективно отображает $\mathcal{L}_{v, 2}$ на $\mathcal{L}_{v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), 2}$.*

б) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ не зависит от v в том смысле, что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют (2.122) и если преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ и $\tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ определены в пространствах $\mathcal{L}_{v, 2}$ и $\mathcal{L}_{\tilde{v}, 2}$ равенством (2.113), то $H_{\sigma, \kappa}^1 f = \tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ для $f \in \mathcal{L}_{\tilde{v}, 2} \cap \mathcal{L}_{v, 2}$.

в) Если $a^ = 0$, $\Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) < 0$, то для $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (2.112).*

д) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(x) = hx^{\sigma+1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (-\lambda, h), & (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q}, & (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right] t^{\kappa-1} f(t) dt, \quad (2.123)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ дается формулой

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(x) = -hx^{\sigma+1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p}, & (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), & (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right] t^{\kappa-1} f(t) dt. \quad (2.124)$$

е) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), 2}$, то имеет место формула:

$$\int_0^\infty f(x) \left(H_{\sigma, \kappa}^1 g \right)(x) dx = \int_0^\infty \left(H_{\sigma, \kappa}^2 f \right)(x) g(x) dx, \quad (2.125)$$

где

$$\left(H_{\sigma, \kappa}^2 f \right)(x) = x^\sigma \int_0^\infty H_{p, q}^{m, n} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] t^\kappa f(t) \frac{dt}{x}. \quad (2.126)$$

$\mathcal{L}_{v, r}$ -теория $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования различна в 8 случаях [76, §5.5]. Нам понадобятся два случая [76, теоремы 5.38 и 5.39].

Утверждение 2.6 [76, теорема 5.38]. Пусть

$$a^* = \Delta = \operatorname{Re}(\mu) = 0, \quad \alpha < v - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta \quad \text{и} \quad 1 < r < \infty.$$

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$, определенное на $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ до элемента $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), r}]$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ биективно и выполняется равенство (2.113) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

б) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде (2.123) при $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ и дается формулой (2.124) при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$.

в) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), r'}$, где $r' = r/(r-1)$, то имеет место формула (2.126).

г) Если $1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), r}. \quad (2.127)$$

Утверждение 2.7 [76, теорема 5.39]. Пусть $a^* = \Delta = 0$, $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, $\alpha < v - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta$, $1 < r < \infty$, а также $m > 0$ или $n > 0$.

Имеют место следующие утверждения:

а) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$, определенное на $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ до элемента $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), s}]$ для всех $s \geq r$,

таких, что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \operatorname{Re}(\mu)$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ биективно и выполняется равенство (2.113) для $f \in \mathfrak{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

b) Для $f \in \mathfrak{L}_{v, r}$ преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (2.112).

c) Если $f \in \mathfrak{L}_{v, r}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде (2.123) при $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ и дается формулой (2.124) при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$.

d) Если $f \in \mathfrak{L}_{v, r}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-v+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), s}$, где $1 < s < \infty$, $1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 - \operatorname{Re}(\mu)$, то имеет место формула (2.125).

e) Пусть $\operatorname{Re}(\kappa) > 0$. Если $1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ биективно на $\mathfrak{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$H_{\sigma, \kappa}^1 (\mathfrak{L}_{v, r}) = I_{-; \kappa, (\sigma - \alpha)/\kappa}^{-\mu} (\mathfrak{L}_{v - \operatorname{Re}(\sigma + \kappa), r}) \quad (2.128)$$

при $t > 0$ и соотношением

$$H_{\sigma, \kappa}^1 (\mathfrak{L}_{v, r}) = I_{0+; \kappa, (\beta - \sigma)/\kappa - 1}^{-\mu} (\mathfrak{L}_{v - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), r}) \quad (2.129)$$

при $n > 0$, где $I_{-; \kappa, (\sigma - \alpha)/\kappa}^{-\mu}$, $I_{0+; \kappa, (\beta - \sigma)/\kappa - 1}^{-\mu}$ – операторы типа Эрдейи – Кобера (2.63) и (2.64). Если $1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 (\mathfrak{L}_{v, r})$ является подмножеством правых частей (2.128) и (2.129) соответственно при $t > 0$ и $n > 0$.

Формулы обращения $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования даются равенствами [76, (5.5.23) и (5.5.24)]:

$$\begin{aligned} f(x) = & -hx^{(\lambda+1)/h-\kappa} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{q-m, p-n+1} \left[\frac{t}{x} \middle| \begin{matrix} (-\lambda, h), & (1-a_i - \alpha_i, \alpha_i)_{n+1, p}, & (1-a_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1, n} \\ (1-b_j - \beta_j, \beta_j)_{m+1, q}, & (1-b_j - \beta_j, \beta_j)_{1, m}, & (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right] \times \\ & \times t^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(t) dt \end{aligned} \quad (2.130)$$

или

$$f(x) = hx^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{q-m+1, p-n} \left[\frac{t}{x} \middle| \begin{matrix} (1-a_i-\alpha_i, \alpha_i)_{n+1, p}, (1-a_i-\alpha_i, \alpha_i)_{1, n}, (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), (1-b_j-\beta_j, \beta_j)_{m+1, q}, (1-b_j-\beta_j, \beta_j)_{1, m} \end{matrix} \right] \times \quad (2.131) \\ \times t^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(t) dt.$$

Условия справедливости этих формул дает следующее утверждение.

Утверждение 2.8 [76, теорема 5.47]. Пусть $a^* = 0, \alpha < v - \operatorname{Re}(\kappa) < \beta$, $\alpha_0 < 1 - v + \operatorname{Re}(\kappa) < \beta_0$, и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

а) Если $\Delta[v - \operatorname{Re}(\kappa)] + \operatorname{Re}(\mu) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$, то формулы обращения (2.130) и (2.131) справедливы соответственно при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1 - v + \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ и $\operatorname{Re}(\lambda) < (1 - v + \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$.

б) Если $\Delta = \operatorname{Re}(\mu) = 0$, $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, $1 < r < \infty$, то формулы (2.130) и (2.131) верны соответственно при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1 - v + \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$ и $\operatorname{Re}(\lambda) < (1 - v + \operatorname{Re}(\kappa))h - 1$.

2.2 $\mathcal{L}_{v, 2}$ -, $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории интегральных преобразований

${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j = 1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах

В этом разделе построены $\mathcal{L}_{v, 2}$ - и $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории интегральных преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c\varphi$ ($j = 1, 2, 3, 4$), содержащих гипергеометрическую функцию Гаусса в ядрах, при этом установлены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов этих преобразований, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемых преобразований, даны описания образов этих операторов, а также выведены формулы обращения.

2.2.1 Преобразования ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j = 1, 2, 3, 4$)

с гипергеометрической функцией Гаусса

Пусть $\sigma, \omega \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$.

Рассмотрим четыре интегральных преобразования, содержащих гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ (2.26) в ядрах:

$${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0); \quad (2.132)$$

$${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0); \quad (2.133)$$

$${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0); \quad (2.134)$$

$${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0). \quad (2.135)$$

В данном разделе преобразования (2.132) – (2.135) изучаются в весовых пространствах $\mathcal{L}_{v, r}$ ($1 \leq r < \infty$, $v \in \mathbb{R}$), определяемых (2.12).

В частности, все полученные результаты верны для классических пространств r -суммируемых функций $L_r(\mathbb{R}_+) = \mathcal{L}_{1/r, r}$ ($1 \leq r < \infty$).

2.2.2 Представления преобразований ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$) в виде обобщенных G-преобразований

Найдем преобразование Меллина от ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$. Переставляя порядок интегрирования в повторном интеграле на основании формулы Дирихле (2.6) и осуществляя замену переменных $x = ut$, имеем

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} {}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) &= \int_0^\infty x^{\sigma+s-1} dx \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt = \\ &= \int_0^\infty t^\omega \varphi(t) dt \int_t^\infty x^{\sigma+s-1} \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty t^\omega \varphi(t) dt \int_1^\infty (yt)^{\sigma+s-1} \frac{(y^\delta t^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; 1 - y^\delta) t dy = \\
&= \int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s} \varphi(t) dt \int_1^\infty y^{\sigma+s-1} \frac{(y^\delta - 1)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; 1 - y^\delta) dy.
\end{aligned}$$

На основании формулы (2.35), получаем

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b; c; 1 - y^\delta) &= (1 - (1 - y^\delta))^{-a} {}_2F_1\left(a, c - b; c; \frac{1 - y^\delta}{1 - y^\delta - 1}\right) = \\
&= y^{-a\delta} {}_2F_1\left(a, c - b; c; 1 - \frac{1}{y^\delta}\right),
\end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) &= \int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s} \varphi(t) dt \times \\
&\times \int_1^\infty y^{\sigma+s-1-a\delta} \frac{(y^\delta - 1)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, c - b; c; 1 - \frac{1}{y^\delta}\right) dy.
\end{aligned}$$

Осуществляя замену переменных $z = y^{-\delta}$, применяя формулу [31, 2.21.1.11]

$$\begin{aligned}
&\int_0^y x^{\alpha-1} (y-x)^{c-1} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{t}\right) dx = y^{c+\alpha-1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha)\Gamma(c-a-b+\alpha)}{\Gamma(c-a+\alpha)\Gamma(c-b+\alpha)} \\
&[y > 0, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(c) > 0, \operatorname{Re}(c-a-b+\alpha) > 0]
\end{aligned}$$

при $y=1$, $\alpha = a - c + 1 - \frac{\sigma+s}{\delta}$ и заменяя b на $c-b$, получаем

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) &= \frac{1}{\delta} \int_0^1 z^{-\frac{1}{\delta}(\sigma+s-1-a\delta)} \frac{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^{c-1}}{\Gamma(c)} \times \\
&\times {}_2F_1(a, c-b; c; 1-z) z^{-\frac{1}{\delta}-1} dz \int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s} \varphi(t) dt = \\
&= \frac{1}{\delta} \int_0^1 z^{-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}+a-c} \frac{(1-z)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, c-b; c; 1-z) dz \int_0^\infty t^{\omega+\delta c-\delta+\sigma+s} \varphi(t) dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\delta} \frac{\Gamma\left(1+a-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)\Gamma\left(1+b-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)\Gamma\left(1+a+b-c-\frac{\sigma}{\delta}-\frac{s}{\delta}\right)} (\mathfrak{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)) = \\
&= \mathcal{G}_{2,2}^{0,2} \left[\begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \middle| \frac{\sigma+s}{\delta} \right] \frac{1}{\delta} (\mathfrak{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)).
\end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) = \mathcal{G}_{2,2}^{0,2} \left[\begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \middle| \frac{\sigma+s}{\delta} \right] \times \\
&\times \frac{1}{\delta} (\mathfrak{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)).
\end{aligned} \tag{2.136}$$

Рассуждая аналогично, получаем формулы преобразования Меллина от ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j=2, 3, 4$):

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_2 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) = \mathcal{G}_{2,2}^{0,2} \left[\begin{matrix} a+b & c \\ a & b \end{matrix} \middle| \frac{\sigma+s}{\delta} \right] \times \\
&\times \frac{1}{\delta} (\mathfrak{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s));
\end{aligned} \tag{2.137}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_3 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) = \mathcal{G}_{2,2}^{2,0} \left[\begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \middle| \frac{\sigma+s}{\delta} \right] \times \\
&\times \frac{1}{\delta} (\mathfrak{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s));
\end{aligned} \tag{2.138}$$

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{M}_4 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(s) = \mathcal{G}_{2,2}^{2,0} \left[\begin{matrix} a+b & c \\ a & b \end{matrix} \middle| \frac{\sigma+s}{\delta} \right] \times \\
&\times \frac{1}{\delta} (\mathfrak{M}\varphi)(\omega+\delta(c-1)+1+(\sigma+s)).
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Из (2.136) – (2.139) вытекают представления ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$) в виде обобщенных **G**-преобразований вида (2.90):

$$({}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) = x^\sigma \int_0^\infty G_{2,2}^{0,2} \left[\begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \middle| x^\delta t^\delta \right] t^\omega f(t) dt; \tag{2.140}$$

$$\left({}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi\right)(x) = x^\sigma \int_0^\infty G_{2, 2}^{0, 2} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} a+b & c \\ a & b \end{matrix} \right. \right] t^\omega f(t) dt; \quad (2.141)$$

$$\left({}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi\right)(x) = x^\sigma \int_0^\infty G_{2, 2}^{2, 0} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \right. \right] t^\omega f(t) dt; \quad (2.142)$$

$$\left({}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi\right)(x) = x^\sigma \int_0^\infty G_{2, 2}^{2, 0} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} a+b & c \\ a & b \end{matrix} \right. \right] t^\omega f(t) dt. \quad (2.143)$$

2.2.3 $\mathcal{L}_{v, 2}$ -теория преобразований ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$)

$\mathcal{L}_{v, 2}$ -теория преобразований (2.132) – (2.135) следует из представлений (2.140) – (2.143) и утверждения 2.1 для $G_{\sigma, \omega; a, b, \lambda}f$ -преобразования.

На основании (2.140) – (2.143) и (2.90) $p=q=2$, параметры (2.93) – (2.95) и (2.98), (2.99) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a^* &= 0, \quad \Delta = 0, \quad a_1^* = 0, \quad a_2^* = 0, \quad \mu = -c, \\ \theta &= \delta^{-1}[\nu - \operatorname{Re}(\omega) - 1] + 1, \quad k = \operatorname{Re}(\omega) + 1 - \nu - \operatorname{Re}(\sigma). \end{aligned} \quad (2.144)$$

Параметры m, n и (2.92) соответственно для операторов (2.132) – (2.135) принимают вид:

$$m=0, \quad n=2, \quad \alpha=-\infty, \quad \beta=1-\max[\operatorname{Re}(c-a), \operatorname{Re}(c-b)], \quad (2.145)$$

$$m=0, \quad n=2, \quad \alpha=-\infty, \quad \beta=1-\max[\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a+b)], \quad (2.146)$$

$$m=2, \quad n=0, \quad p=2, \quad \alpha=-\min[0, \operatorname{Re}(c-a-b)], \quad \beta=\infty, \quad (2.147)$$

$$m=2, \quad n=0, \quad \alpha=-\min[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)], \quad \beta=\infty, \quad (2.148)$$

На основании (2.136) θ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{2, 2}^{0, 2}$ -функции в правой части (2.136), если

$$s \neq m+1, \quad s \neq l+1+a+b-c \quad (l, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}), \quad (2.149)$$

для $\operatorname{Re}(s)=1-\theta$.

На основании (2.137) θ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{2, 2}^{0, 2}$ -функции в правой части (2.137), если

$$s \neq m+1-a, \quad s \neq l+1-b \quad (l, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}), \quad (2.150)$$

для $\operatorname{Re}(s)=1-\theta$.

На основании (2.138) θ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{2,2}^{2,0}$ -функции в правой части (2.138), если

$$s \neq m+1, \quad s \neq l+1+a+b-c \quad (l, m \in N_0 = N \cup \{0\}), \quad (2.151)$$

для $\text{Re}(s) = 1 - \theta$.

На основании (2.139) θ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \mathcal{G}_{2,2}^{2,0}$ -функции в правой части (2.139), если

$$s \neq m+1-a, \quad s \neq l+1-b \quad (l, m \in N_0 = N \cup \{0\}), \quad (2.152)$$

для $\text{Re}(s) = 1 - \theta$.

Из (2.140) – (2.143) и утверждения 2.1 мы получаем $\mathcal{L}_{v,2}$ -теорию преобразований ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi, j = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 2.4 [20, Теорема 1]. Пусть

$$\theta > \max[\text{Re}(c-a), \text{Re}(c-b)]; \quad \text{Re}(c) \geq 0. \quad (2.153)$$

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование ${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является инъективным элементом $[\mathcal{L}_{v,2}, \mathcal{L}_{k,2}]$ и при $\text{Re}(s) = k$ его преобразование Меллина имеет вид (2.136).

Если $\text{Re}(c) = 0$ и (2.149) имеет место, то преобразование ${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{L}_{v,2}$ на $\mathcal{L}_{k,2}$.

б) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v,2}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*,2}$, где $k^* = v - \text{Re}(\sigma) + \text{Re}(\omega)$, верно равенство:

$$\int_0^\infty f(x) ({}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c g)(x) dx = \int_0^\infty ({}_1 I_{\omega, \sigma; \delta}^c f)(x) g(x) dx. \quad (2.154)$$

с) Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $\varphi \in \mathcal{L}_{v,2}$. Если $\text{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$, то почти для всех $x > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} ({}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= \frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3,3}^{0,3} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & c-a, & c-b \\ 0, & c-a-b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Если $\text{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$, то

$$\begin{aligned} ({}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= -\frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3,3}^{1,2} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} c-a, & c-b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & 0, & c-a-b \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.156)$$

d) Преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ не зависит от ν в том смысле, что, если ν и $\tilde{\nu}$ удовлетворяют (2.153), и если преобразования ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ и ${}_1\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ определены в пространствах $\mathcal{L}_{\nu, 2}$ и $\mathcal{L}_{\tilde{\nu}, 2}$ равенством (2.136), то ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi = {}_1\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ для $\varphi \in \mathcal{L}_{\tilde{\nu}, 2} \cap \mathcal{L}_{\nu, 2}$.

e) Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то для $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$ преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ задается равенством (2.132).

Теорема 2.5 [20, Теорема 1]. Пусть

$$\theta > \max[\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a+b)]; \operatorname{Re}(c) \geq 0. \quad (2.157)$$

Верны следующие утверждения:

a) Преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является инъективным элементом $[\mathcal{L}_{\nu, 2}, \mathcal{L}_{k, 2}]$ и при $\operatorname{Re}(s) = k$ его преобразование Меллина имеет вид (2.137).

Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и (2.150) имеет место, то преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{L}_{\nu, 2}$ на $\mathcal{L}_{k, 2}$.

b) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^, 2}$, где $k^* = \nu - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, верно равенство:*

$$\int_0^\infty f(x) \left({}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c g \right)(x) dx = \int_0^\infty \left({}_2I_{\omega, \sigma; \delta}^c f \right)(x) g(x) dx. \quad (2.158)$$

c) Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$, то почти для всех $x > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} ({}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= \frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{0, 3} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, a+b, c \\ a, b, -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$, то

$$\begin{aligned} ({}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= -\frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{1, 2} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} a+b, c, -\gamma \\ -\gamma-1, a, b \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.160)$$

д) Преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ не зависит от ν в том смысле, что, если ν и $\tilde{\nu}$ удовлетворяют (2.157) и преобразования ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ и ${}_2\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu, 2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\nu}, 2}$ равенством (2.137), то ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi = {}_2\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ для $\varphi \in \mathfrak{L}_{\tilde{\nu}, 2} \cap \mathfrak{L}_{\nu, 2}$.

е) Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то для $\varphi \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$ преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ задается равенством (2.133).

Теорема 2.6 [20, Теорема 1]. Пусть

$$\theta < 1 + \min[0, \operatorname{Re}(c - a - b)]; \operatorname{Re}(c) \geq 0. \quad (2.161)$$

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является инъективным элементом $[\mathfrak{L}_{\nu, 2}, \mathfrak{L}_{k, 2}]$ и при $\operatorname{Re}(s) = k$ его преобразование Меллина имеет вид (2.138).

Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и условия (2.151) имеет место, то преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимно однозначно отображает $\mathfrak{L}_{\nu, 2}$ на $\mathfrak{L}_{k, 2}$.

б) Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$ и $g \in \mathfrak{L}_{k^*, 2}$, где $k^* = \nu - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, верно равенство:

$$\int_0^\infty f(x) ({}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)g)(x) dx = \int_0^\infty ({}_3I_{\omega, \sigma; \delta}^c(a, b)f)(x) g(x) dx. \quad (2.162)$$

с) Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $\varphi \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$, то почти для всех $x > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} ({}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= \frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{2, 1} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & c-a, & c-b \\ 0, & c-a-b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$, то

$$\begin{aligned} ({}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= -\frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{3, 0} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} c-a, & c-b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & 0, & c-a-b \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.164)$$

д) Преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ не зависит от ν в том смысле, что, если ν и $\tilde{\nu}$ удовлетворяют (2.161) и преобразования ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ и ${}_3\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu, 2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\nu}, 2}$ равенством (2.138), то ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi = {}_3\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ для $\varphi \in \mathfrak{L}_{\tilde{\nu}, 2} \cap \mathfrak{L}_{\nu, 2}$.

е) Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то для $\varphi \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$ преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ задается равенством (2.134).

Теорема 2.7 [20, Теорема 1]. Пусть

$$\theta < 1 + \min[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)]; \operatorname{Re}(c) \geq 0. \quad (2.165)$$

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является инъективным элементом $[\mathfrak{L}_{\nu, 2}, \mathfrak{L}_{k, 2}]$ и при $\operatorname{Re}(s) = k$ его преобразование Меллина имеет вид (2.139).

Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и условие (2.152) имеет место, то преобразование ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимно однозначно отображает $\mathfrak{L}_{\nu, 2}$ на $\mathfrak{L}_{k, 2}$.

б) Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$ и $g \in \mathfrak{L}_{k^*, 2}$, где $k^* = \nu - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, верно равенство:

$$\int_0^\infty f(x) \left({}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c \right) (x) dx = \int_0^\infty \left({}_4I_{\omega, \sigma; \delta}^c f \right) (x) g(x) dx. \quad (2.166)$$

с) Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $\varphi \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$, то почти для всех $x > 0$ справедливо представление

$$\begin{aligned} ({}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= \frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{2, 1} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, a+b, c \\ a, b, -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$, то

$$\begin{aligned} ({}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(x) &= -\frac{1}{\delta} h x^{\sigma+1-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{3, 0} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} a+b, c, -\gamma \\ -\gamma-1, a, b \end{matrix} \right. \right] t^\omega \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.168)$$

д) Преобразование ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ не зависит от v в том смысле, что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют (2.165), и преобразования ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ и ${}_4\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ определены в $\mathcal{L}_{v, 2}$ - и $\mathcal{L}_{\tilde{v}, 2}$ -пространствах равенством (2.139), то ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi = {}_4\tilde{I}_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ для $\varphi \in \mathcal{L}_{\tilde{v}, 2} \cap \mathcal{L}_{v, 2}$.

е) Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то для $\varphi \in \mathcal{L}_{v, 2}$ преобразование ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ задается равенством (2.135).

2.2.4 $\mathcal{L}_{v, r}$ -теория преобразований ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j = 1, 2, 3, 4$)

$\mathcal{L}_{v, r}$ -теория преобразований ${}_jI_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j = 1, 2, 3, 4$) следует из представлений (2.140) – (2.143) с учетом условий (2.144) – (2.152) и утверждений 2.2 и 2.3.

Теорема 2.8 [20, Теорема 2]. Пусть $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\theta > \max[\operatorname{Re}(c - a), \operatorname{Re}(c - b)]$ и $1 < r < \infty$, тогда:

а) Преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{k, r}]$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$, его преобразование Меллина задается формулой (2.136) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

в) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*, r'}$, где $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$ и $r' = r/(r - 1)$, верно равенство (2.154).

г) Если имеет место (2.149), то преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимно-однозначно отображает $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{k, r}$, т. е.

$${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b) (\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{k, r}. \quad (2.169)$$

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$ преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.155) и (2.156) – при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$.

Теорема 2.9 [20, Теорема 3]. Пусть $\operatorname{Re}(c) > 0$, $\theta > \max[\operatorname{Re}(c - a), \operatorname{Re}(c - b)]$ и $1 < r < \infty$.

а) Преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено в $\mathcal{L}_{v, r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{k, s}]$ для всех $s \geq r$, таких что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \operatorname{Re}(c)$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$, его преобразование Меллина задается формулой (2.136) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

с) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*, s}$, $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, $1 < s < \infty$, $1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 + \operatorname{Re}(c)$, верно равенство (2.154).

д) Если условие (2.149) имеет место, то преобразование ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{v, r}) = I_{0+; \delta k, (\beta - \sigma/\delta)/k-1}^c(\mathcal{L}_{k, r}), \quad (2.170)$$

где: $0 < k \leq 1$;

$$\beta = 1 - \max[\operatorname{Re}(c - a), \operatorname{Re}(c - b)].$$

Если (2.149) не выполняется, то ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{k, r})$ является подмножеством правой части (2.170).

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$ интегральное представление ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.155), а также (2.156), при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$. Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.132).

Теорема 2.10 [20, Теорема 2]. Пусть $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\theta > \max[\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a + b)]$ и $1 < r < \infty$, тогда:

а) Преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{k, r}]$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.137) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

с) Для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*, r'}$, где $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$ и $r' = r/(r - 1)$, верно равенство (2.158).

д) Если имеет место (2.150), то преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимнооднозначно отображает $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{k, r}$, т. е.

$${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{k, r}. \quad (2.171)$$

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1-\theta)h-1$ представление ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.159), а также (2.160), при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1-\theta)h-1$.

Теорема 2.11 [20, Теорема 3]. Пусть $\operatorname{Re}(c) > 0$, $\theta > \max[\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a+b)]$ и $1 < r < \infty$, тогда:

а) Преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, определенное на $\mathcal{L}_{v,2}$, может быть продолжено в $\mathcal{L}_{v,r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v,r}; \mathcal{L}_{k,s}]$ для всех $s \geq r$, таких что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \operatorname{Re}(c)$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.137) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

с) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*,s}$, $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, $1 < s < \infty$, $1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 + \operatorname{Re}(c)$, верно равенство (2.158).

д) Если (2.150) имеет место, то преобразование ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v,r}$ и преобразует

$${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{v,r}) = I_{0+; \delta k, (\beta - \sigma/\delta)/k-1}^c(\mathcal{L}_{k,r}), \quad (2.172)$$

где $0 < k \leq 1$;

$$\beta = 1 - \max[\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a+b)].$$

Если (2.150) не выполняется, то ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{k,r})$ является подмножеством правой части (2.172).

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1-\theta)h-1$ интегральное представление ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.159), а также (2.160), при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1-\theta)h-1$. Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.133).

Теорема 2.12 [20, Теорема 2]. Пусть $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\theta < 1 + \min[0, \operatorname{Re}(c-a-b)]$ и $1 < r < \infty$.

а) Преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v,2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v,r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v,r}; \mathcal{L}_{k,r}]$.

b) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.138) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

с) Для функций $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*, r'}$, где $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$ и $r' = r/(r-1)$, верно равенство (2.162).

d) Если имеет место (2.151), то преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ взаимно-однозначно отображает $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{k, r}$, т. е.

$${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{k, r}. \quad (2.173)$$

e) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1-\theta)h-1$ представление ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.163), а также (2.164) при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1-\theta)h-1$.

Теорема 2.13 [20, Теорема 3]. Пусть $\operatorname{Re}(c) > 0$, $\theta < 1 + \min[0, \operatorname{Re}(c-a-b)]$ и $1 < r < \infty$.

a) Преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено в $\mathcal{L}_{v, r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{k, s}]$ для всех $s \geq r$, таких что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \operatorname{Re}(c)$.

b) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.138) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

с) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*, s}$, $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, $1 < s < \infty$, $1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 + \operatorname{Re}(c)$, верно равенство (2.162).

d) Если (2.151) имеет место, то преобразование ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством:

$${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{v, r}) = I_{-, \delta k, (\sigma/\delta - \alpha)/k}^c(\mathcal{L}_{k, r}), \quad (2.174)$$

где: $k \geq 1$;

$$\alpha = -\min[0, \operatorname{Re}(c-a-b)].$$

Если условие (2.151) не выполняется, то ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{k, r})$ является подмножеством правой части (2.174).

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1-\theta)h-1$ интегральное представление ${}_3I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$ дается равенством (2.163), а также (2.164) при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1-\theta)h-1$. Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то ${}_3I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$ дается равенством (2.134).

Теорема 2.14 [20, Теорема 2]. Пусть $\operatorname{Re}(c)=0$, $\theta < 1 + \min[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)]$ и $1 < r < \infty$.

а) Преобразование ${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v,2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v,r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v,r}; \mathcal{L}_{k,r}]$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.139) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

в) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*,r'}$, где $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$ и $r' = r/(r-1)$, верно равенство (2.166).

г) Если имеет место (2.152), то преобразование ${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$ взаимно-однозначно отображает $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{k,r}$, т. е.

$${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)(\mathcal{L}_{v,r}) = \mathcal{L}_{k,r}. \quad (2.175)$$

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1-\theta)h-1$ представление ${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$ дается равенством (2.167), а также (2.168) при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1-\theta)h-1$.

Теорема 2.15 [20, Теорема 3]. Пусть $\operatorname{Re}(c) > 0$, $\theta < 1 + \min[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)]$ и $1 < r < \infty$.

а) Преобразование ${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$, определенное в $\mathcal{L}_{v,2}$, может быть продолжено в $\mathcal{L}_{v,r}$ как элемент $[\mathcal{L}_{v,r}; \mathcal{L}_{k,s}]$ для всех $s \geq r$, таких что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \operatorname{Re}(c)$.

б) Если $1 < r \leq 2$, то преобразование ${}_4I_{\sigma,\omega;\delta}^c(a,b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v,r}$ и его преобразование Меллина задается формулой (2.139) для $\varphi \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $\operatorname{Re}(s) = k$.

в) Для двух функций $f \in \mathcal{L}_{v,r}$ и $g \in \mathcal{L}_{k^*,s}$, $k^* = v - \operatorname{Re}(\sigma) + \operatorname{Re}(\omega)$, $1 < s < \infty$, $1 \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 + \operatorname{Re}(c)$, верно равенство (2.166).

д) Если (2.152) имеет место, то преобразование ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ является биективным на $\mathcal{L}_{v, r}$, и его образ описывается равенством:

$${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{v, r}) = I_{-; \delta k, (\sigma/\delta - \alpha)/k}^c(\mathcal{L}_{k, r}), \quad (2.176)$$

где: $k \geq 1$;

$$\alpha = -\min[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)].$$

Если (2.152) не выполняется, то ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)(\mathcal{L}_{k, r})$ является подмножеством правой части (2.176).

е) Если $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > (1 - \theta)h - 1$ интегральное представление ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.167), а также (2.168) при $\operatorname{Re}(\gamma) < (1 - \theta)h - 1$. Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, то ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ дается равенством (2.135).

2.2.5 Формулы обращения преобразований ${}_jI_{\alpha, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$)

На основании (2.140) – (2.143) и (2.90) параметры (2.96), соответственно для операторов (2.132) – (2.135), следующие:

$$\alpha_0 = \max[0, \operatorname{Re}(c - a - b)], \beta_0 = \infty; \quad (2.177)$$

$$\alpha_0 = \max[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)], \beta_0 = \infty; \quad (2.178)$$

$$\alpha_0 = -\infty, \beta_0 = \min[\operatorname{Re}(c - a), \operatorname{Re}(c - b)] + 1; \quad (2.179)$$

$$\alpha_0 = -\infty, \beta_0 = \min[\operatorname{Re}(a + b), \operatorname{Re}(c)] + 1. \quad (2.180)$$

На основании (2.177), формулы обращения (2.107) и (2.108) для ${}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ -преобразования (2.140) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty G_{3,3}^{2,1} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -c+a, & -c+b \\ 0, & -c+a+b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt, \end{aligned} \quad (2.181)$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -\delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty G_{3,3}^{3,0} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c+a, & -c+b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & 0, & -c+a+b \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Условия справедливости формул (2.181) и (2.182) следуют из утверждения 2.4.

Теорема 2.16 [20, Теорема 4]. Пусть $\theta > \max[0, \operatorname{Re}(c - a - b), \operatorname{Re}(c - a), \operatorname{Re}(c - b)]$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

a) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство (2.181), а при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$ верно равенство (2.182).

b) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (2.181) имеет место при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (2.182) – при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

На основании (2.178), формулы (2.107) и (2.108) для ${}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ -преобразования (2.141) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{2, 1} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -a-b, & -c \\ -a, & -b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt, \end{aligned} \quad (2.183)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{3, 0} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c, & -a-b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & -b, & -a \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Условия справедливости формул (2.183) и (2.184) следуют из утверждения 2.4.

Теорема 2.17 [20, Теорема 5]. Пусть $\theta > \max[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a+b)]$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

a) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство (2.183), а при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$ верно равенство (2.184).

b) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (2.183) имеет место при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (2.184) – при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

На основании (2.179), формулы (2.107) и (2.108) для ${}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ -преобразования (2.142) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \delta h x^{\delta - \omega - \delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3, 3}^{0, 3} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -c+a, & -c+b \\ 0, & -c+a+b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -\delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty G_{3,3}^{1,2} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c+a, & -c+b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & 0, & -c+a+b \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Условия справедливости формул (2.185) и (2.186) следуют из утверждения 2.4.

Теорема 2.18 [20, Теорема 6]. Пусть $\theta < \min[0, \operatorname{Re}(c-a), \operatorname{Re}(c-b), \operatorname{Re}(c-a-b)]+1$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

а) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство (2.185), а при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$ верно равенство (2.186).

б) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (2.185) имеет место при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (2.186) – при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

На основании (2.180), формулы (2.107) и (2.108) для ${}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$ -преобразования (2.143) принимают вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty G_{3,3}^{0,3} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -\gamma, & -a-b, & -c \\ -a, & -b, & -\gamma-1 \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -\delta h x^{\delta-\omega-\delta(\gamma+1)/h} \frac{d}{dx} x^{\delta(\gamma+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty G_{3,3}^{1,2} \left[x^\delta t^\delta \left| \begin{matrix} -c, & -a-b, & -\gamma \\ -\gamma-1, & -b, & -a \end{matrix} \right. \right] t^{\delta-\sigma-1} ({}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi)(t) dt. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Условия справедливости формул (2.187) и (2.188) следуют из утверждения 2.4.

Теорема 2.19 [20, Теорема 7]. Пусть $\theta < \min[\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(a+b), \operatorname{Re}(c)]+1$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

а) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$ верно равенство (2.187), а при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$ верно равенство (2.188).

б) Если $\operatorname{Re}(c) = 0$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (2.187) имеет место при $\operatorname{Re}(\gamma) > \theta h - 1$, а формула (2.188) – при $\operatorname{Re}(\gamma) < \theta h - 1$.

2.3 Решение интегральных уравнений ${}_jI_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1,2,3,4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в $\mathcal{L}_{v,r}$ -пространствах

В данном разделе дано решение интегральных уравнений ${}_jI^c(a, b)\varphi = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в $\mathcal{L}_{v,r}$ -пространствах.

2.3.1 Теоремы о действии операторов ${}_jI^c(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{v,r}$ -пространствах

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.5 [13, Лемма 4]. Пусть $\psi(x) \in \mathcal{L}_{v,r}$, $1 < r < \infty$, $v < 1 + \min(\mu, \operatorname{Re}(\alpha), 0)$, $\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \dots$, и $I_{0+}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r})$ дается (2.49). Тогда, для того чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, где $f(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r})$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $x^\mu I_{0+}^\alpha g(x)$, где $g(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r})$, или в виде $\psi(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^\alpha x^\varepsilon g_1(x)$, где $g_1(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{v,r})$. Из указанных классов функций операторы $I_{0+}^\alpha x^\mu$, $x^\mu I_{0+}^\alpha$ и $x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^\alpha x^\varepsilon$ при $v < 1 + \min(\mu, \operatorname{Re}(\alpha), 0)$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, $1 < r < \infty$, ограничено действуют на пространство $\mathcal{L}_{v-\mu-\alpha, r}$.

Доказательство. Случай $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Часть I. Необходимость.

Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, $f(x) \in \mathcal{L}_{v,r}$, $1 < r < \infty$. Покажем, что существует функция $g(x) \in \mathcal{L}_{v,r}$, для которой выполняется соотношение

$$I_{0+}^\alpha x^\mu f(x) = x^\mu I_{0+}^\alpha g(x). \quad (2.189)$$

В качестве такой функции возьмем функцию, получаемую из (2.189) применением к обеим частям (2.189) оператора $I_{0+}^{-\alpha} x^{-\mu}$,

$$\begin{aligned} I_{0+}^{-\alpha} x^{-\mu} I_{0+}^\alpha x^\mu f(x) &= I_{0+}^{-\alpha} x^{-\mu} x^\mu I_{0+}^\alpha g(x), \\ g(x) &= I_{0+}^{-\alpha} x^{-\mu} I_{0+}^\alpha x^\mu f(x). \end{aligned} \quad (2.190)$$

Запишем функцию $g(x)$ в виде $g(x) = \frac{d}{dx}(xX(x))$,

$$\text{где} \quad X(x) = (Xf)(x) = \left(x^{-1}I_{0+}^{1-\alpha}x^\alpha\right)\left(x^{-\mu-\alpha}I_{0+}^\alpha x^\mu\right)f(x). \quad (2.191)$$

Применяем дважды к операторам в правой части (2.191) теорему 2.3, получаем, что оператор $X(x)$ ограниченно действует из пространства $\mathfrak{L}_{\nu, r}$ в $\mathfrak{L}_{\nu, r}$ при выполнении условий $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $\nu < 1 + \min(\mu, \operatorname{Re} \alpha, 0)$, $1 < r < \infty$.

Значит, если $f(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, то и функция $X(x) = x^{-1}I_{0+}^1 g(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$. В случае $1 < r < \infty$ отсюда (см. также лемму 2.2) вытекает, что $g(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, если $f(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$.

Достаточность. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде

$$\psi(x) = x^\mu I_{0+}^\alpha g(x), \quad g(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}, \quad 1 < r < \infty.$$

Покажем, что существует функция $f(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, которая удовлетворяет уравнению (2.189). Сопоставив (2.189) с (2.51), видим, что функции f соответствует $\varphi + A_2\varphi$, а g соответствует φ . Для того, чтобы $f = \varphi + A_2\varphi \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, в силу леммы 2.2 достаточно, чтобы $g \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, 0)$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$.

Таким образом, если $g = \varphi \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, то $f \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$.

С л у ч а й $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. Часть II. *Необходимость.*

Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, $f(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, \operatorname{Re} \alpha, 0)$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$. Тогда в силу доказанной выше необходимости существует функция $g(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, для которой выполняется равенство (2.189). Для функции $g(x)$, в силу доказанной выше достаточности, существует другая функция $g_1(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, которая удовлетворяет аналогичному (2.189) соотношению $x^\varepsilon I_{0+}^\alpha g(x) = I_{0+}^\alpha x^\varepsilon g_1(x)$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\varepsilon, \alpha, 0)$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$. Исключив из этих равенств $I_{0+}^\alpha g(x)$, получим формулу

$$I_{0+}^\alpha x^\mu f(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^\alpha x^\varepsilon g_1(x), \quad (2.192)$$

аналогичную (2.189), из которой следует представление функции ψ в виде $\psi(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^\alpha x^\varepsilon g_1(x)$, $g_1(x) \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, \varepsilon, \operatorname{Re} \alpha, 0)$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$.

Достаточность доказывается аналогично (или из необходимости, путем замены ε на μ , g_1 на f).

С л у ч а й $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$. Часть I. *Необходимость*.

Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x)$, $f(x) \in I_{0+}^{-\alpha}(\mathcal{L}_{v,r})$. Это означает, что $f(x) = I_{0+}^{-\alpha} f_1^*(x)$ и $\psi(x) = I_{0+}^{\alpha} x^{\mu} I_{0+}^{-\alpha} f_1^*(x)$, где $f_1^*(x) \in \mathcal{L}_{v,r}$. Поскольку $v < 1 + \min(\mu, \varepsilon, \operatorname{Re} \alpha, 0)$ и $f_1^*(x) \in \mathcal{L}_{v,r}$, а $-\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, то с помощью доказанной достаточности (I часть) и свойства $I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha} = E$ придем к соотношениям

$$\begin{aligned}\psi(x) &= I_{0+}^{\alpha} \left(x^{\mu} I_{0+}^{-\alpha} f_1^* \right) = I_{0+}^{\alpha} \left(I_{0+}^{-\alpha} x^{\mu} f_2 \right) = x^{\mu} f_2 = \\ &= x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} \left(I_{0+}^{-\alpha} f_2 \right) = x^{\mu} I_{0+}^{\alpha} g, \quad f_2 \in \mathcal{L}_{v,r},\end{aligned}$$

где $g = I_{0+}^{-\alpha} f_2 \in I_{0+}^{-\alpha}(\mathcal{L}_{v,r})$.

Достаточность в этом случае доказывается обратным ходом рассуждений по отношению к последним равенствам.

С л у ч а й $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$. Часть II. Доказательство проводится таким же образом, как и в случае $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ (II часть).

Последнее из утверждений леммы 2.5 вытекает из предыдущих и теоремы 2.3. Лемма доказана.

Рассмотрим четыре интегральных преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса (2.26) в ядре:

$${}_1I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau \quad (x > 0); \quad (2.193)$$

$${}_2I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{\tau}{x}\right) \varphi(\tau) d\tau \quad (x > 0); \quad (2.194)$$

$${}_3I_-^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_x^{\infty} \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau \quad (x > 0); \quad (2.195)$$

$${}_4I_-^c(a, b)\varphi(x) \equiv \int_x^{\infty} \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{\tau}{x}\right) \varphi(\tau) d\tau \quad (x > 0). \quad (2.196)$$

В [34; 99, §10.1] были получены следующие композиционные разложения для этих операторов в пространствах $L_p(\mathbb{Q}, d)$, $0 < d < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$:

$${}_1I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = I_{0+}^{c-b}x^{-a}I_{0+}^bx^a\varphi(x); \quad (2.197)$$

$${}_1I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = x^{c-a-b}I_{0+}^bx^{a-c}I_{0+}^{c-b}x^b\varphi(x); \quad (2.198)$$

$${}_2I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = x^aI_{0+}^bx^{-a}I_{0+}^{c-b}\varphi(x); \quad (2.199)$$

$${}_2I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = x^bI_{0+}^{c-b}x^{a-c}I_{0+}^bx^{c-a-b}\varphi(x); \quad (2.200)$$

$${}_3I_{-}^c(a, b)\varphi(x) = x^{c-a-b}I_{-}^bx^{a-c}I_{-}^{c-b}x^b\varphi(x); \quad (2.201)$$

$${}_3I_{-}^c(a, b)\varphi(x) = I_{-}^{c-b}x^{-a}I_{-}^bx^a\varphi(x); \quad (2.202)$$

$${}_4I_{-}^c(a, b)\varphi(x) = x^aI_{-}^bx^{-a}I_{-}^{c-b}\varphi(x); \quad (2.203)$$

$${}_4I_{-}^c(a, b)\varphi(x) = x^bI_{-}^{c-b}x^{a-c}I_{-}^bx^{c-a-b}\varphi(x). \quad (2.204)$$

Ограниченность операторов (2.193) – (2.196) и справедливость представлений (2.197) – (2.204) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{v,r}$, $1 < r < +\infty$, устанавливает следующая теорема 2.20.

Теорема 2.20 [12, Теорема 1; 13, Теорема 1]. Пусть $c, a, b, v \in \mathbb{R}$, $1 < r < \infty$, $c > b > 0$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $c, b \notin \mathbb{N}$ и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 2.1. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем имеют место равенства E_j (см. Таблица 2.1).

Таблица 2.1. – Действие операторов ${}_jI_{0+}^c(a, b)\varphi$ ($j = 1, 2$) из $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{v-c,r}$

J	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$v < \min(0, a, b, c - b) + 1$	${}_1I_{0+}^c(a, b)$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v-c,r}$	(2.197), (2.198)
2	$v < \min(0, b, c - b, c - a - b) + 1$	${}_2I_{0+}^c(a, b)$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v-c,r}$	(2.199), (2.200)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим первый случай таблицы 2.1. Покажем, что ${}_1I_{0+}^c$ ограниченно действует из $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{v-c,r}$, т.е. выполняется условие $\|{}_1I_{0+}^c\varphi\|_{\mathcal{L}_{v-c,r}} \leq k\|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v,r}}$, где $k > 0$ – некоторая постоянная.

Положим

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{t}\right), & x > t, \\ 0, & x < t \end{cases}$$

где $K(x, t)$ – однородное ядро степени $(c-1)$, то есть выполняется $K(\lambda x, \lambda t) = \lambda^{c-1} K(x, t)$, $(\lambda > 0)$.

Осуществляя замену $t = x\tau$ и используя однородность ядра, имеем:

$$({}_1I_{0+}^c \varphi)(x) \equiv \int_0^\infty K(x, t) \varphi(t) dt = \int_0^\infty K(x, x\tau) \varphi(x\tau) x d\tau = x^c \int_0^1 K(1, t) \varphi(xt) dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (2.7), находим:

$$\begin{aligned} \|K\varphi\|_{\mathcal{L}_{v-c, r}} &= \left(\int_0^\infty x^{vr-cr-1} \left| \int_0^1 K(1, t) \varphi(xt) x^c dt \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq \int_0^1 |K(1, t)| dt \left(\int_0^\infty x^{vr-cr-1} x^{cr} |\varphi(xt)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = \left[x = \frac{\tau}{t} \right] = \\ &= \int_0^1 |K(1, t)| dt \left(\int_0^\infty \frac{\tau^{vr-1}}{t^{vr-1}} |\varphi(\tau)|^r \frac{d\tau}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = \\ &= \int_0^1 |K(1, t)| t^{-v} dt \left(\int_0^\infty \tau^{vr-1} |\varphi(\tau)|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} = k \|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v, r}}, \end{aligned}$$

$$\text{здесь} \quad k = \int_0^1 |K(1, t)| t^{-v} dt. \quad (2.205)$$

Непосредственно проверяется, что несобственный интеграл (2.205) сходится при $v < \min(a, b) + 1$, $c > 0$.

Таким образом,

$$\|{}_1I_{0+}^c(a, b)\varphi\|_{\mathcal{L}_{v-c, r}} \leq k \|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v, r}} \quad (2.206)$$

при выполнении условий $a - b \notin \mathbb{Z}$, $v < \min(a, b) + 1$, $c > b > 0$.

Рассмотрим далее преобразование $I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi$, $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$:

$$\|x^a \varphi\|_{\mathcal{L}_{v-a, r}} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v, r}}. \quad (2.207)$$

На основании леммы 2.5 оператор $I_{0+}^b x^a$ ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{v, r}$ на $\mathcal{L}_{v-a-b, r}$:

$$\begin{aligned} \|I_{0+}^b x^a \varphi\|_{\mathcal{L}_{v-a-b, r}} &= \left(\int_0^\infty x^{vr-ar-br-1} \left| \left(I_{0+}^b x^a \varphi(x) \right) \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq k_1 \left(\int_0^\infty x^{vr-ar-1} \left| x^a \varphi(x) \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = k_1 \|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v, r}} \end{aligned} \quad (2.208)$$

при выполнении условий $v < 1 + \min(a, b, 0)$, $b > 0$, $b \neq 1, 2, 3, \dots$, $1 < r < \infty$, а также $I_{0+}^b x^a \varphi = x^a I_{0+}^b \varphi_1$, $\varphi_1 \in \mathcal{L}_{v, r}$.

На основании этого имеем $I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi = I_{0+}^{c-b} x^{-a} x^a I_{0+}^b \varphi_1 = I_{0+}^{c-b} x^{-a} \varphi_2$, $\varphi_2 \in \mathcal{L}_{v-a-b, r}$. По лемме 2.5 оператор $I_{0+}^{c-b} x^{-a}$ ограниченно действует из $\mathcal{L}_{v-a-b, r}$ на $\mathcal{L}_{v-c, r}$:

$$\|I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi\|_{\mathcal{L}_{v-c, r}} \leq k_2 \|x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi\|_{\mathcal{L}_{v-b, r}} \quad (2.209)$$

при выполнении $v < 1 + \min(b, a+c, a+b)$, $c-b > 0$, $c-b \neq 1, 2, 3, \dots$, $1 < r < \infty$.

Таким образом, из (2.207) – (2.209) следует, что оператор $I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a$ ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{v, r}$ на пространство $\mathcal{L}_{v-c, r}$ при выполнении условий: $v < \min(0, a, b, c-b) + 1$; $1 < r < \infty$; $c, b \notin \mathbb{N}$.

Аналогично, оператор $x^{c-a-b} I_{0+}^b x^{a-c} I_{0+}^{c-b} x^b$ ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{v, r}$ на пространство $\mathcal{L}_{v-c, r}$ при выполнении условий: $v < \min(0, a, b, c-b) + 1$; $c > b > 0$; $1 < r < \infty$; $c, b \notin \mathbb{N}$.

Это завершает доказательство теоремы 2.20 в первом случае.

Аналогично доказывается второй случай теоремы 2.20.

На основании формулы [34; 99, (10.14)]:

$$x^\beta I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x) = y^{1-\alpha} I_{-}^{\alpha-\beta} y^{\beta-1} \varphi(y), \quad xy = 1, \quad f(x) = \varphi(y),$$

после замен x на $1/x$, $\psi(x)$ на $x^{\alpha-1} \psi(1/x)$, $f(x)$ на $x^{-\alpha-1} f(1/x)$ и $g(x)$ на $x^{-\alpha-1} g(1/x)$ лемма 2.5 переходит в следующее утверждение.

Лемма 2.6 [13, Лемма 5]. Пусть $\psi(x) \in \mathcal{L}_{1-\nu-\alpha, r}$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, \operatorname{Re}(\alpha), \varepsilon, 0)$, $\alpha \neq 0, 1, 2, 3 \dots$ и пусть $I_-^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{\nu, r})$ дается формулами (2.49). Тогда для того, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = I_-^\alpha x^{-\mu} f(x)$, где $f(x) \in I_-^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{1-\nu+\tilde{\alpha}, r})$, $\tilde{\alpha} = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \alpha \cdot \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = x^{-\mu} I_-^\alpha g(x)$, где $g(x) \in I_-^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{1-\nu+\tilde{\alpha}, r})$, или в виде $\psi(x) = x^{\varepsilon-\mu} I_-^\alpha x^{-\varepsilon} g_1(x)$, где $g_1(x) \in I_-^{m(\alpha)}(\mathcal{L}_{1-\nu+\tilde{\alpha}, r})$.

Ограниченность операторов (2.195) – (2.196) и справедливость представлений (2.201) – (2.204) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < +\infty$, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.21 [12, Теорема 1; 13, Теорема 2]. Пусть $c, a, b, \nu \in \mathbb{R}$, $1 < r < \infty$, $c > b > 0$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $c, b \notin \mathbb{N}$ и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 2.2. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем имеют место равенства E_j .

Таблица 2.2. – Действие операторов ${}_j I_-^c(a, b)$ ($j = 3, 4$) из $\mathcal{L}_{\nu, r}$ на $\mathcal{L}_{\nu-c, r}$

J	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\nu > \max(c, c-b, b, a+b)$	${}_3 I_-^c(a, b)$	$\mathcal{L}_{\nu, r}$	$\mathcal{L}_{\nu-c, r}$	(2.201), (2.202)
2	$\nu > \max(c, c-a, c-b, b)$	${}_4 I_-^c(a, b)$	$\mathcal{L}_{\nu, r}$	$\mathcal{L}_{\nu=c, r}$	(2.203), (2.204)

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.20 с использованием леммы 2.6.

2.3.2 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{0+}^c(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах

Как показывают формулы (2.197) – (2.204), интегралы ${}_j I_{0+}^c(a, b)\varphi \in \mathcal{L}_{\nu-c, r}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) представимы в виде композиций двух односторонних дробных интегралов со степенными весами. Условия такой представимости в весовых пространствах суммируемых функций на полуоси отражают теорема 2.20 и теорема 2.21, из которых следует, что если $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$ (или некоторому его подпространству), то при соответствующих условиях операторы ${}_j I_{0+}^c(a, b)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) действуют на определенное подпространство из $\mathcal{L}_{\eta, r}$, $1 < r < \infty$, и справедливы те или

иные из формул (2.197) – (2.204). Это означает, что если правая часть – функция $g(x)$ – берется из указанной области, на которую действует оператор ${}_jI_{0+}^c(a, b)$ ($j=1, 2, 3, 4$), то соответствующее уравнение ${}_jI_{0+}^c(a, b)\varphi = g$ ($j=1, 2, 3, 4$) однозначно разрешимо путем последовательного обращения двух интегродифференциальных операторов, композиция которых составляет ${}_jI_{0+}^c(a, b)\varphi$ ($j=1, 2, 3, 4$).

Осуществляя такие обращения, из формул (2.197) – (2.204) получим следующие представления решений уравнений (1.11) – (1.14) [34; 99, §35]:

$$\varphi(x) = x^{-a}I_{0+}^{-b}x^aI_{0+}^{b-c}g(x); \quad (2.210)$$

$$\varphi(x) = x^{-b}I_{0+}^{b-c}x^{c-a}I_{0+}^{-b}x^{a+b-c}g(x); \quad (2.211)$$

$$\varphi(x) = I_{0+}^{b-c}x^aI_{0+}^{-b}x^{-a}g(x); \quad (2.212)$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c}I_{0+}^{-b}x^{c-a}I_{0+}^{b-c}x^{-b}g(x); \quad (2.213)$$

$$\varphi(x) = x^{-b}I_{-}^{b-c}x^{c-a}I_{-}^{-b}x^{a+b-c}g(x); \quad (2.214)$$

$$\varphi(x) = x^{-a}I_{-}^{-b}x^aI_{-}^{b-c}g(x); \quad (2.215)$$

$$\varphi(x) = I_{-}^{b-c}x^aI_{-}^{-b}x^{-a}g(x); \quad (2.216)$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c}I_{-}^{-b}x^{c-a}I_{-}^{b-c}x^{-b}g(x). \quad (2.217)$$

Тогда из теорем 2.20 и 2.21 вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.22 [12, Утверждение 1; 13, Теорема 5]. Пусть $c, a, b, v \in \mathbb{R}$; $c > b > 0$; $c, b \notin \mathbb{N}$; $a - b \notin \mathbb{Z}$; $v < \min(0, a, b, c - b) + 1$; $1 < r < \infty$; $g(x) \in \mathcal{L}_{v-c, r}$. Уравнение (1.11) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, выражаемое формулами (2.210) или (2.211).

Теорема 2.23 [12, Утверждение 2]. Пусть $c, a, b, v \in \mathbb{R}$, $c > b > 0$, $1 < r < \infty$, $v < \min(0, b, c - b, c - a - b) + 1$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $g(x) \in \mathcal{L}_{v-c, r}$. Уравнение (1.12) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, выражаемое формулами (2.212) или (2.213).

Теорема 2.24 [12, Утверждение 3]. Пусть $c, a, b, v \in \mathbb{R}$, $c > b > 0$, $1 < r < \infty$, $v > \max(c, c - b, b, a + b)$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $g(x) \in \mathcal{L}_{v-c, r}$. Уравнение (1.13) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, выражаемое формулами (2.214) или (2.215).

Теорема 2.25 [12, Утверждение 4; 13, Теорема 6]. Пусть $c, a, b, v \in \mathbb{R}$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $v > \max(c, c - a, c - b, b)$, $1 < r < \infty$, $g(x) \in \mathcal{L}_{v-c, r}$. Уравнение (1.14) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, выражаемое формулами (2.216) или (2.217).

Примеры решений уравнений (1.11) – (1.14) приведены в приложении А.

2.4 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах

Данный раздел посвящен решению интегральных уравнений (1.3) – (1.6) с гипергеометрической функцией Гаусса в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах.

2.4.1 Теорема о действии операторов ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах

Пусть $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

Рассмотрим четыре интегральных преобразования, содержащих гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ в ядрах:

$${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) \equiv x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0); \quad (2.218)$$

$${}_2 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) \equiv x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0); \quad (2.219)$$

$${}_3 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) \equiv x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0); \quad (2.220)$$

$${}_4 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) \equiv x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt \quad (x > 0). \quad (2.221)$$

Преобразования ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi$, $j=1, 2, 3, 4$, могут быть представлены как композиции преобразований ${}_j I_{0+}^c(a, b)$, $j=1, 2, 3, 4$, и элементарных операторов M_ξ и N_a , определенных в (2.13) и (2.15). Действительно:

$$\begin{aligned} {}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) &= x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2 F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t) dt = \\ &= \left[t^\delta = \tau, t = \tau^{\frac{1}{\delta}}, dt = \frac{1}{\delta} \tau^{\frac{1}{\delta}-1} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\delta} x^\sigma \int_0^{x^\delta} \frac{(x^\delta - \tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2 F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{\tau}\right) \tau^{\frac{\omega+1}{\delta}-1} \varphi(\tau^{\frac{1}{\delta}}) d\tau = \\ &= x^\sigma \left({}_1 I_{0+}^c(a, b) \left(\frac{1}{\delta} M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_{\frac{1}{\delta}} \varphi \right) (t) \right) (x^\delta) = \frac{1}{\delta} M_\sigma N_{\delta 1} {}_1 I_{0+}^c(a, b) M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_{\frac{1}{\delta}} \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta} M_\sigma N_{\delta 1} {}_1 I_{0+}^c(a, b) M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_{\frac{1}{\delta}} \varphi. \quad (2.222)$$

Аналогично получаем следующие представления:

$${}_2 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta} M_\sigma N_{\delta 2} {}_2 I_{0+}^c(a, b) M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_{\frac{1}{\delta}} \varphi; \quad (2.223)$$

$${}_3 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta} M_\sigma N_{\delta 3} {}_3 I_{-}^c(a, b) M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_{\frac{1}{\delta}} \varphi; \quad (2.224)$$

$${}_4 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta} M_\sigma N_{\delta 4} {}_4 I_{-}^c(a, b) M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_{\frac{1}{\delta}} \varphi, \quad (2.225)$$

где ${}_j I_{0+}^c(a, b)$ ($j=1, 2, 3, 4$) – операторы, представимые в виде (2.197) – (2.204).

Ограниченность операторов ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)$, $j=1, 2, 3, 4$, (2.218) – (2.221) и справедливость представлений (2.222) – (2.225) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{v, r}$, $1 < r < +\infty$, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.26 [13, Теоремы 3 и 4]. Пусть $c, a, b, v, \omega, \sigma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $1 < r < \infty$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$ и выполняются какие-либо из

условий A_j таблицы 2.3. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем имеют место равенства E_j .

Таблица 2.3. – Действие операторов ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)$, $j=1, 2, 3, 4$, из пространства $\mathcal{L}_{v, r}$ на пространство $\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}$

J	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$v < \delta \min(0, a, b, c-b) + \omega + 1$	${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathcal{L}_{v, r}$	$\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}$	(2.222)
2	$v < \delta \min(0, b, c-b, c-a-b) + \omega + 1$	${}_2 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathcal{L}_{v, r}$	$\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}$	(2.223)
3	$v > \delta \max(c, c-b, b, a+b) - \omega$	${}_3 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathcal{L}_{v, r}$	$\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}$	(2.224)
4	$v > \delta \max(c, c-a, c-b, b) - \omega$	${}_4 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathcal{L}_{v, r}$	$\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}$	(2.225)

Доказательство теоремы 2.26, аналогичное доказательству теоремы 2.20, приведено в приложении Б.

2.4.2 Решение интегральных уравнений ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi(x) = g(x)$ ($j=1, 2, 3, 4$) в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах

На основании леммы 2.1, теоремы 2.26, представлений (2.210) – (2.217) получаем следующие представления решений уравнений (1.3) – (1.6):

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a} I_{0+}^{-b} M_a I_{0+}^{b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.226)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b} I_{0+}^{b-c} M_{c-a} I_{0+}^{-b} M_{a+b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.227)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} I_{0+}^{b-c} M_a I_{0+}^{-b} M_{-a} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.228)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c} I_{0+}^{-b} M_{c-a} I_{0+}^{b-c} M_{-b} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.229)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b} I_{-}^{b-c} M_{c-a} I_{-}^{-b} M_{a+b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.230)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a} I_{-}^{-b} M_a I_{-}^{b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.231)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} I_{-}^{b-c} M_a I_{-}^{-b} M_{-a} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x); \quad (2.232)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c} I_{-}^{-b} M_{c-a} I_{-}^{b-c} M_{-b} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} g(x). \quad (2.233)$$

Справедливы следующие утверждения, вытекающие из теоремы 2.26 и леммы 2.1.

Теорема 2.27 [13, Теорема 7]. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $1 < r < \infty$, $\nu < \delta \min(0, a, b, c - b) + \omega + 1$, $g(x) \in \mathcal{L}_{\nu - \omega - \sigma - \delta(c-1) - 1, r}$. Уравнение (1.3) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, выражаемое формулами (2.226) или (2.227).

Теорема 2.28 [13]. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $1 < r < \infty$, $\nu < \delta \min(0, b, c - b, c - a - b) + \omega + 1$, $g(x) \in \mathcal{L}_{\nu - \omega - \sigma - \delta(c-1) - 1, r}$. Уравнение (1.4) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, выражаемое формулами (2.228) или (2.229).

Теорема 2.29 [13]. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $1 < r < \infty$, $\nu > \delta \max(c, c - b, b, a + b) - \omega$, $g(x) \in \mathcal{L}_{\nu - \omega - \sigma - \delta(c-1) - 1, r}$. Уравнение (1.5) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, выражаемое формулами (2.230) или (2.231).

Теорема 2.30 [13, Теорема 8]. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, $1 < r < \infty$, $\nu > \delta \max(c, c - a, c - b, b) - \omega$, $g(x) \in \mathcal{L}_{\nu - \omega - \sigma - \delta(c-1) - 1, r}$. Уравнение (1.6) имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, выражаемое формулами (2.232) или (2.233).

Примеры решений уравнений (1.3) – (1.6) приведены в приложении В. В приложениях З и И изучены функциональные свойства отдельных классов одномерных интегральных преобразований с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах в пространствах суммируемых функций на конечном отрезке действительной оси. Рассмотрены также три соответствующих интегральных уравнения первого рода с такими функциями в ядрах. Установлены формулы решения исследуемых уравнений в замкнутой форме, даны условия их разрешимости в пространстве суммируемых функций.

В приложении К аналогичные результаты получены для двумерного интегрального преобразования с функцией Куммера в ядре и соответствующего двумерного интегрального уравнения первого рода.

2.5 Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области

В этом разделе получено решение в замкнутой форме многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области; доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций.

Рассматриваемое нами интегральное уравнение типа Абеля имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad (2.234)$$

где: $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ и $F \left[\alpha, \beta; \gamma; A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) / A \cdot (\mathbf{x}^\sigma) \right]$ – функция вида (2.67).

Уравнение (2.234) обобщает многомерное уравнение типа Абеля [34; 99, §28.4], получающееся из (2.234) при $\sigma = 1, r = 0$ в случаях $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. При $\sigma = 1$ уравнение (2.234) является модификацией уравнения, рассмотренного в [33], [107].

Сначала дадим формальное решение уравнения (2.234).

Умножая обе части уравнения (2.234) на $(A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}$, представим его в виде:

$$\frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_1(\mathbf{x}),$$

$$x \in A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}), \quad f_1(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} f(\mathbf{x}). \quad (2.235)$$

Заменяя $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} F \left[-\alpha, 1 + \beta - \gamma; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\sigma^1 = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} \cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})$ и изменяя порядок интегрирования согласно формуле (2.69), имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\gamma-1} \times \\
& \times F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma} \right] F \left[-\alpha, 1+\beta-\gamma; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \times \\
& \times (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\
& = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} F \left[-\alpha, 1+\beta-\gamma; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \times \\
& \times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} f_1(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned} \tag{2.236}$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x} \}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в (2.236) введем новые переменные

$$s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}, \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) (j=1, \dots, n).$$

Используя соотношения $1 - s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} (j=1, \dots, n)$ и формулу (2.32),

для внутреннего интеграла в (2.236) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma} \right] \times \\
& \times F \left[-\alpha, 1+\beta-\gamma; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\
& = (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 s_j^{-\gamma_j} (1-s_j)^{\gamma_j-1} \left[1 - s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right]^{-\alpha_j \sigma_j + \sigma_j - 1} \times \right. \\
& \times F \left\{ \alpha_j, \beta_j; \gamma_j; \left[(1-s_j) \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right] / \left[1 - s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right] \right\} \times \\
& \times F \left\{ -\alpha_j, 1+\beta_j-\gamma_j; 1-\gamma_j; s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right\} ds_j \Bigg\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma) (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} F\left\{0, 1+\beta-\gamma; 1+2\gamma; \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)}\right\} = \\
&= \Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma) (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}.
\end{aligned}$$

На основании этого равенство (2.236) принимает вид:

$$\int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}), \quad (2.237)$$

$$\begin{aligned}
f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) &= \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma-\sigma+1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\gamma} \times \\
&\times F\left[-\alpha, 1+\beta-\gamma; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.
\end{aligned} \quad (2.238)$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \quad (2.239)$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathbb{R}^n;$

$\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (2.237) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = g(\mathbf{y}), \quad (2.240)$$

где $E_1(\mathbf{x})$ – модельная пирамида (2.66),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = \varphi\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right), \quad g(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (2.240) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1+\dots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+\dots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2+\dots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 = g(\mathbf{y}). \quad (2.241)$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} g(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.242)$$

где $\tilde{a}_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, n$) – элементы обратной матрицы A^{-1} , приходим к следующей формуле решения уравнения (2.234):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) = & \sigma^1 \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} \times \right. \\ & \times F \left[-\alpha, 1 + \beta - \gamma; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \mathbf{t}^{\sigma - 1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \Big\}. \end{aligned} \quad (2.243)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (2.234) разрешимо, то его решение имеет вид (2.243).

Найдем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (2.236) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$, определенном в (2.79). Пусть $I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1)$ – пространство (2.78).

На основании формулы (2.240) доказывается следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a, b)$.

Теорема 2.31 [18, Теорема 1]. *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (2.234) с $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \gamma < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\begin{aligned} f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = & \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} \times \\ & \times F \left[-\alpha, 1 + \beta - \gamma; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma - 1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1); \end{aligned} \quad (2.244)$$

$$\begin{aligned}
[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x})]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} &= \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \\
&= \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0.
\end{aligned} \tag{2.245}$$

При выполнении этих условий уравнение (2.234) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой (2.243).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В модельном случае $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (2.240), (2.241). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})$ оно получается из (2.240), (2.241) после замены переменных (2.239) с учетом (2.242).

Пример решения уравнения (1.22) приведен в приложении Г.

Следствие 2.1 [18, Следствие 1]. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{x}^\sigma} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \tag{2.246}$$

с $\alpha, \beta, \sigma, \gamma \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \gamma < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ тогда и только тогда, если

$$\begin{aligned}
f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{x}^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \\
&\times F \left[-\alpha, 1 + \beta - \gamma; 1 - \gamma; \frac{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{x}^\sigma} \right] \mathbf{t}^{-\alpha\sigma + 2\sigma - 2} \sigma^1 f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1}(L_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x})]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = \dots = \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = 0.
\end{aligned}$$

При выполнении этих условий уравнение (2.246) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \sigma^1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\mathbf{x}^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \right. \\ \left. \times F \left[-\alpha, 1 + \beta - \gamma; 1 - \gamma; \frac{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{x}^\sigma} \right] \mathbf{t}^{-\alpha\sigma + 2\sigma - 2} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}.$$

Замечание 2.1. При $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1$ теорема 2.31 и следствие 2.1 сводятся к результатам, полученным в [81, теорема 1 и следствие] (см. также случай $r = 0$ в [34; 99, теорема 26.7 и следствие]).

В приложениях Ж, Л и М получены аналогичные результаты для трех классов многомерных интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса, функцией Куммера и функцией Бесселя – Клиффорда, соответственно.

Выводы по главе 2

В данной главе приведены известные сведения из теории функциональных пространств, теории специальных функций, теории дробного интегро-дифференцирования, теории обобщенных $\mathbf{G}$ -преобразований и модифицированных $\mathbf{H}$ -преобразований.

Построены $\mathcal{L}_{v, 2}$ - и $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории для интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса первого рода в ядрах. Дана корректная постановка задачи разрешимости уравнений с функцией Гаусса в пространствах $\mathcal{L}_{v, r}$ и выведены формулы их обращения.

Дано решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области в замкнутой форме; получены необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций.

Основные результаты опубликованы в [12 – 14; 16; 18; 20; 37 – 39].

ГЛАВА 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИЕЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО РОДА В ЯДРАХ

Настоящая глава посвящена исследованию интегральных преобразований и уравнений, содержащих в ядрах функцию Лежандра первого рода.

3.1 $\mathcal{L}_{v, 2^-}$, $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории преобразований $P_{\delta, j}^\gamma f$ ($j = 1, 2, 3, 4$)

В этом разделе построены $\mathcal{L}_{v, 2^-}$ - и $\mathcal{L}_{v, r}$ -теории интегральных преобразований $P_{\delta, j}^\gamma f$ ($j = 1, 2, 3, 4$) с функцией Лежандра первого рода в ядрах, установлены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов этих преобразований из одних пространств $\mathcal{L}_{v, r}$ в другие, выведены различные интегральные представления, даны описания образов этих операторов, а также доказаны формулы обращения.

3.1.1 Представления преобразований $P_{\delta, j}^\gamma f$ ($j = 1, 2, 3, 4$) в виде модифицированных Н-преобразований

Рассмотрим интегральные преобразования:

$$\left(P_{\delta, 1}^\gamma f\right)(x) = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.1)$$

$$\left(P_{\delta, 2}^\gamma f\right)(x) = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.2)$$

$$\left(P_{\delta, 3}^\gamma f\right)(x) = \int_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.3)$$

$$\left(P_{\delta, 4}^\gamma f\right)(x) = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.4)$$

содержащие в ядрах функцию Лежандра первого рода $P_\delta^\gamma(z)$, $\text{Re}(\gamma) < 1$, определяемую (2.36).

Данный подраздел посвящен изучению преобразований $(P_{\delta, j}^\gamma f)(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{v, r}$ ($1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}$), определяемых (2.12).

В частности, все полученные результаты верны для классических пространств r -суммируемых функций $L_r(\mathbf{R}_+) = \mathfrak{L}_{1/r, r}$ ($1 \leq r < \infty$).

Исследования основаны на представлении (3.1) – (3.4) в виде модифицированного **H**-преобразования вида (2.112).

Применяются результаты из [76, гл. 5.5] для доказательства ограниченности и взаимной однозначности операторов $P_{\delta, k}^\gamma$ ($k=1, 2, 3, 4$) преобразований (3.1) – (3.4) из одних пространств $\mathfrak{L}_{v, r}$ в другие, вывода различных интегральных представлений и описания образов этих операторов, а также установления их формул обращения.

Введем односторонние функции:

$$K_1(x) = \left(x^2 - 1\right)_+^{-\gamma/2} P_\gamma^\delta(x) = \begin{cases} \left(x^2 - 1\right)^{-\gamma/2} P_\gamma^\delta(x), & x > 1, \\ 0, & 0 < x < 1; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$K_2(x) = \left(1 - x^2\right)_+^{-\gamma/2} P_\gamma^\delta(x) = \begin{cases} \left(1 - x^2\right)^{-\gamma/2} P_\gamma^\delta(x), & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Используя обозначения (3.5) и (3.6) представим преобразования (3.1) – (3.4) соответственно в виде

$$\left(P_{\delta, 1}^\gamma f\right)(x) = \int_0^\infty K_1\left(\frac{x}{t}\right) \left(M_{-\gamma} f\right)(t) dt; \quad (3.7)$$

$$\left(P_{\delta, 2}^\gamma f\right)(x) = x^{1-\gamma} \int_0^\infty (RK_1)\left(\frac{x}{t}\right) \left(M_{-1} f\right)(t) dt; \quad (3.8)$$

$$\left(P_{\delta, 3}^\gamma f\right)(x) = \int_0^\infty K_2\left(\frac{x}{t}\right) \left(M_{-\gamma} f\right)(t) dt; \quad (3.9)$$

$$\left(P_{\delta, 4}^\gamma f\right)(x) = x^{1-\gamma} \int_0^\infty (RK_2)\left(\frac{x}{t}\right) \left(M_{-1} f\right)(t) dt. \quad (3.10)$$

Следующие вспомогательные утверждения дают формулы преобразования Меллина (2.86) функций $K_1(x)$ и $K_2(x)$ в (3.5) и (3.6).

Лемма 3.1 [82, Лемма 2]. Пусть $\gamma, \delta, s \in \mathbb{C}$.

a) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re}(s) < 1 + \operatorname{Re}(\gamma + \delta)$, $\operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(\gamma - \delta)$, то

$$(\mathfrak{M}K_1)(s) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+\delta-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-\delta-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}. \quad (3.11)$$

b) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re} s > 0$, то

$$(\mathfrak{M}K_2)(s) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma-\delta+s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta-\gamma+s}{2}\right)}. \quad (3.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [31, 2.17.2.9] при выполнении условий в *a)* справедлива формула

$$(\mathfrak{M}K_1)(s) = \frac{2^{\gamma-s-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+\delta-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-\delta-s}{2}\right)}{\Gamma(1-s)}. \quad (3.13)$$

Используя формулу удвоения гамма функции (2.25) с $z = \frac{1-s}{2}$, из (3.13) получаем (3.11).

Если выполняются условия *b)*, то в силу [31, 2.17.2.4]

$$(\mathfrak{M}K_2)(s) = 2^{\gamma-s} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma-\delta+s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta-\gamma+s}{2}\right)}. \quad (3.14)$$

Применяя (2.25) с $z = \frac{s}{2}$, из (3.14) получаем (3.12). Лемма доказана.

Используя формулу преобразования Меллина свертки Меллина [34; 99, (1.115)]

$$\left(\mathfrak{M} \int_0^\infty K\left(\frac{x}{t}\right) y(t) \frac{dt}{t} \right)(s) = (\mathfrak{M}K)(s)(\mathfrak{M}f)(s), \quad (3.15)$$

справедливую для подходящих функций $K(x)$ и $y(x)$, и формулы (2.115), (2.116) преобразований Меллина $M_\zeta f, Rf$, находим преобразования Меллина выражений (3.7) – (3.10) для «достаточно хороших» функций f .

Применяя формулы (3.15) и (3.11), имеем для $(P_{\delta, 1}^\gamma f)(x)$ и $(P_{\delta, 2}^\gamma f)(x)$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}P_{\delta, 1}^\gamma f)(s) &= \left(\mathfrak{M} \left(\int_0^\infty K_1 \left(\frac{x}{t} \right) (M_{1-\gamma} f)(t) \frac{dt}{t} \right) \right)(s) = \\ &= (\mathfrak{M}K_1)(s) (\mathfrak{M}M_{1-\gamma} f)(s) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+\delta-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s). \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}P_{\delta, 2}^\gamma f)(s) &= \left(\mathfrak{M} \left(x^{1-\gamma} \int_0^\infty (RK_1) \left(\frac{x}{t} \right) (M_{-1} f)(t) dt \right) \right)(s) = \\ &= \left(\mathfrak{M} \int_0^\infty (RK_1) \left(\frac{x}{t} \right) f(t) \frac{dt}{t} \right)(s+1-\gamma) = (\mathfrak{M}(RK_1))(s+1-\gamma) (\mathfrak{M}f)(s+1-\gamma) = \\ &= (\mathfrak{M}K_1)(\gamma-s) (\mathfrak{M}f)(s+1-\gamma) = \\ &= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\delta+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma+s}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{s-\gamma}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Согласно (2.110), соотношения (3.16) и (3.17) принимают вид:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}P_{\delta, 1}^\gamma f)(s) &= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\gamma+\delta-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s) = \\ &= 2^{\gamma-1} \mathcal{H}_{2, 2}^{0, 2} \left[\begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right) & \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(0, \frac{1}{2} \right) & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s); \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}P_{\delta, 2}^{\gamma}f)(s) &= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\delta+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\delta+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma+s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{s-\gamma}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s) = \\
&= 2^{\gamma-1} \mathcal{H}_{2, 2}^{2, 0} \left[\begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right) & \left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Поэтому в силу (2.113) исходные интегральные преобразования (3.1) и (3.2) являются модифицированными **H**-преобразованиями (2.112) с $\sigma=0$, $\kappa=1-\gamma$:

$$(P_{\delta, 1}^{\gamma}f)(x) = 2^{\gamma-1} \int_0^{\infty} H_{2, 2}^{0, 2} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right] t^{-\gamma} f(t) dt; \tag{3.20}$$

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma}f)(x) = 2^{\gamma-1} \int_0^{\infty} H_{2, 2}^{2, 0} \left[\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \tag{3.21}$$

Аналогично, используя формулы (3.15) и (3.12), имеем для $(P_{\delta, 3}^{\gamma}f)(x)$ и $(P_{\delta, 4}^{\gamma}f)(x)$:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}P_{\delta, 3}^{\gamma}f)(s) &= \left(\mathfrak{M} \int_0^{\infty} K_2 \left(\frac{x}{t} \right) (\mathbf{M}_{1-\gamma}f)(t) \frac{dt}{t} \right) (s) = \\
&= (\mathfrak{M}K_2)(s) (\mathfrak{M}\mathbf{M}_{1-\gamma}f)(s) = \\
&= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma-\delta+s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta-\gamma+s}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s); \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}P_{\delta, 4}^{\gamma}f)(s) &= \left(\mathfrak{M} \left(x^{1-\gamma} \int_0^{\infty} (RK_2) \left(\frac{x}{t} \right) (\mathbf{M}_{-1}f)(t) dt \right) \right)(s) = \\
&= \left(\mathfrak{M} \int_0^{\infty} (RK_2) \left(\frac{x}{t} \right) f(t) \frac{dt}{t} \right)(s+1-\gamma) = \\
&= (\mathfrak{M}(RK_2))(s+1-\gamma)(\mathfrak{M}f)(s+1-\gamma) = \\
&= (\mathfrak{M}K_2)(\gamma-s)(\mathfrak{M}f)(s+1-\gamma) = \\
&= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\delta-s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta-s}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

В силу (2.110), равенства (3.22) и (3.23) принимают вид:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}P_{\delta, 3}^{\gamma}f)(s) &= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\gamma-\delta+s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta-\gamma+s}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s) = \\
&= 2^{\gamma-1} \mathcal{H}_{2, 2}^{2, 0} \left[\begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), & \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(0, \frac{1}{2} \right), & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s);
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{M}P_{\delta, 4}^{\gamma}f)(s) &= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\delta-s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta-s}{2}\right)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s) = \\
&= 2^{\gamma-1} \mathcal{H}_{2, 2}^{0, 2} \left[\begin{matrix} \left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), & \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), & \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

и, следовательно, согласно (2.113) исходные преобразования $(P_{\delta, 3}^\gamma f)(x)$ и $(P_{\delta, 4}^\gamma f)(x)$ также являются модификациями **H**-преобразования (2.112) с $\sigma=0$, $\kappa=1-\gamma$:

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(x) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2, 2}^{2, 0} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt; \quad (3.26)$$

$$(P_{\delta, 4}^\gamma f)(x) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2, 2}^{0, 2} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} \left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \quad (3.27)$$

3.1.2 $\mathcal{L}_{v, 2}$ -теория преобразований $P_{\delta, j}^\gamma f$ ($j=1, 2, 3, 4$)

$\mathcal{L}_{v, 2}$ -теория преобразований (3.1) – (3.4) следует из (3.20) – (3.21) и (3.26) – (3.27), леммы 3.1 и утверждения 2.5 для $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования.

На основании (3.20) – (3.21) и (3.26) – (3.27) и (2.112), $p=q=2$, параметры α_i, β_j ($i=1, 2; j=1, 2$) и параметры a^*, Δ, μ в (2.118), (2.119) имеют вид:

$$a^* = \Delta = 0, \quad \alpha_i = \beta_j = \frac{1}{2} \quad (i=1, 2; j=1, 2), \quad \mu = \gamma - 1. \quad (3.28)$$

Параметры m, n и α, β в (2.117) принимают вид:

$$m=0, n=2, \alpha=-\infty, \beta=\min[\operatorname{Re}(1+\gamma+\delta), \operatorname{Re}(\gamma-\delta)]; \quad (3.29)$$

$$n=0, m=2, \alpha=-\min[\operatorname{Re}(1+\delta), \operatorname{Re}(-\delta)], \beta=\infty; \quad (3.30)$$

$$n=0, m=2, \alpha=0, \beta=\infty; \quad (3.31)$$

$$m=0, n=2, \alpha=-\infty, \beta=\min[\operatorname{Re}(\gamma), \operatorname{Re}(\gamma+1)], \quad (3.32)$$

соответственно для операторов (3.1) – (3.4).

На основании (3.16) $1-v$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_{2, 2}^{0, 2}$ -функции в правой части (3.18), если

$$s \neq 2m+1, \quad s \neq 2l+2 \quad (l, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}), \quad (3.33)$$

для $\operatorname{Re}(s)=1-v$.

На основании (3.17) $1-v$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_{2,2}^{2,0}$ -функции в правой части (3.19), если

$$s \neq \gamma - 2m - 1, s \neq \gamma - 2l - 2 \quad (l, m \in N_0 = N \cup \{0\}), \quad (3.34)$$

для $\operatorname{Re}(s) = 1 - v$.

На основании (3.22) $1-v$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_{2,2}^{2,0}$ -функции в правой части (3.24), если

$$s \neq \delta + \gamma - 2m - 1, s \neq \gamma - \delta - 2l - 2 \quad (l, m \in N_0 = N \cup \{0\}), \quad (3.35)$$

для $\operatorname{Re}(s) = 1 - v$.

На основании (3.23) $1-v$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_{2,2}^{0,2}$ -функции в правой части (3.25), если

$$s \neq -\delta + 2m + 1, s \neq \delta + 2l + 2 \quad (l, m \in N_0 = N \cup \{0\}), \quad (3.36)$$

для $\operatorname{Re}(s) = 1 - v$.

Из (3.20) – (3.21) и (3.26) – (3.27), леммы 3.1 и утверждения 2.5 мы получаем $\mathcal{L}_{v,2}$ -теорию преобразований $P_{\delta,j}^{\gamma} f$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Теорема 3.1 [82, Теорема 1]. *Допустим, что*

$$-\infty < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma + \delta), \operatorname{Re}(\gamma - \delta)], \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1. \quad (3.37)$$

Верны следующие утверждения:

а) Существует инъективное преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} \in [\mathcal{L}_{v,2}, \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma),2}]$, такое, что равенство (3.18) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{v,2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и (3.33) имеет место, то $P_{\delta,1}^{\gamma}$ биективно на $\mathcal{L}_{v,2}$.

б) Преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ не зависит от v в том смысле, что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют (3.37) и если преобразования $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta,1}^{\gamma} f$ определены в пространствах $\mathcal{L}_{v,2}$ и $\mathcal{L}_{\tilde{v},2}$ равенством (3.18), то $P_{\delta,1}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta,1}^{\gamma} f$ для $f \in \mathcal{L}_{\tilde{v},2} \cap \mathcal{L}_{v,2}$.

в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathcal{L}_{v,2}$ $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ дается формулами (3.1) и (3.20).

д) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $f \in \mathcal{L}_{v,2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$, то $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ представимо в виде

$$(P_{\delta,1}^{\gamma} f)(x) = 2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times$$

$$\times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt, \quad (3.38)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ дается формулой

$$\begin{aligned} (P_{\delta,1}^\gamma f)(x) = & -2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ & \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

е) Если $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma),2}$, то имеет место формула:

$$\int_0^\infty f(x) (P_{\delta,1}^\gamma g)(x) dx = \int_0^\infty 2^{\gamma-1} (P_{\delta,2}^\gamma f)(x) g(x) dx, \quad (3.40)$$

где $(P_{\delta,2}^\gamma f)(x)$ – преобразование вида (3.2).

Теорема 3.2 [82, Теорема 2]. Допустим, что

$$-\min[\operatorname{Re}(1+\delta), \operatorname{Re}(-\delta)] < v - \operatorname{Re}(1-\gamma) < \infty, \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1. \quad (3.41)$$

Верны следующие утверждения:

а) Существует инъективное преобразование $P_{\delta,2}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{v,2}, \mathfrak{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma),2}]$ такое, что равенство (3.19) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1-\gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и (3.34) имеет место, то $P_{\delta,2}^\gamma$ биективно на $\mathfrak{L}_{v,2}$.

б) Преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ не зависит от v в том смысле, что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют (3.41) и если преобразования $P_{\delta,2}^\gamma f$ и $\tilde{P}_{\delta,2}^\gamma f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{v,2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{v},2}$ равенством (3.19), то $P_{\delta,2}^\gamma f = \tilde{P}_{\delta,2}^\gamma f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\tilde{v},2} \cap \mathfrak{L}_{v,2}$.

с) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$ $P_{\delta,2}^\gamma f$ дается формулами (3.2) и (3.21).

d) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$, то $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(x) = 2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{2, 1} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt, \quad (3.42)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(x) = -2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{3, 0} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \quad (3.43)$$

e) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma), 2}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(x) (P_{\delta, 2}^{\gamma} g)(x) dx = \int_0^{\infty} 2^{\gamma-1} (P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(x) g(x) dx, \quad (3.44)$$

где $(P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(x)$ – преобразование вида (3.1).

Теорема 3.3 [82, Теорема 3]. Допустим, что

$$0 < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \infty, \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1. \quad (3.45)$$

Верны следующие утверждения:

a) Существует инъективное преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} \in [\mathcal{L}_{v, 2}, \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), 2}]$, такое, что равенство (3.24) выполняется для $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и (3.35) имеет место, то $P_{\delta, 3}^{\gamma}$ биективно на $\mathcal{L}_{v, 2}$.

b) Преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ не зависит от v в том смысле, что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют (3.45) и если преобразования $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta, 3}^{\gamma} f$ определе-

ны в пространствах $\mathfrak{L}_{v, 2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{v}, 2}$ равенством (3.24), то $P_{\delta, 3}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta, 3}^{\gamma} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\tilde{v}, 2} \cap \mathfrak{L}_{v, 2}$.

с) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$ $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ дается формулами (3.3) и (3.26).

д) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$, то $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 3}^{\gamma} f)(x) = 2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{2, 1} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{array}{c} (-\lambda, h), \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{array} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt, \quad (3.46)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 3}^{\gamma} f)(x) = -2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{3, 0} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{array}{c} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \quad (3.47)$$

е) Если $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma), 2}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(x) (P_{\delta, 3}^{\gamma} g)(x) dx = \int_0^{\infty} 2^{\gamma-1} (P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(x) g(x) dx, \quad (3.48)$$

где $(P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(x)$ – преобразование вида (3.4).

Теорема 3.4 [82, Теорема 4]. Допустим, что

$$-\infty < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \min[\operatorname{Re}(\gamma), \operatorname{Re}(\gamma + 1)], \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1. \quad (3.49)$$

Верны следующие утверждения:

а) Существует инъективное преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} \in [\mathfrak{L}_{v, 2}, \mathfrak{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), 2}]$, такое, что равенство (3.25) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и условия (3.36) имеют место, то $P_{\delta, 4}^{\gamma}$ биективно на $\mathfrak{L}_{v, 2}$.

b) Преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ не зависит от v в том смысле, что, если v и $\tilde{v}$ удовлетворяют (3.49) и если преобразования $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta, 4}^{\gamma} f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{v, 2}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{v}, 2}$ равенством (3.25), то $P_{\delta, 4}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta, 4}^{\gamma} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\tilde{v}, 2} \cap \mathfrak{L}_{v, 2}$.

c) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$ $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ дается формулами (3.4) и (3.26).

d) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$, и $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$, то $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(x) = 2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{0, 3} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt, \quad (3.50)$$

а при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(x) = -2^{\gamma-1} h x^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{1, 2} \left[\frac{x}{t} \left| \begin{matrix} \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}\right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right. \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \quad (3.51)$$

e) Если $f \in \mathfrak{L}_{v, 2}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma), 2}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(x) (P_{\delta, 4}^{\gamma} g)(x) dx = \int_0^{\infty} 2^{\gamma-1} (P_{\delta, 3}^{\gamma} f)(x) g(x) dx, \quad (3.52)$$

где $(P_{\delta, 3}^{\gamma} f)(x)$ – преобразование вида (3.3).

3.1.3 $\mathfrak{L}_{v,r}$ -теория преобразований $P_{\delta,j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$)

$\mathfrak{L}_{v,r}$ -теория преобразований $P_{\delta,j}^{\gamma} f$ ($j=1, 2, 3, 4$) следует из (3.20) – (3.21) и (3.26) – (3.27) с учетом (3.29) – (3.36) и утверждений 2.6 – 2.7.

Теорема 3.5 [82, Теорема 5]. Пусть $-\infty < v < \min[\operatorname{Re}(2 + \delta), \operatorname{Re}(1 - \delta)]$ и $1 < r < \infty$.

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$, определенное в $\mathfrak{L}_{v,2}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{v,r}$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.18) для $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v$.

б) Если $f \in \mathfrak{L}_{v,2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.38) при $\operatorname{Re}(\lambda) > vh - 1$ и дается формулой (3.39) при $\operatorname{Re}(\lambda) < vh - 1$.

в) Если $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-v,r'}$, $r' = r/(r-1)$, то имеет место формула (3.40).

г) Если имеет место (3.33), то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ биективно на $\mathfrak{L}_{v,r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,1}^{\gamma} f(\mathfrak{L}_{v,r}) = \mathfrak{L}_{v,r}. \quad (3.53)$$

Теорема 3.6 [82, Теорема 6]. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $-\infty < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma + \delta), \operatorname{Re}(\gamma - \delta)]$ $1 < r < \infty$.

Имеют место следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$, определенное на $\mathfrak{L}_{v,2}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{v,r}$ до элемента $P_{\delta,1}^{\gamma} \in [\mathfrak{L}_{v,r}; \mathfrak{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma),s}]$ для всех таких $s \geq r$, что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \operatorname{Re}(\gamma - 1)$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.18) для $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

б) Для $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ дается формулой (3.20).

в) Если $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то $P_{\delta,1}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.38) при $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ и дается формулой (3.39) при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$.

г) Если $f \in \mathfrak{L}_{v,r}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma),s}$, где $1 < s < \infty$, $1 \leq 1/r + 1/s < 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (3.40).

е) Если имеет место (3.33), $\operatorname{Re}(s) = 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то преобразование $P_{\delta, 1}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 1}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r}) = I_{0+; 1-\gamma, \beta/(-\gamma)}^{1-\gamma}(\mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), r}), \quad (3.54)$$

где $\beta = \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma + \delta), \operatorname{Re}(\gamma - \delta)]$.

Если $\operatorname{Re}(s) \neq 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то $P_{\delta, 1}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r})$ является подмножеством правой части (3.54).

Согласно (3.2), из утверждения 2.6 и утверждения 2.7 получаем следующие результаты для $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ -преобразования.

Теорема 3.7 [82, Теорема 7]. Пусть $-\min[\operatorname{Re}(1 + \delta), \operatorname{Re}(-\delta)] < v < \infty$ и $1 < r < \infty$.

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.19) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v$.

б) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.42) при $\operatorname{Re}(\lambda) > vh - 1$ и дается формулой (3.43) при $\operatorname{Re}(\lambda) < vh - 1$.

с) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v, r'}$, $r' = r/(r-1)$, то имеет место формула (3.44).

д) Если (3.34) имеет место, то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 2}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{v, r}. \quad (3.55)$$

Теорема 3.8 [82, Теорема 8]. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $-\min[\operatorname{Re}(1 + \delta), \operatorname{Re}(-\delta)] < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \infty$, $1 < r < \infty$.

Имеют место следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$, определенное на $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ до элемента $P_{\delta, 2}^{\gamma} \in [\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), s}]$ для всех таких $s \geq r$, что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.19) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

б) Для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ дается формулой (3.21).

с) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.42) при $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ и дается формулой (3.43) при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$.

д) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma), s}$, где $1 < s < \infty$, $1 \leq 1/r + 1/s < 1 - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то имеет место формула (3.44).

е) Если (3.34) имеет место, $\operatorname{Re}(s) = 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 2}^{\gamma} (\mathcal{L}_{v, r}) = I_{-; 1-\gamma, (-\alpha)/(1-\gamma)}^{1-\gamma} (\mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), r}), \quad (3.56)$$

где $\alpha = -\min[\operatorname{Re}(1 + \delta), \operatorname{Re}(-\delta)]$.

Если $\operatorname{Re}(s) \neq 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то $P_{\delta, 2}^{\gamma} (\mathcal{L}_{v, r})$ является подмножеством правой части (3.56).

Из (3.3), утверждения 2.6 и утверждения 2.7 следуют результаты для $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ -преобразования.

Теорема 3.9 [82, Теорема 9]. Пусть $0 < v < \infty$ и $1 < r < \infty$.

Верны следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и выполняется равенство (3.24) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v$.

б) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.46) при $\operatorname{Re}(\lambda) > vh - 1$ и дается формулой (3.47) при $\operatorname{Re}(\lambda) < vh - 1$.

с) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v, r'}$, $r' = r/(r-1)$, то имеет место формула (3.48).

д) Если (3.35) имеет место, то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 3}^{\gamma} f (\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{v, r}. \quad (3.57)$$

Теорема 3.10 [82, Теорема 10]. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $0 < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \infty$, $1 < r < \infty$.

Имеют место следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$, определенное на $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ до элемента $P_{\delta, 3}^{\gamma} \in [\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), s}]$ для всех таких

$s \geq r$, что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.24) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

b) Для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ дается формулой (3.26).

c) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.46) при $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ и дается формулой (3.47) при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$.

d) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v+\operatorname{Re}(1-\gamma), s}$, где $1 < s < \infty$, $1 \leq 1/r + 1/s < 1 - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то имеет место формула (3.48).

e) Если (3.35) имеет место, $\operatorname{Re}(s) = 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 3}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r}) = I_{-, 1-\gamma, 0}^{1-\gamma}(\mathcal{L}_{v-\operatorname{Re}(1-\gamma), r}). \quad (3.58)$$

Если $\operatorname{Re}(s) \neq 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то $P_{\delta, 3}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r})$ является подмножеством правой части (3.58).

На основании (3.4) из утверждения 2.6 и утверждения 2.7 мы получаем следующие результаты для $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ -преобразования.

Теорема 3.11 [82, Теорема 11]. Пусть $-\infty < v < 1$ и $1 < r < \infty$.

Верны следующие утверждения:

a) Преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$, определенное в $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.25) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v$.

b) Если $f \in \mathcal{L}_{v, 2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.50) при $\operatorname{Re}(\lambda) > vh - 1$ и дается формулой (3.51) при $\operatorname{Re}(\lambda) < vh - 1$.

c) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1-v, r'}$, $r' = r/(r-1)$, то имеет место формула (3.52).

d) Если (3.36), то преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 4}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r}) = \mathcal{L}_{v, r}. \quad (3.59)$$

Теорема 3.12 [82, Теорема 12]. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $-\infty < v - \operatorname{Re}(1 - \gamma) < \min[\operatorname{Re}(\gamma), \operatorname{Re}(\gamma + 1)]$, $1 < r < \infty$.

Имеют место следующие утверждения:

а) Преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$, определенное на $\mathcal{L}_{v, 2}$, может быть продолжено на $\mathcal{L}_{v, r}$ до элемента $P_{\delta, 4}^{\gamma} \in [\mathcal{L}_{v, r}; \mathcal{L}_{v - \operatorname{Re}(1 - \gamma), s}]$ для всех таких $s \geq r$, что $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} + \operatorname{Re}(\gamma - 1)$. Если $1 < r \leq 2$, то преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ биективно и выполняется равенство (3.25) для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $\operatorname{Re}(s) = v - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

б) Для $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ дается формулой (3.27).

в) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h > 0$, то $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ представимо в виде (3.50) при $\operatorname{Re}(\lambda) > (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$ и дается формулой (3.51) при $\operatorname{Re}(\lambda) < (v - \operatorname{Re}(1 - \gamma))h - 1$.

г) Если $f \in \mathcal{L}_{v, r}$ и $g \in \mathcal{L}_{1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma), s}$, где $1 < s < \infty$, $1 \leq 1/r + 1/s < 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (3.52).

е) Если (3.36) имеет место, $\operatorname{Re}(s) = 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то преобразование $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ биективно на $\mathcal{L}_{v, r}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta, 4}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r}) = I_{0+; 1 - \gamma, \beta/(-\gamma)}^{1 - \gamma}(\mathcal{L}_{v - \operatorname{Re}(1 - \gamma), r}), \quad (3.60)$$

где $\beta = \min[\operatorname{Re}(\gamma), \operatorname{Re}(\gamma + 1)]$.

Если $\operatorname{Re}(s) \neq 1 - v + \operatorname{Re}(1 - \gamma)$, то $P_{\delta, 4}^{\gamma}(\mathcal{L}_{v, r})$ является подмножеством правой части (3.60).

3.1.4 Формулы обращения преобразований $P_{\delta, j}^{\gamma} f$ ($j = 1, 2, 3, 4$)

На основании (3.20) – (3.21), (3.26) – (3.27) и (2.212) параметры в (2.120) и (2.121) принимают вид:

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = \infty; \quad (3.61)$$

$$\alpha_0 = -\infty, \beta_0 = 1 + \min[\operatorname{Re}(1 - \delta), \operatorname{Re}(2 - \gamma)]; \quad (3.62)$$

$$\alpha_0 = -\infty, \beta_0 = 1 + \min[\operatorname{Re}(1 - \gamma - \delta), \operatorname{Re}(2 + \delta - \gamma)]; \quad (3.63)$$

$$\alpha_0 = 1 + \max[\operatorname{Re}(\delta - 1), \operatorname{Re}(-\delta - 2)], \beta_0 = \infty, \quad (3.64)$$

соответственно для операторов (3.1) – (3.4).

На основании (3.20) формулы (2.130) и (2.131) для $P_{\delta, 1}^{\gamma} f$ -преобразования принимают вид:

$$f(x) = -2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1+\gamma} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{2, 1} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{array}{c} (-\lambda, h), \left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{array} \right. \right] (P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(t) dt \quad (3.65)$$

или

$$f(x) = 2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{3, 0} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{array}{c} \left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. \right] (P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(t) dt. \quad (3.66)$$

Условия справедливости формул (3.65) – (3.66) следуют из утверждения 2.8.

Теорема 3.13 [82, Теорема 13]. Пусть $-\infty < \nu < \min[1, \operatorname{Re}(2+\delta), \operatorname{Re}(1-\delta)]$ и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

Верны следующие утверждения:

а) Если $f \in \mathfrak{L}_{\nu, 2}$, то формула обращения (3.65) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.66) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (3.65) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.66) – при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

На основании (3.21) формулы (2.130) и (2.131) для $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ -преобразования принимают вид:

$$f(x) = -2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1+\gamma} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3, 3}^{0, 3} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{array}{c} (-\lambda, h), \left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{array} \right. \right] (P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(t) dt \quad (3.67)$$

или

$$f(x) = 2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} \left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \right] (P_{\delta,2}^\gamma f)(t) dt. \quad (3.68)$$

Условия справедливости формул (3.67) – (3.68) следуют из утверждения 2.8.

Теорема 3.14 [82, Теорема 14]. Пусть $\max[\operatorname{Re}(-1-\delta), \operatorname{Re}(\delta), 0] < \nu < \infty$ и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

а) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,2}$, то формула обращения (3.67) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.68) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

б) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu,r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (3.67) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.68) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

На основании (3.26) формулы (2.130) и (2.131) для $P_{\delta,3}^\gamma f$ -преобразования принимают вид:

$$f(x) = -2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1+\gamma} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), \left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right. \right] (P_{\delta,3}^\gamma f)(t) dt \quad (3.69)$$

или

$$f(x) = 2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} \left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(0, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \right] (P_{\delta,3}^\gamma f)(t) dt. \quad (3.70)$$

Условия справедливости формул (3.69) – (3.70) следуют из утверждения 2.8.

Теорема 3.15 [82, Теорема 15]. Пусть $\max[\operatorname{Re}(\delta), \operatorname{Re}(-1-\delta), 0] < \nu < \infty$ и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

a) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то формула обращения (3.69) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.70) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

b) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (3.69) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.70) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

На основании (3.27), формулы (2.130) и (2.131) для $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ -преобразования принимают вид:

$$f(x) = -2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1+\gamma} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), \left(\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda-1, h) \end{matrix} \right. \right] (P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(t) dt \quad (3.71)$$

или

$$f(x) = 2^{1-\gamma} h x^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{dx} x^{-(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{t}{x} \left| \begin{matrix} \left(\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \right. \right] (P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(t) dt. \quad (3.72)$$

Условия справедливости формул (3.71) – (3.72) следуют из утверждения 2.8.

Теорема 3.16 [82, Теорема 16]. Пусть $-\infty < \nu < \min[1, \operatorname{Re}(1-\delta), \operatorname{Re}(2+\delta)]$ и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $h > 0$.

a) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu, 2}$, то формула обращения (3.71) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.72) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

b) Если $f \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, $1 < r < \infty$, то формула обращения (3.71) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) > (1-\nu)h-1$, а формула (3.72) справедлива при $\operatorname{Re}(\lambda) < (1-\nu)h-1$.

3.2 Решение интегральных уравнений с функцией Лежандра первого рода в ядрах в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах

В данном разделе дается решение интегральных уравнений $(P_{\delta, j}^{\gamma} f)(x) = g(x)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) с функцией Лежандра первого рода в ядрах в пространстве $\mathcal{L}_{\nu, r}$.

3.2.1 Теоремы о действии операторов $P_{\delta, j}^{\gamma}$ ($j = 1, 2, 3, 4$)

в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах

Рассматриваются четыре интегральных преобразования [34; 99 §35.2]:

$$(P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(x) \equiv \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\gamma}{2}} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.73)$$

$$(P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(x) \equiv \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\gamma}{2}} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.74)$$

$$(P_{\delta, 3}^{\gamma} f)(x) \equiv \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\frac{\gamma}{2}} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt \quad (x > 0); \quad (3.75)$$

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(x) \equiv \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\frac{\gamma}{2}} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt \quad (x > 0), \quad (3.76)$$

содержащие функцию Лежандра первого рода (2.36) в ядре с $\delta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \gamma < 1$. В [34; 99, §35.2] были получены следующие композиционные разложения для этих операторов в пространствах $L_p(a, b)$, $0 < a < b < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$:

$$(P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(x) = I_{0+}^{-\gamma-\delta} I_{0+; x^2}^{\delta+1} (2x)^{-\delta-1} f(x); \quad (3.77)$$

$$(P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(x) = (2x)^{\delta+1} I_{0+; x^2}^{-\delta-1} I_{0+}^{-\gamma+\delta+2} f(x); \quad (3.78)$$

$$(P_{\delta, 3}^{\gamma} f)(x) = 2^{\delta+1} x^{-\gamma+\delta+3} I_{-; x^2}^{-\delta-1} x^{\gamma+\delta-1} I_{-}^{-\gamma+\delta+2} x^{-\delta-1} f(x); \quad (3.79)$$

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(x) = 2^{-\delta-1} x^{\delta+1} I_{-}^{-\gamma-\delta} x^{\gamma-\delta-1} I_{-; x^2}^{\delta+1} x^{-\gamma-\delta-1} f(x). \quad (3.80)$$

Ограниченность операторов, стоящих в левых частях (3.73) – (3.76) и справедливость представлений (3.77) – (3.80) в весовых пространствах $\mathcal{L}_{v,r}$, $1 < r < +\infty$, устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.17 [40, Теорема 1]. Пусть $\delta, \gamma, v \in \mathbb{R}$, $1 < r < \infty$, $\gamma < 1$, $-2\delta - 1 \neq \mathbb{Z}$, и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 3.1. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем, имеют место равенства E_j .

Таблица 3.1. – Действие операторов $P_{\delta,j}^\gamma$ ($j=1,2,3,4$) из $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$

J	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$v < \min((- \delta + 1), (\delta + 2))$ $\delta > -1, \gamma + \delta < 0$	$P_{\delta,1}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(3.77)
2	$v < \min(1, (\delta - \gamma + 4))$ $\gamma - \delta < 2, \delta < -1$	$P_{\delta,4}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(3.78)
3	$v > \max((2\delta - \gamma + 1), (-\delta - 2))$ $\gamma - \delta < 2, \delta < -1$	$P_{\delta,3}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(3.79)
4	$v > \max((- \gamma + \delta + 1), (-\gamma - \delta))$ $\delta > -1, \gamma + \delta < 0$	$P_{\delta,2}^\gamma$	$\mathcal{L}_{v,r}$	$\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$	(3.80)

Доказательство. Рассмотрим первый случай (см. Таблица 3.1). Покажем, что оператор $P_{\delta,1}^\gamma$ ограниченно действует из $\mathcal{L}_{v,r}$ на $\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}$, то есть выполняется условие: $\|P_{\delta,1}^\gamma f\|_{\mathcal{L}_{v+\gamma-1,r}} \leq k \|f\|_{\mathcal{L}_{v,r}}$, где $k > 0$ – некоторая постоянная. Имеем:

$$\begin{aligned}
 P_{\delta,1}^\gamma f(x) &\equiv \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\gamma}{2}} P_\delta^\gamma\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = \\
 &= \int_0^x \frac{(x^2 - t^2)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{x}{t} + 1\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\Gamma(1-\gamma)} {}_2F_1\left(-\delta, 1+\delta; 1-\gamma; \frac{1-\frac{x}{t}}{2}\right) f(t) dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{(x^2 - t^2)^{-\frac{\gamma}{2}}}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\frac{x+t}{t} : \frac{x-t}{t} \right)^{\frac{\gamma}{2}} {}_2F_1 \left(-\delta, 1+\delta; 1-\gamma; \frac{1-\frac{x}{t}}{2} \right) f(t) dt = \\
&= \int_0^x \frac{(x-t)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} {}_2F_1 \left(-\delta, 1+\delta; 1-\gamma; \frac{t-x}{2t} \right) f(t) dt.
\end{aligned}$$

$$\text{Положим } K(x, t) = \begin{cases} \frac{(x-t)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} {}_2F_1 \left(-\delta, 1+\delta; 1-\gamma; \frac{1}{2} - \frac{x}{2t} \right), & x > t, \\ 0, & x < t \end{cases},$$

где $K(x, t)$ – однородное ядро степени $(-\gamma)$, то есть выполняется $K(\lambda x, \lambda t) = \lambda^{-\gamma} K(x, t)$, $(\lambda > 0)$.

Осуществляя замену $t = x\tau$ и используя однородность ядра, имеем

$$(P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(x) \equiv \int_0^{\infty} K(x, t) f(t) dt = \int_0^{\infty} K(x, x\tau) f(x\tau) x d\tau = x^{-\gamma+1} \int_0^1 K(1, t) f(xt) dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (2.7), находим:

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_{\mathcal{L}_{v+\gamma-1, r}} &= \left(\int_0^{\infty} x^{(v+\gamma-1)r-1} \left| \int_0^1 K(1, t) f(xt) x^{-\gamma+1} dt \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\
&\leq \int_0^1 |K(1, t)| dt \left(\int_0^{\infty} x^{(v+\gamma-1)r-1} x^{-\gamma r+r} |f(xt)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = \left[x = \frac{\tau}{t} \right] = \\
&= \int_0^1 |K(1, t)| dt \left(\int_0^{\infty} \frac{\tau^{vr-1}}{t^{vr}} |f(\tau)|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} = \\
&= \int_0^1 |K(1, t)| t^{-v} dt \left(\int_0^{\infty} \tau^{vr-1} |f(\tau)|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} = k \|f\|_{\mathcal{L}_{v, r}},
\end{aligned}$$

$$\text{здесь} \quad k = \int_0^1 |K(1, t)| t^{-v} dt. \quad (3.81)$$

Непосредственно проверяется, что несобственный интеграл (3.81) сходится при $-2\delta - 1 \neq \mathbb{Z}$, $v < 1 - \delta$ и $v < \delta + 2$, $\gamma < 1$.

Таким образом,

$$\left\| P_{\delta, 1}^{\gamma} f \right\|_{\mathcal{L}_{v+\gamma-1, r}} \leq k \|f\|_{\mathcal{L}_{v, r}} \quad (3.82)$$

при выполнении условий $-\delta-1 \neq \mathbb{Z}$, $v < \min((1-\delta), (\delta+2))$, $\gamma < 1$.

Далее рассмотрим оператор

$$I_{0+}^{-\gamma-\delta} I_{0+; x^2}^{\delta+1} (2x)^{-\delta-1} I = 2^{-\delta-1} I_{0+}^{-\gamma-\delta} I_{0+; x^2}^{\delta+1} x^{-\delta-1} I,$$

где I – тождественный оператор.

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{v, r}} \leq \|x^{-\delta-1} f\|_{\mathcal{L}_{v+\delta+1, r}}. \quad (3.83)$$

Рассмотрим оператор

$$I_{0+; x^2}^{\delta+1} x^{-\delta-1} I = N_2 I_{0+}^{\delta+1} N_{\frac{1}{2}} x^{-\delta-1} I,$$

где N_a – оператор (2.15).

На основании леммы 2.1 оператор $N_{\frac{1}{2}} x^{-\delta-1} I$ изоморфно отображает

$\mathcal{L}_{v+\delta+1, r}$ на $\mathcal{L}_{\frac{v+\delta+1}{2}, r}$. На основании формулы (2.54) оператор $I_{0+}^{\delta+1} N_{\frac{1}{2}} x^{-\delta-1} I$

ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{\frac{v+\delta+1}{2}, r}$ на $\mathcal{L}_{\frac{v+\delta+1}{2}-\delta-1, r}$:

$$\begin{aligned} \left\| I_{0+}^{\delta+1} N_{\frac{1}{2}} x^{-\delta-1} f \right\|_{\mathcal{L}_{(v+\delta+1)/2-\delta-1, r}} &= \left(\int_0^{\infty} x^{\frac{vr+\delta r+r}{2}-\delta r-1} \left| \left(I_{0+}^{\delta+1} N_{\frac{1}{2}} x^{-\delta-1} f(x) \right)^r \right| dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq k_1 \left(\int_0^{\infty} x^{vr+\delta r+r-1} |x^{-\delta-1} f(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = k_1 \|f\|_{\mathcal{L}_{v, r}}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

при выполнении условий $1 \leq r < \infty$, $\delta+1 > 0$, $v < -\delta+1$. На основании леммы 2.1 оператор $N_2 I_{0+}^{\delta+1} N_{\frac{1}{2}} x^{-\delta-1} I$ изоморфно отображает $\mathcal{L}_{\frac{v+\delta+1}{2}-\delta-1, r}$ на $\mathcal{L}_{v-\delta-1, r}$.

По формуле (2.54) оператор $I_{0+}^{-\gamma-\delta}$ ограничено действует из $\mathcal{L}_{v-\delta-1, r}$ на $\mathcal{L}_{v+\gamma-1, r}$:

$$\left\| I_{0+}^{-\gamma-\delta} I_{0+; x^2}^{\delta+1} x^{-\delta-1} I \right\|_{\mathcal{L}_{v+\gamma-1, r}} \leq k_2 \left\| I_{0+; x^2}^{\delta+1} x^{-\delta-1} I \right\|_{\mathcal{L}_{v-\delta-1, r}}, \quad (3.85)$$

при выполнении условий $1 \leq r < \infty$, $\gamma + \delta < 0$, $\nu < \delta + 2$. Отсюда, из (3.82) – (3.85) следует, что оператор $2^{-\delta-1} I_{0+}^{-\gamma-\delta} I_{0+; x^2}^{\delta+1} x^{-\delta-1} I$ ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{\nu, r}$ на пространство $\mathcal{L}_{\nu+\gamma-1, r}$ при выполнении условий: $\delta+1 > 0$; $\gamma + \delta < 0$; $1 \leq r < \infty$; $\nu < \min((- \delta + 1), (\delta + 2))$.

Это завершает доказательство теоремы 3.17 в первом случае.

Аналогично доказывается второй случай теоремы с помощью (2.54) и (3.78), третий и четвертый случаи $j = 3, 4$ – с использованием формулы (2.55) и соотношений (3.79) и (3.80) соответственно. Теорема доказана.

3.2.2 Решение интегральных уравнений $(P_{\delta, j}^{\gamma} f)(x) = g(x)$

$(j = 1, 2, 3, 4)$ в $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -пространствах

Как показывают формулы (3.77) – (3.80), интегралы $P_{\delta, j}^{\gamma} f \in \mathcal{L}_{\nu+\gamma-1, r}$, $j = 1, 2, 3, 4$, представимы в виде композиций двух односторонних дробных интегралов со степенными весами. Условия такой представимости в весовых пространствах суммируемых функций на полуоси отражает теорема 3.17, из которой следует, что, если $f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\nu, r}$ (или некоторому его подпространству), то при соответствующих условиях операторы $P_{\delta, j}^{\gamma}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) действуют на определенное подпространство из $\mathcal{L}_{\omega, r}$, $1 \leq r < \infty$, и справедливы те или иные из формул (3.77) – (3.80). Это означает, что если правая часть – функция $g(x)$ – берется из указанной области, на которую действует оператор $P_{\delta, j}^{\gamma}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), то соответствующее уравнение $(P_{\delta, j}^{\gamma} f)(x) = g(x)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) однозначно разрешимо путем последовательного обращения двух интегро-дифференциальных операторов, композиция которых составляет $P_{\delta, j}^{\gamma}$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Осуществляя такие обращения, из формул (3.77) – (3.80) получим следующие представления решений уравнений (3.73) – (3.76) [34; 99 §35]:

$$f(x) = (2x)^{\delta+1} I_{0+; x^2}^{-\delta-1} I_{0+}^{\gamma+\delta} g(x); \quad (3.86)$$

$$f(x) = I_{0+}^{\gamma-\delta-2} I_{0+; x^2}^{\delta+1} (2x)^{-\delta-1} g(x); \quad (3.87)$$

$$f(x) = (x/2)^{\delta+1} I_{-}^{\gamma-\delta-2} x^{1-\gamma-\delta} I_{-; x^2}^{\delta+1} x^{\gamma-\delta-3} g(x); \quad (3.88)$$

$$f(x) = 2^{\delta+1} x^{\gamma+\delta+1} I_{-; x^2}^{-\delta-1} x^{1+\delta-\gamma} I_{-}^{\gamma+\delta} x^{-\delta-1} g(x). \quad (3.89)$$

Тогда из теоремы 3.17 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.18 [40, Теорема 2]. Пусть $\delta, \gamma, v \in \mathbb{R}, 1 \leq r < \infty, \gamma < 1, -2\delta - 1 \neq \mathbb{Z}, g(x) \in \mathcal{L}_{v+\gamma-1, r}$ и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 3.2. Тогда соответствующее уравнение B_j имеет единственное решение $f \in \mathcal{L}_{v, r}$, выражаемое формулой C_j .

Таблица 3.2. – Решение уравнений (3.73) – (3.76) в $\mathcal{L}_{v, r}$ -пространствах

J	A_j	B_j	C_j
1	$v < \min((- \delta + 1), (\delta + 2)), \delta > -1, \gamma + \delta < 0$	(3.73)	(3.86)
2	$v < \min(1, (\delta - \gamma + 4)), \gamma - \delta < 2, \delta < -1$	(3.74)	(3.87)
3	$v > \max\{(2\delta - \gamma + 1), (-\delta - 2)\}, \gamma - \delta < 2, \delta < -1$	(3.75)	(3.88)
4	$v > \max\{(-\gamma + \delta + 1), (-\gamma - \delta)\}, \delta > -1, \gamma + \delta < 0$	(3.76)	(3.89)

Примеры решений уравнений (1.7) – (1.10) приведены в приложении Д.

3.3 Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с функцией Лежандра первого рода в ядрах по пирамидальной области

В этом разделе получено решение в замкнутой форме многомерных интегральных уравнений типа Абеля с функцией Лежандра первого рода в ядрах по пирамидальной области; доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций.

Рассмотрим интегральное уравнение типа Абеля:

$$\int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{-\frac{\mu}{2}} P_v^\mu \left(\frac{A \cdot \mathbf{x}}{A \cdot \mathbf{t}} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad (3.90)$$

где $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65); $\mathbf{x}, \mathbf{t}, v, \mu \in \mathbb{R}^n$, $0 < \mu < 1, \mathbf{2} = (2, 2, \dots, 2) \in \mathbb{R}_+^n$; $P_v^\mu \left(\frac{A \cdot \mathbf{x}}{A \cdot \mathbf{t}} \right)$ – функция вида (2.68).

Сначала дадим формальное решение уравнения (3.90). Используя представление (2.38) для $P_v^\mu\left(\frac{A \cdot \mathbf{x}}{A \cdot \mathbf{t}}\right)$ перепишем (3.90) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{2^\mu (A \cdot \mathbf{x})^{v+\mu}}{\Gamma(1-\mu)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{(1-\mu)-1} (A \cdot \mathbf{t})^{-v} \times \\ & \times F\left(-\frac{v}{2} - \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} - \frac{\mu}{2}; 1-\mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Заменяя $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$\mathbf{t} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} F\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right),$$

интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \frac{2^\mu (A \cdot \mathbf{t})^{v+\mu} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1}}{\Gamma(1-\mu)} F\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \mathbf{t} d\mathbf{t} \times \\ & \times \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{t})} (A \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2))^{(1-\mu)-1} (A \cdot \mathbf{u})^{-v} \times \\ & \times F\left(-\frac{v}{2} - \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} - \frac{\mu}{2}; 1-\mu; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2)}{A \cdot \mathbf{t}^2}\right) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \\ & = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} F\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \mathbf{t} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования согласно формуле (2.69), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(1-\mu)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot \mathbf{u})^{-v} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \times \\ & \times \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} (A \cdot \mathbf{t})^{v+\mu} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} (A \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2))^{(1-\mu)-1} \times \\ & \times F\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \times \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
& \times F\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}; 1-\mu; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2)}{A \cdot \mathbf{t}^2}\right) \mathbf{t} d\mathbf{t} = \\
& = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} F\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{t}^2}\right) \mathbf{t} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned}$$

где
$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x}\}. \quad (2.70)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в (3.92) введем новые переменные:

$$s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{u}^2)}; \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) (j=1, \dots, n).$$

Используя соотношения $1-s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)} (j=1, \dots, n)$ и формулу (2.32),

для внутреннего интеграла в (3.92) получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} (A \cdot \mathbf{t})^{\nu+\mu} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} (A \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2))^{(1-\mu)-1} \times \\
& \times F\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \times \\
& \times F\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}; 1-\mu; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^2 - \mathbf{u}^2)}{A \cdot \mathbf{t}^2}\right) \mathbf{t} d\mathbf{t} = \\
& = (A \cdot \mathbf{x})^{\nu+\mu} \Gamma(\mu) \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 s_j^{\mu_j-1} (1-s_j)^{(1-\mu_j)-1} \left[1-s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{u}^2)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2)} \right]^{\frac{\nu_j}{2}+\frac{\mu_j}{2}} \times \right. \\
& \times F\left\{ -\frac{\nu_j}{2}-\frac{\mu_j}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\nu_j}{2}-\frac{\mu_j}{2}; 1-\mu_j; \frac{(1-s_j) \mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{u}^2)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2)} \right\} \times \\
& \times F\left\{ \frac{\nu_j}{2}+\frac{\mu_j}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\nu_j}{2}+\frac{\mu_j}{2}; \mu_j; s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{u}^2)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2)} \right\} ds_j \Bigg\} = \\
& = (A \cdot \mathbf{x})^{\nu+\mu} \Gamma(\mu) F\left\{ 0, \frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}; 1; \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{u}^2)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^2)} \right\} = (A \cdot \mathbf{x})^{\nu+\mu} \Gamma(\mu).
\end{aligned} \quad (3.93)$$

На основании этого равенство (3.92) принимает вид:

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot \mathbf{u})^{-\nu} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}), \quad (3.94)$$

где

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}) = 2^{1-\mu} \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-\nu-\mu}}{\Gamma(\mu)} \times \\ \times \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \mathbf{t} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (3.95)$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \quad (3.96)$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (3.94) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = g(\mathbf{y}), \quad (3.97)$$

где: $E_1(\mathbf{x})$ – модельная пирамида (2.66),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = \left(A \cdot \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \right)^{-\nu} f\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right), \\ g(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c},r}}\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (3.97) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1 + \dots + y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1 + \dots + y_{n-2} + \tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2 + \dots + \tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 = g(\mathbf{y}). \quad (3.98)$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} g(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{nc}$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3.99)$$

где $\tilde{a}_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, n$) – элементы обратной матрицы A^{-1} , приходим к следующей формуле решения уравнения (3.97):

$$f(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x})^v \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ 2^{1-\mu} \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-v-\mu}}{\Gamma(\mu)} \times \right. \\ \left. \times \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} F\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \mathbf{t}g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \right\}. \quad (3.100)$$

Таким образом, мы доказали: если уравнение (3.90) разрешимо, то его решение имеет вид (3.100).

Найдем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (3.90) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t})^{-v})$, определенном в (2.77).

На основании формулы (3.97) доказывается следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a, b)$.

Теорема 3.19 [15, Теорема 1; 19, Теорема 1]. *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (3.90) с $v, \mu \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \mu < 1$) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t})^{-v})$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}(\mathbf{x}) \equiv 2^{1-\mu} \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-v-\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} \times \\ \times F\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2}\right) \mathbf{t}g(\mathbf{t})d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1);$$

$$\begin{aligned}
[f_{A_{\mathbf{c}, r}}(\mathbf{x})]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} &= \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c}, r}}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \\
&= \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c}, r}}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0.
\end{aligned}$$

При выполнении этих условий уравнение (3.90) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t})^{-v})$, и его единственное решение дается формулой (3.100).

Доказательство. В модельном случае $A_c(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (3.97), (3.98). В случае произвольной пирамиды $A_c(\mathbf{b})$ оно получается из (3.97), (3.98) после замены переменных (3.96) с учетом (3.99).

Пример решения уравнения (1.23) приведен в приложении Е.

Следствие 3.1 [15, 19, Следствие 1]. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_v^\mu \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad (3.101)$$

с $v, \mu \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \mu < 1$) разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{-v})$ тогда и только тогда, если

$$\begin{aligned}
&f_{E_1}(\mathbf{x}) \mathbf{2}^{1 \cdot \mu} \frac{\mathbf{x}^{-v-\mu}}{\Gamma(\mu)} \times \\
&\times \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{\mu-1} F \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2}{\mathbf{x}^2} \right) \mathbf{t} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1}(L_1)
\end{aligned}$$

и

$$[f_{E_1}(\mathbf{x})]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x} = 0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (3.101) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{-\nu})$ и его единственное решение дается формулой

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ 2^{1-\mu} \frac{\mathbf{x}^{-\nu-\mu}}{\Gamma(\mu)} \times \right. \\ \left. \times \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{\mu-1} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2}{\mathbf{x}^2}\right) \mathbf{t} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}.$$

Выводы по главе 3

Построены $\mathcal{L}_{\nu, 2}$ - и $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -теории для интегральных преобразований с функцией Лежандра первого рода в ядрах. Дана корректная постановка задачи разрешимости уравнений с функцией Лежандра первого рода в пространствах $\mathcal{L}_{\nu, r}$ и выведены формулы их обращения. Дано решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с функцией Лежандра первого рода в ядрах по пирамидальной области в замкнутой форме; получены необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций.

Основные результаты опубликованы в [11; 15; 17; 19; 40; 82].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 831 с.
2. Ахиезер, Н.И. Об обращении некоторых сингулярных интегралов / Н.И. Ахиезер, В.А. Щербина // Уч. зап. Харьк. ун-та. Сер. 4. – 1957. – Т. 80(25). – С. 191–198.
3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – М. : Наука, 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2 : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
5. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М. : Наука, 1977. – 287 с.
6. Вирченко, Н.А. Парные (тройные) интегральные уравнения / Н.А Вирченко. – Киев : Вища школа, 1969. – 160 с.
7. Вирченко, Н.А. Дробные интегральные преобразования гипергеометрического типа / Н.А Вирченко, В.Н. Черенко. – Киев, 1998. – 215 с. – (Препринт / Киев. гос. ун-т).
8. Туан, Ву Ким. Композиционная структура интегральных преобразований / Ву Ким Туан, О.И. Маричев, С.Б. Якубович // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 286, № 4. – С. 786–790.
9. Динь, Хоанг Ань. Интегральные уравнения с функцией Лежандра в исключительных случаях / Хоанг Ань Динь // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33, № 7. – С. 591–594.
10. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, В.П. Прудников. – М. : Наука, 1974. – 542 с.
11. Килбас, А.А. Интегральное уравнение типа Абеля с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Аналитические методы анализа и дифференциальные уравнения : междунар. науч.-практ. конф., Минск, 14–19 сент. 2009 г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2009. – С. 83.
12. Килбас, А.А. О решении интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2006. – № 10. – С. 35–38.

13. Килбас, А.А. Решение интегральных уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовом пространстве суммируемых функций / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 3 – С. 10–15.

14. Килбас, А.А. Решение интегральных уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в пространстве $\mathcal{L}_{v,r}$ / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // X Белорусская математическая конференция : междунар. мат. конф, Минск, 3–7 нояб. 2008 г. : тез. докл. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред.: С.Г. Красовский, А.А. Лепин. – Минск, 2008. – Ч. 3. – С. 19–20.

15. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А. А. Килбас, О.В. Скоромник // Докл. академии наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.

16. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Еругинские чтения – 2007 : XII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16–19 мая 2007 г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2007. – С. 100.

17. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения с функцией Лежандра по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Еругинские чтения – 2009 : XIII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 26–29 мая 2009 г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2009. – С. 97–98.

18. Килбас, А.А. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Тр. Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.

19. Килбас, А.А. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики : материалы VII междунар. науч. конф., Нальчик, 12–17 мая 2009г. / НИИ ПМА ; редкол.: А.В. Псху [и др.]. – Нальчик, 2009. – С 129–131.

20. Килбас, А.А. $\mathcal{L}_{v,r}$ -теория интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах / А.А. Килбас, О.В. Скоромник //

Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 42–50.

21. Килбас, А.А. Обобщенное H -преобразование в весовых пространствах суммируемых функций / А.А. Килбас, Е.К. Щетникович // Вестні НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 2. – С. 14–19.

22. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.

23. Лебедев, Н.Н. О применении сингулярных интегральных уравнений к задаче о распределении электричества на тонких незамкнутых поверхностях / Н.Н. Лебедев // Журн. техн. Физики. – 1948. – Т. 18, вып. 6. – С. 775–784.

24. $L_{v,p}$ -теория интегральных преобразований с H -функцией в ядре / Х.Ю. Глезке [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 2. – С. 10–15.

25. Маричев, О.И. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами / О.И. Маричев, А.А. Килбас, О.А. Репин. – Самара : Изд-во Самар. экон. гос. ун-та, 2008. – 276 с.

26. Маричев, О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул) / О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1978. – 310 с.

27. Михлин, С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1959. – 232 с.

28. Никольский, С.М. Курс математического анализа : в 2 т. / С.М. Никольский. – М. : Наука, 1983. – Т. 2. – 448 с.

29. Преображенский, Н.Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н.Г. Преображенский. – Новосибирск : Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.

30. Прудников, А.П. Интегралы и ряды : в 3 т. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – Т. 2 : Специальные функции. – 752 с.

31. Прудников, А.П. Интегралы и ряды : в 3 т. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1986. – Т. 3 : Дополнительные главы. – 801 с.

32. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов : изд-во Сарат. ун-та, 1992. – 183 с.

33. Решение многомерных гипергеометрических интегральных уравнений типа Абеля / А.А. Килбас [и др.] // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.

34. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

35. Ситник, С.М. Унитарность и ограниченность операторов Вушмана – Эрдейи нулевого порядка гладкости / С.М. Ситник. – Владивосток, 1990. – 45 с. – (Препринт / Ин-т автоматики и процессов управления ДВО АН СССР).

36. Ситник, С.М. Факторизация и оценка норм в весовых Лебеговых пространствах операторов Вушмана – Эрдейи / С.М. Ситник // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 320, № 6. – С. 1326–1330.

37. Скоромник, О.В. Интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в весовом пространстве суммируемых функций / О.В. Скоромник // Еругинские чтения – 2006 : XI междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Гомель, 24–26 мая 2006г. тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 126.

38. Скоромник, О.В. Об условиях области определения и области действия интегральных операторов с функцией Гаусса, представленных в виде композиции односторонних дробных интегралов / О.В. Скоромник // Еругинские чтения – 2005 : X междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 24–26 мая 2005г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Могилев, 2005. – С. 173–174.

39. Скоромник, О.В. О решении интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре / О.В. Скоромник // Богдановские чтения – 2005 : 4-я междунар. матем. конф. по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Минск, 7–10 декаб. 2005 г. : тез. докл. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 2005. – С. 24.

40. Скоромник, О.В. Решение интегральных уравнений с функцией Лежандра в ядрах в $\mathcal{L}_{\eta, r}$ -пространствах / О.В. Скоромник // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2008. – № 13. – С. 68–73.

41. Скоромник, О.В. Решение многомерных гипергеометрических интегральных уравнений типа Абеля / О.В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2011. – № 4. – С. 64–70.

42. Скоромник, О.В. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / О.В. Скоромник, А.П. Мателенок // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2011. – № 2(62). – С. 22–27.

43. Скоромник, О.В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Весн. Вісб. дзярж. ун-та. – 2014. – № 1(79). – С. 12–17.

44. Скоромник, О.В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре по пирамидальной области / О.В. Скоромник // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения : V междунар. науч. конф., Ростов-на-Дону, 26 апр. – 1 мая 2015 г. : тез. докл. / ДГТУ, ЮФУ. – Ростов н/Д., 2015. – С. 210–211.

45. Скоромник, О.В. Решение интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре в классе интегрируемых функций / О.В. Скоромник, Т.А. Александрович // матеріали XVI міжнар наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 14 – 15 трав. 2015 р. – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – Т. 1 : Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – С. 221–223.

46. Скоромник, О.В. Решение одномерных интегральных уравнений типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядрах в классе интегрируемых функций / О.В. Скоромник // Аналитические методы анализа и дифференциальные уравнения : междунар. конф., Минск, 14–19 сент. 2015 г. : тез. докл. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2015. – С. 76.

47. Скоромник, О.В. Решение интегральных уравнений первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией и нормированной функцией Бесселя в ядрах в классе интегрируемых функций / О.В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2015. – № 12. – С. 110–116.

48. Скоромник, О.В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с нормированной функцией Бесселя в ядре по пирамидальной области / О.В. Скоромник // Воронежская зимняя математическая школа С.П. Крейна – 2016 : материалы Межд. науч. конф., 25 – 31 янв. 2016 г. ; ред.: В.А. Костин. – Воронеж : Научная книга, 2016. – С. 362–364.

49. Скоромник, О.В. Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода в пространстве суммируемых функций / О.В. Скоромник // Вестник Полоцкого гос. университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 104–110.

50. Скоромник, О.В. Двумерное интегральное преобразование с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре и интеграль-

ное уравнение первого рода в пространстве суммируемых функций / О.В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 79–84.

51. Скоромник, О.В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре по пирамидальной области / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 2(99). – С. 5–13.

52. Смирнов, М.М. Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре / М.М. Смирнов // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия. – 1981. – Вып. 3, № 13. – С. 117–119.

53. Смирнов, М.М. Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре / М.М. Смирнов // Вест. Ленингр. ун-та. Сер. Математика, механика и астрономия. – 1984. – № 7. – С. 111–113.

54. Снеддон, И.Н. Преобразование Фурье / И.Н. Снеддон. – М. : ИЛ., 1951. – 667 с.

55. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М.–Л. : Гостехиздат, 1948. – 334 с.

56. Уфлянд, Я.Г. Метод парных уравнений в задачах математической физики / Я.Г. Уфлянд. – Л. : Наука, Ленинградское отделение, 1977. – 220 с.

57. Федосов, В.П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск : Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – 106 с.

58. Antipov, M.Ya. Applied Integral Transforms / M.Ya. Antipov, A.A. Kolyshkin, Vaillanrourt Remi // CRM monograph series. – Providence, Rhode Island USA : American Mathematical Society, 1993. – Vol. 2. – 265 p.

59. Betancor, J. J. Boundedness and range of H -transformation on certain weighted L_p -spaces / J. J. Betancor, C. Jerez Dias // Serdica. – 1994. – Vol. 20, № 3/4. – P. 269–297.

60. Braaksma, B. L. J. Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalized functions / B. L. J. Braaksma, A. Shuitman // SIAM J. Math. Anal. – 1976. – Vol. 7, № 6. – P. 771–798.

61. Buschman, R. G. An inversion integral for a general Legendre transformation / R. G. Buschman // SIAM Rev. – 1963. – Vol. 5, № 3. – P. 232–233.

62. Buschman, R. G. Fractional integration / R. G. Buschman // Math. Japon. – 1964. – Vol. 9. – P. 99–105.

63. Copson, E. T. On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type / E. T. Copson, // Arch. Ration. Mech. and Analysis. – 1958. – Vol. 1, № 4. – P. 349–356.

64. Debnath, L. Integral transforms and their applications / L. Debnath. – Boca Raton – Florida : CRC Press, 2000. – 402 p.
65. Dixon, A. L. A class of discontinuous integrals / A. L. Dixon, W. L. Ferrar // Quart. J. Math. – 1936. – Vol. 7. – P.81–96.
66. Erdelyi, A. An integral equation involving Legendre function / A. Erdelyi // J. Soc. Industr. and Appl. Math. – 1964. – Vol. 7, № 1. – P. 15–30.
67. Erdelyi, A. Some integral equations, involving finite parts of divergent integrals / A. Erdelyi // Glasgow Math. J. – 1967. – Vol. 8, № 1. – P. 50–54.
68. Fox, C. The G - and H -functions as symmetrical Fourier kernels / C. Fox // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 98. – P. 401–452.
69. Habibullah, G. M. On integral operator involving a Legendre function / G. M. Habibullah // J. Natur. Sci. and Math. – 1981. – Vol. 21, № 2. – P. 147–153.
70. Heywood, P. Q. On the Hankel and some related transformations / P. Q. Heywood, P. G. Rooney // Canad. J. Math. – 1988. – Vol. 40. – P. 989–1009.
71. Heywood, P. Q. On the Struve transformations / P. Q. Heywood, P. G. Rooney // SIAM J. Math. Anal. – 1994. – Vol. 25. – P. 450–461.
72. Higgins, T. P. A hypergeometric function transform / T. P. Higgins // J. Soc. Industr. and Math. – 1964. – Vol. 12, № 3. – P. 601–612.
73. Integral transforms with H -function kernels in $L_{\nu, r}$ -spaces / H. J. Glaeske [et al.] // Appl. Anal. – 2000. – Vol. 79, № 3/4. – P. 443–474.
74. Kalla, S. L. Integral operators involving hypergeometric function / S. L. Kalla, R. K. Saxena // Math. J. – 1969. – Vol. 108, № 3. – P. 231–234.
75. Kalla, S. L. On integral equation of electrostatic problem / S. L. Kalla // Math. J. Pure and Appl. Sci. – 1975. – Vol. 8, № 3. – P. 291–294.
76. Kilbas, A.A. H -Transforms. Theory and Applications. / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London [etc.] : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
77. Kilbas, A.A. Integral transforms with Fox's H -function in $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -spaces / A.A. Kilbas, M. Saigo, S.A. Shlapakov // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1993. – Vol. 23, № 1. – P. 2–31.
78. Kilbas, A.A. Integral transforms with Fox's H -function in $\mathcal{L}_{\nu, r}$ -spaces / A.A. Kilbas, M. Saigo, S.A. Shlapakov // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1994. – Vol. 24, № 1. – P. 13–38.
79. Kilbas, A.A. Integral transforms with Fox's H -function in spaces of summable functions / A.A. Kilbas, M. Saigo, S.A. Shlapakov // Int. Trans. Spec. Funct. – 1993. – Vol. 1, № 2. – P. 87–103.
80. Kilbas, A.A. Modified H -transforms in $L_{\nu, r}$ -spaces / A.A. Kilbas, M. Saigo // Demonstratio Mathematica. – 2000. – Vol. 33, № 3. – P.603–625.

81. Kilbas, A.A. On integrable solution of multidimensional Abel - type integral equation / A.A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
82. Kilbas, A.A. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $\mathcal{L}_{v,r}$ -spaces / A.A. Kilbas, O.V. Skoromnik // Integral Transforms and Special Functions. – 2009. – Vol. 20, № 9. – P. 653–672.
83. Kiryakova, V. Generalized Fractional Calculus and Applications / V. Kiryakova. – New York : Wiley and Son., 1994. – 205 p.
84. Love, E. R. A hypergeometric integral equations / E. R. Love // Loct. Notes. Math. – 1975. – Vol. 457. – P. 272.
85. Love, E. R. Some integral equations involving hypergeometric functions / E. R. Love // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1967. – Vol. 15, № 3. – P. 169–198.
86. Love, E. R. Two more hypergeometric integral equations / E. R. Love // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1967. – Vol 63, № 4. – P. 1055–1076.
87. Mathai, A. M. The H -Function with Applications in Statistics and Other Disciplines / A. M. Mathai, R. K Saxena. – New York – London – Sydney : Halsted Press book John Wiley, 1978. – 192 p.
88. McBride, A. C. Solution of hypergeometric integral equation involving generalized functions / A. C. McBride // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1975 – Vol. 19, № 3. – P. 265–295.
89. Mellin, H. Abris einer einheitlichen Theorie der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen / H. Mellin // Math. Ann. – 1910. – Vol. 68. – P. 305–337.
90. Multidimensional integral transformations / Yu.A. Brychkov [et al.]. – Philadelphia : Gordon Breach Science Publ., 1992. – 404 p.
91. Pathak, R. S. Intergral transforms of generalized functions and their applications / R. S. Pathak. – Amsterdam : Gordon and Breach Science Publ., 1997. – 467 p.
92. Pincherle, S. Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Note I / S. Pincherle // Atti. Accad. Del Linsei. – 1888. – Vol. 4. – P. 694–700.
93. Prabhakar, T. R. A class of integral equations with Gauss function in the kernels / T. R. Prabhakar // Math. Nachr. – 1972. – Bd. 52, № 1/6. – P. 71–83.
94. Prabhakar, T. R. A new class of hypergeometric integral equations / T. R. Prabhakar, N. K. Kashyap // Indian J. Pure Appl. Math. – 1980. – Vol. 11, № 1. – P. 92–97.

95. Rooney, P. G. On integral transformations with G - function kernels / P. G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1982/83. – Vol. 93. – P. 265–297.
96. Rooney, P. G. On the range of the integral transformation / P. G. Rooney // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, № 4. – P. 545–548.
97. Rooney, P. G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations / P. G. Rooney // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – Sect. A. – 1995. – Vol. 125, № 3. – P. 449–463.
98. Rooney, P. G. On the Y_η and H_η transformations / P. G. Rooney. // Canad. J. Math. – 1989. – Vol. 32. – P. 1021–1044.
99. Samko, S.G. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications / S.G. Samko, A.A. Kilbas. – Yverdon : Gordon and Breach, 1993. – 1112 p.
100. Saxena, R. K. Some properties of generalized Kober operators / R. K. Saxena, R. K. Kumbhat // Vijnana Parishad Anusandhan Patrica. – 1975. – Vol. 18, № 2. – P. 139–150.
101. Shlapakov, S.A. On inversion of H-transform in $\mathcal{L}_{v,r}$ - space / S.A. Shlapakov, M. Saigo, A.A. Kilbas // Intern. J. Math. Sci. – 1998. – Vol. 21, № 4. – P. 713–722.
102. Sneddon, I. N. Application of integral transforms in the theory of elasticity / I. N. Sneddon. – Vienna-New York : International Centre for Math. Sciences, Courses and Lectures. Springer-Verlag, 1975. – 220 p.
103. Sneddon, I. N. Fractional Integrals and Derivatives and Dual Integral Equations / I. N. Sneddon. – North Carolina State College : Appl. Math. Res. Group Ralligh, PSR – 6, 1962. – 40 p.
104. Sneddon, I. N. Mixed boundary problems in potential theory / I. N. Sneddon. – Amsterdam : North-Holland Publ., 1966. – 283 p.
105. Sneddon, I. N. The use of integral transformations / I. N. Sneddon. – New Delhi : THM Edition. McGraw Hill, 1974. – 187 p.
106. Solution of Abel – type hypergeometric integral equation / A.A. Kilbas [et al.] // Math. Model Anal. – 1997. – Vol. 2. – P. 92–104.
107. Solvability of some Abel - type integral equations involving the Gauss hypergeometry function as kernels in the space of summable functions / R.L. Raina [et al.] // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
108. Srivastava, H. M. Convolution Integral Equations with Special Function Kernels / H. M. Srivastava, G. G. Buschman. – New Delhi, Bangalore : Wiley Eastern, 1977. – 164 p.

109. Srivastava, K. N. On some integral transforms / K. N. Srivastava // Math. Japon. – 1961–1962. – Vol. 6, № 3/4. – P. 65–72.
110. Srivastava, H. M. The H-function of One and Two Variables with Applications / H. M. Srivastava, K. C. Gupta, S. L. Goyal. – New-Delhi-Madras : South Asian Publishers, 1982. – 415 p.
111. Srivastava, H. M. Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo // North-Holland Mathematics Studies 204. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – 523p.
112. Wimp, J. Two integral transforms pairs involving hypergeometric functions / J. Wimp // Proc. Glasgow Math. Assoc. – 1965. – Vol. 7, № 1. – P. 42–44.
113. Zayed, A. I. Handbook of function and generalized function transformation / A. I. Zayed. – Boca Raton – New York – London – Tokyo : CRC Press, 1996. – 540 p.
114. Zayed, A. I. Generalized integral transformations / A. I. Zayed // Pure Appl. Math.18. – New York – London – Sydney : Interscience Publ. [John Wiley and Sons], 1968. – 254 p.

Примеры решений уравнений (1.11) – (1.14)

Пусть $c > b > 0$; $c, b \notin \mathbb{N}$; $a - b \notin \mathbb{Z}$; $d > 0$; $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$;

$g(x) = Ax^{\beta-1}\theta(d-x) \in \mathcal{L}_{v-c, r}$ ($A > 0$, $\beta > 0$), $v > c - \beta + 1$, $1 < r < \infty$.

Согласно теоремам 2.22 – 2.25 интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} {}_1I^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{t}\right) \varphi(t) dt = \\ &= Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (A1)$$

при $v < \min(0, a, b, c-b) + 1$;

$$\begin{aligned} {}_2I^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t}{x}\right) \varphi(t) dt = \\ &= Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (A2)$$

при $v < \min(0, b, c-b, c-a-b) + 1$;

$$\begin{aligned} {}_3I^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \int_x^\infty \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{t}\right) \varphi(t) dt = \\ &= Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (A3)$$

при $v > \max(c, c-b, b, a+b)$;

$$\begin{aligned} {}_4I^c(a, b)\varphi(x) &\equiv \int_x^\infty \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t}{x}\right) \varphi(t) dt = \\ &= Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (A4)$$

при $v > \max(c, c-a, c-b, b)$; имеют единственные решения $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, выражаемые соответственно формулами:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^{-a} I_{0+}^{-b} x^a I_{0+}^{b-c} Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \\ \varphi(x) &= x^{-b} I_{0+}^{b-c} x^{c-a} I_{0+}^{-b} x^{a+b-c} Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= I_{0+}^{b-c} x^a I_{0+}^{-b} x^{-a} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \\ \varphi(x) &= x^{a+b-c} I_{0+}^{-b} x^{c-a} I_{0+}^{b-c} x^{-b} A x^{\beta-1} \theta(d-x);\end{aligned}\tag{A6}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{-b} I_-^{b-c} x^{c-a} I_-^{-b} x^{a+b-c} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \\ \varphi(x) &= x^{-a} I_-^{-b} x^a I_-^{b-c} A x^{\beta-1} \theta(d-x);\end{aligned}\tag{A7}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= I_-^{b-c} x^a I_-^{-b} x^{-a} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \\ \varphi(x) &= x^{a+b-c} I_-^{-b} x^{c-a} I_-^{b-c} x^{-b} A x^{\beta-1} \theta(d-x).\end{aligned}\tag{A8}$$

Применяя формулы (2.43) – (2.44) и (2.45) – (2.46) из представлений (A5) – (A8) окончательно получаем:

$$\varphi(x) = A \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(\beta + a + b - c)}{\Gamma(\beta + a - c) \Gamma(\beta + b - c)} x^{\beta-c-1} \theta(d-x), \quad \beta > \max(c-a, c-b, c-a-b);$$

$$\varphi(x) = A \frac{\Gamma(\beta - a) \Gamma(\beta - b)}{\Gamma(\beta - a - b) \Gamma(\beta - c)} x^{\beta-c-1} \theta(d-x), \quad \beta > \max(a, b, c, a+b);$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A \frac{\Gamma(c-a-\beta+1) \Gamma(c-b-\beta+1)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma(c-a-b-\beta+1)} x^{\beta-c-1} \theta(d-x), \\ \beta &< \min(0, c-a, c-b, c-a-b) + 1\end{aligned}$$

$$\varphi(x) = A \frac{\Gamma(c-\beta+1) \Gamma(a+b-\beta+1)}{\Gamma(a-\beta+1) \Gamma(b-\beta+1)} x^{\beta-c-1} \theta(d-x), \quad \beta < \min(a, b, c, a+b) + 1,$$

соответственно для уравнений (A1) – (A4).

Доказательство теоремы 2.26

Теорема 2.26 [13, Теоремы 3 и 4].

Пусть $c, a, b, v, \omega, \sigma \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $1 < r < \infty$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $a - b \notin \mathbb{Z}$, и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы 2.3. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем, имеют место равенства E_j .

Таблица 2.3. – Действие операторов ${}_j I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)$, $j = 1, 2, 3, 4$, из пространства $\mathfrak{L}_{v, r}$ на пространство $\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}$

J	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$v < \delta \min(0, a, b, c - b) + \omega + 1$	${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathfrak{L}_{v, r}$	$\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}$	(2.222)
2	$v < \delta \min(0, b, c - b, c - a - b) + \omega + 1$	${}_2 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathfrak{L}_{v, r}$	$\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}$	(2.223)
3	$v > \delta \max(c, c - b, b, a + b) - \omega$	${}_3 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathfrak{L}_{v, r}$	$\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}$	(2.224)
4	$v > \delta \max(c, c - a, c - b, b) - \omega$	${}_4 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$	$\mathfrak{L}_{v, r}$	$\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}$	(2.225)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим первый случай. Покажем, что ${}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c$ ограниченно действует из $\mathfrak{L}_{v, r}$ на $\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}$, т.е. выполняется:

$$\left\| {}_1 I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b) \varphi \right\|_{\mathfrak{L}_{v - \delta(c-1) - \omega - \sigma - 1, r}} \leq k \|\varphi\|_{\mathfrak{L}_{v, r}},$$

где $k > 0$ – некоторая постоянная.

$$\text{Положим } K(x, t) = \begin{cases} \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2 F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta} \right) t^\omega, & x > t, \\ 0, & x < t \end{cases}$$

где $K(x, t)$ – однородное ядро степени $(\delta(c-1) + \omega)$, т.е. выполняется $K(\lambda x, \lambda t) = \lambda^{\delta(c-1) + \omega} K(x, t)$, $(\lambda > 0)$.

Осуществляя замену $t = x\tau$ и используя однородность ядра, имеем

$$\begin{aligned} \left({}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi \right)(x) &\equiv x^\sigma \int_0^\infty K(x, t)\varphi(t)dt = \\ &= x^{\sigma+1} \int_0^\infty K(x, x\tau)\varphi(x\tau)d\tau = x^{\sigma+\omega+\delta(c-1)+1} \int_0^1 K(1, t)\varphi(xt)dt. \end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (2.7), находим:

$$\begin{aligned} \|K\varphi\|_{\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}} &= \left(\int_0^\infty \left| x^{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1} x^{\sigma+\omega+\delta(c-1)+1} \int_0^1 K(1, t)\varphi(xt)dt \right|^r \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \\ &\leq \int_0^1 |K(1, t)| dt \left(\int_0^\infty x^{vr-1} |\varphi(xt)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} = \left[x = \frac{\tau}{t} \right] = \int_0^1 |K(1, t)| dt \left(\int_0^\infty \frac{\tau^{vr-1}}{t^{vr-1}} |\varphi(\tau)|^r \frac{d\tau}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = \\ &= \int_0^1 |K(1, t)| t^{-v} dt \left(\int_0^\infty \tau^{vr} |\varphi(\tau)|^r \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{r}} = k \|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v, r}}, \end{aligned}$$

$$\text{здесь} \quad k = \int_0^1 |K(1, t)| t^{-v} dt. \quad (\text{Б1})$$

Непосредственно проверяется, что несобственный интеграл (Б1) сходится при $v < \delta \min(a, b) + \omega + 1, \delta > 0, c > 0$.

Таким образом,

$$\left\| {}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c(a, b)\varphi \right\|_{\mathcal{L}_{v-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1, r}} \leq k \|\varphi\|_{\mathcal{L}_{v, r}} \quad (\text{Б2})$$

при выполнении условий $a - b \notin \mathbb{Z}, v < \delta \min(a, b) + \omega + 1, \delta > 0, c > b > 0$.

Рассмотрим оператор $\frac{1}{\delta} M_\sigma N_{\delta 1} I_{0+}^c(a, b) M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_1 I$, где I – тождественный оператор. Так как $\varphi \in \mathcal{L}_{v, r}$, тогда на основании леммы 2.1 оператор $N_1 I$ ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{v, r}$ на пространство $\mathcal{L}_{\frac{v}{\delta}, r}$. Согласно лемме 2.1, оператор $M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1} N_1 I$ ограниченно действует из пространства $\mathcal{L}_{\frac{v}{\delta}, r}$ на пространство $\mathcal{L}_{\frac{v-\omega-1}{\delta}+1, r}$. По теореме 2.20 оператор

${}_1I_{0+}^c(a, b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}I$ ограниченно действует из пространства $\mathfrak{L}_{\frac{v-\omega-1}{\delta}+1, r}$ на пространство $\mathfrak{L}_{\frac{v-\omega-1}{\delta}-c+1, r}$ при выполнении условий $v < \delta \min(0, a, b, c-b) + \omega + 1$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $1 < r < \infty$. На основании леммы 2.1 оператор $N_{\delta}{}_1I_{0+}^c(a, b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}I$ ограниченно действует из пространства $\mathfrak{L}_{\frac{v-\omega-1}{\delta}-c+1, r}$ на пространство $\mathfrak{L}_{v-\omega-\delta(c-1)-1, r}$.

В силу леммы 2.1, оператор $\frac{1}{\delta}M_{\sigma}N_{\delta}{}_1I_{0+}^c(a, b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}I$ ограниченно действует из пространства $\mathfrak{L}_{v-\omega-\delta(c-1)-1, r}$ на пространство $\mathfrak{L}_{v-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1, r}$. Следовательно, оператор $\frac{1}{\delta}M_{\sigma}N_{\delta}{}_1I_{0+}^c(a, b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}I$ ограниченно действует из пространства $\mathfrak{L}_{v, r}$ на пространство $\mathfrak{L}_{v-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1, r}$ при выполнении условий: $v < \delta \min(0, a, b, c-b) + \omega + 1$, $c > b > 0$, $c, b \notin \mathbb{N}$, $1 < r < \infty$.

Это завершает доказательство теоремы 2.26 в первом случае.

Аналогично с использованием леммы 2.1 и результатов теоремы 2.20 доказывается второй случай теоремы 2.26. Третий и четвертый случаи доказываются с использованием леммы 2.1 и теоремы 2.21.

Теорема доказана.

Примеры решений уравнений (1.3) – (1.6)

Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in R, \delta > 0, c > b > 0, c, b \notin N, a - b \notin Z, d > 0$.
 Пусть $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}; g(x) = Ax^{\beta-1}\theta(d-x) \in \mathcal{L}_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1, r} (A \in R, \beta > 0),$
 $1 < r < \infty, \nu > \delta(c-1) + \sigma + \omega - \beta + 2$. Согласно теореме 2.27, теореме 2.28, теореме 2.29, теореме 2.30 интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} {}_1I_{\sigma, \omega; \delta}^c \varphi(x) &\equiv x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta} \right) t^\omega \varphi(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (B1)$$

при $\nu < \delta \min(0, a, b, c-b) + \omega + 1$;

$$\begin{aligned} {}_2I_{\sigma, \omega; \delta}^c \varphi(x) &\equiv x^\sigma \int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta} \right) \times \\ &\times t^\omega \varphi(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (B2)$$

при $\nu < \delta \min(0, b, c-b, c-a-b) + \omega + 1$;

$$\begin{aligned} {}_3I_{\sigma, \omega; \delta}^c \varphi(x) &\equiv x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta} \right) \times \\ &\times t^\omega \varphi(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (B3)$$

при $\nu > \delta \max(c, c-b, b, a+b) - \omega$;

$$\begin{aligned} {}_4I_{\sigma, \omega; \delta}^c \varphi(x) &\equiv x^\sigma \int_x^\infty \frac{(t^\delta - x^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta} \right) \times \\ &\times t^\omega \varphi(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \end{aligned} \quad (B4)$$

при $\nu > \delta \max(c, c-a, c-b, b) - \omega$ имеют единственные решения $\varphi \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, выражаемые соответственно формулами:

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a} I_{0+}^{-b} M_a I_{0+}^{b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \quad (B5)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b} I_{0+}^{b-c} M_{c-a} I_{0+}^{-b} M_{a+b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x);$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} I_{0+}^{b-c} M_a I_{0+}^{-b} M_{-a} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \quad (B6)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c} I_{0+}^{-b} M_{c-a} I_{0+}^{b-c} M_{-b} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x);$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b} I_{-}^{b-c} M_{c-a} I_{-}^{-b} M_{a+b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \quad (B7)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a} I_{-}^{-b} M_a I_{-}^{b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x);$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} I_{-}^{b-c} M_a I_{-}^{-b} M_{-a} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x); \quad (B8)$$

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c} I_{-}^{-b} M_{c-a} I_{-}^{b-c} M_{-b} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} A x^{\beta-1} \theta(d-x).$$

Применяя формулы (2.43) – (2.44) и (2.45) – (2.46) из представлений (B5) – (B8) окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = A \delta \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} + a + b - c\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} + a - c\right) \Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} + b - c\right)} \times \\ \times x^{(1-c)\delta - \sigma + \beta - \omega - 2} \theta(d-x), \end{aligned} \quad (B9)$$

$$\beta > \delta(\max(0, c-a, c-b, c-a-b) - 1) + \sigma + 1;$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = A \delta \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} - a\right) \Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} - b\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} - a - b\right) \Gamma\left(1 - \frac{\sigma - \beta + 1}{\delta} - c\right)} \times \\ \times x^{(1-c)\delta - \sigma + \beta - \omega - 2} \theta(d-x), \end{aligned} \quad (B10)$$

$$\beta > \delta(\max(a, b, c, a+b) - 1) + \sigma + 1;$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = A\delta \frac{\Gamma\left(c-a+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(c-b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(c-a-b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)} \times \\ \times x^{(1-c)\delta-\sigma+\beta-\omega-2} \theta(d-x), \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

$$\beta < \delta \min(0, c-a, c-b, c-a-b) + \sigma + 1;$$

$$\varphi(x) = A\delta \frac{\Gamma\left(c+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(a+b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)} x^{(1-c)\delta-\sigma+\beta-\omega-2} \theta(d-x), \quad (\text{B12})$$

$$\beta < \delta \min(a, b, c, a+b) + \sigma + 1;$$

соответственно для уравнений (B1) – (B4).

Пример решения уравнения (1.22)

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \mathbf{x}^{\beta-1}, \quad (\Gamma 1)$$

где: $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$, $0 < \gamma < 1$, $\beta > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ и $F \left[\alpha, \beta; \gamma; A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) / A \cdot (\mathbf{x}^\sigma) \right]$ – функция вида (2.67).

Согласно теореме 2.31 уравнение (Г1) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) = & \sigma^1 \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} \times \right. \\ & \times F \left[-\alpha, 1 + \beta - \gamma; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \mathbf{t}^{\sigma-1} \mathbf{t}^{\beta-1} d\mathbf{t} \left. \right\} \end{aligned} \quad (\Gamma 2)$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) = & \frac{\Gamma \left(-\alpha + \frac{\beta-2}{\sigma} + 2 \right)}{\Gamma \left(\frac{\beta-2}{\sigma} - \gamma + 3 \right) \Gamma \left(-\alpha + \frac{\beta-2}{\sigma} - \beta + 2 \right)} \times \\ & \times \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ (A \cdot \mathbf{x})^{(1-\gamma)\sigma + \beta - 1} \right\}, \end{aligned}$$

$$\beta > \sigma \max(\alpha - 2, \alpha + \beta - 2, \gamma - 3) + 2.$$

Примеры решений уравнений (1.7) – (1.10)

Пусть $\delta, \gamma, \nu \in R, \gamma < 1, -2\delta - 1 \neq Z, d > 0$. Пусть $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$;
 $g(x) = Ax^{\beta-1}\theta(d-x) \in \mathcal{L}_{\nu+\gamma-1, r} \quad (A \in R, \beta > 0), \quad 1 \leq r < \infty, \quad \nu > 2 - \beta - \gamma$. Согласно теореме 3.18 интегральные уравнения:

$$\left(P_{\delta, 1}^{\gamma} f\right)(x) = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \quad (\text{Д1})$$

при $\nu < \min((- \delta + 1), (\delta + 2)), \delta > -1, \gamma + \delta < 0$;

$$\left(P_{\delta, 4}^{\gamma} f\right)(x) = \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \quad (\text{Д2})$$

при $\nu < \min(1, (\delta - \gamma + 4)), \gamma - \delta < 2, \delta < -1$;

$$\left(P_{\delta, 3}^{\gamma} f\right)(x) = \int_x^{\infty} \left(t^2 - x^2\right)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{x}{t}\right) f(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \quad (\text{Д3})$$

при $\nu > \max\{(2\delta - \gamma + 1), (-\delta - 2)\}, \gamma - \delta < 2, \delta < -1$;

$$\left(P_{\delta, 2}^{\gamma} f\right)(x) = \int_x^{\infty} \left(t^2 - x^2\right)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) f(t) dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x), \quad x > 0, \quad (\text{Д4})$$

при $\nu > \max\{(-\gamma + \delta + 1), (-\gamma - \delta)\}, \delta > -1, \gamma + \delta < 0$;

имеют единственные решения $f \in \mathcal{L}_{\nu, r}$, выражаемые соответственно формулами:

$$f(x) = (2x)^{\delta+1} I_{0+; x^2}^{-\delta-1} I_{0+}^{\gamma+\delta} Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \quad (\text{Д5})$$

$$f(x) = I_{0+}^{\gamma-\delta-2} I_{0+; x^2}^{\delta+1} (2x)^{-\delta-1} Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \quad (\text{Д6})$$

$$f(x) = (x/2)^{\delta+1} I_{-; x^2}^{\gamma-\delta-2} x^{1-\gamma-\delta} I_{-; x^2}^{\delta+1} x^{\gamma-\delta-3} Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \quad (\text{Д7})$$

$$f(x) = 2^{\delta+1} x^{\gamma+\delta+1} I_{-; x^2}^{-\delta-1} x^{1+\delta-\gamma} I_{-}^{\gamma+\delta} x^{-\delta-1} Ax^{\beta-1}\theta(d-x). \quad (\text{Д8})$$

Доказаны леммы.

Лемма Д1. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$ такие, что $\operatorname{Re}(\beta) > 1 - \sigma$.

$$a) \text{ Если } \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \text{ то } \left(I_{0+}^{\alpha} x^{\sigma} t^{\beta-1} \right)(x) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha + \frac{\beta-1}{\sigma}\right)} x^{\beta+\sigma\alpha-1}.$$

$$в) \text{ Если } \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0, \text{ то } \left(D_{0+}^{\alpha} x^{\sigma} t^{\beta-1} \right)(x) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta-1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1 - \alpha + \frac{\beta-1}{\sigma}\right)} x^{\beta-\sigma\alpha-1}.$$

Лемма Д2 Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$.

а) Если $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ и $\sigma \operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta) < 1$, то

$$\left(I_{-;x}^{\alpha} t^{\beta-1} \right)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma}\right)} x^{\beta+\sigma\alpha-1}.$$

в) Если $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ и $\sigma[n - \operatorname{Re}(\alpha)] + \operatorname{Re}(\beta) < 1$, $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$, то

$$\left(D_{-;x}^{\alpha} t^{\beta-1} \right)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma} + \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{\sigma}\right)} x^{\beta-\sigma\alpha-1}.$$

Применяя лемму Д1, лемму Д2, формулы (2.43) – (2.44) и (2.45) – (2.46) из представлений (Д5) – (Д8) окончательно получаем:

$$f(x) = 2^{\delta+1} A \frac{\Gamma(\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma+\delta+\beta+1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+\delta+\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma-\delta+\beta-1}{2}\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (\text{Д9})$$

$$\beta > \max(0, -\delta-\gamma, -\delta-\gamma-1, -\delta+\gamma+1);$$

$$f(x) = 2^{-\delta-1} A \frac{\Gamma(\delta+\beta+1)\Gamma\left(\frac{-\delta+\beta}{2}\right)}{\Gamma(\gamma+\beta-1)\Gamma\left(\frac{\delta+\beta}{2}+1\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (\text{Д10})$$

$$\beta > \max(\delta, -\delta-1, -\delta-2, 1-\gamma);$$

$$f(x) = 2^{-\delta-1} A \frac{\Gamma(3-\gamma-\beta+\delta)\Gamma\left(\frac{-\gamma-\delta-\beta}{2}+1\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{-\gamma+\delta-\beta}{2}+2\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (\text{Д11})$$

$$\beta < \min(1, 3-\gamma+\delta, 4-\gamma+\delta, 2-\gamma-\delta);$$

$$f(x) = 2^{\delta+1} A \frac{\Gamma(2-\gamma-\beta)\Gamma\left(\frac{3+\delta-\beta}{2}\right)}{\Gamma(2+\delta-\beta)\Gamma\left(\frac{1-\delta-\beta}{2}\right)} x^{\gamma+\beta-2} \theta(d-x), \quad (\text{Д12})$$

$$\beta < \min(1-\delta, 2+\delta, 3+\delta, 2-\gamma);$$

соответственно для уравнений (Д1) – (Д4).

Пример решения уравнения (1.23)

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2) \right)^{-\mu/2} P_v^\mu \left[\frac{A \cdot \mathbf{x}}{A \cdot \mathbf{t}} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = (1 \cdot \mathbf{x})^{\beta-1}, \quad (\text{E1})$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, v, \mu, \beta \in \mathbb{R}^n$, $\beta > 0$, $0 < \mu < 1$,

$1 \cdot \mathbf{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $\mathbf{2} = (2, 2, \dots, 2) \in \mathbb{R}_+^n$ и $P_v^\mu \left(\frac{A \cdot \mathbf{x}}{A \cdot \mathbf{t}} \right)$ – функция

вида (2.68).

Согласно теореме 3.19 уравнение (E1) разрешимо в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t})^{-v})$ и его единственное решение дается формулой:

$$f(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x})^v \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \mathbf{2}^{1-\mu} \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-v-\mu}}{\Gamma(\mu)} \times \right. \\ \left. \times \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2))^{\mu-1} F \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \mu; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)}{A \cdot \mathbf{x}^2} \right) \mathbf{t} (1 \cdot \mathbf{t})^{\beta-1} d\mathbf{t} \right\} \quad (\text{E2})$$

или

$$f(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x})^v 2^{-\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2} + |\mu|\right) \Gamma(\mu)} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \times \\ \times \left\{ (A \cdot \mathbf{x})^{-v-\mu-2} (1 \cdot \mathbf{x})^{2\mu+\beta-1} F \left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{\mu}{2}; \frac{\beta+1}{2} + |\mu|; \frac{(1 \cdot \mathbf{x})^2}{A \cdot \mathbf{x}^2} \right) \right\}.$$

**Решение одного класса многомерных интегральных уравнений
с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре**

Рассматривается интегральное уравнение типа Абеля [42]:

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma} \right] \times \quad (\text{Ж1})$$

$$\times \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$$

где: $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n, 0 < \gamma < 1, \sigma \in \mathbb{R}_+^n$ и $F \left[\alpha, \beta; \gamma; A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma) / A \cdot (\mathbf{t}^\sigma) \right]$ – функция вида (2.67).

Уравнение (Ж1) обобщает многомерное уравнение типа Абеля, изученное в [41], которое получается из (Ж1) при $\sigma = 1$.

Используя представление (2.35) для $F \left[\alpha, \beta; \gamma; A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma) / A \cdot (\mathbf{t}^\sigma) \right]$ в (Ж1) и умножая обе части уравнения (Ж1) на $(A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} (A \cdot \mathbf{x}^\sigma)^\alpha$, представим его в виде:

$$\frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\gamma-1} (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha \times \quad (\text{Ж2})$$

$$\times F \left[\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_1(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \quad f_1(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} (A \cdot \mathbf{x}^\sigma)^\alpha f(\mathbf{x}).$$

Заменяя $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где: $\sigma^1 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$;

$\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} t_2^{\sigma_2-1} \cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$ и изменяя порядок интегрирования согласно формуле (2.69), имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r(\mathbf{x})}} (A \cdot \mathbf{u}^\sigma)^\alpha \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\gamma-1} \times \\
& \times F \left[\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma} \right] F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \times \\
& \times (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\
& = \int_{A_{\mathbf{c}, r(\mathbf{x})}} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} f_1(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned} \tag{Ж3}$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x} \}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в (Ж3) введем новые переменные

$$s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}, \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Используя соотношения $1 - s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}$ ($j = 1, \dots, n$) и формулу (2.32),

для внутреннего интеграла в (Ж3) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\gamma} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\gamma-1} F \left[\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma} \right] \times \\
& \times F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\
& = (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 s_j^{-\gamma_j} (1 - s_j)^{\gamma_j-1} \left[1 - s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right]^{-\alpha_j \sigma_j + \sigma_j - 1} \times \right. \\
& \times F \left\{ \alpha_j, \gamma_j - \beta_j; \gamma_j; \left[(1 - s_j) \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right] / \left[1 - s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right] \right\} \times \\
& \left. \times F \left\{ -\alpha_j, 1 - \beta_j; 1 - \gamma_j; s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right\} ds_j \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma) (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} F\left\{0, 1-\beta; 1; \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)}\right\} = \\
&= \Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma) (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}.
\end{aligned}$$

На основании этого равенство (Ж3) принимает вид:

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot \mathbf{u}^\sigma)^\alpha \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x}), \quad (\text{Ж4})$$

$$\begin{aligned}
f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta}(\mathbf{x}) &= \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma-\sigma+1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} \times \\
&\times F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned} \quad (\text{Ж5})$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \quad (\text{Ж6})$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$.

Переписываем (Ж4) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = g(\mathbf{y}), \quad (\text{Ж7})$$

где $E_1(\mathbf{x})$ – модельная пирамида (2.66),

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{\tau}) &= \left(A \cdot \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right)^\sigma \right)^\alpha \varphi\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right), \\
g(\mathbf{y}) &= f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma,\alpha,\beta} \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \prod_{j=1}^n d_j.
\end{aligned}$$

Для обращения уравнения (Ж7) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1+\dots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+\dots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2+\dots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\tau) d\tau_1 = g(\mathbf{y}). \quad (\text{Ж8})$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} g(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1, \dots, n), \quad (\text{Ж9})$$

где $\tilde{a}_{jk} \quad (j, k=1, \dots, n)$ – элементы обратной матрицы A^{-1} , приходим к следующей формуле решения уравнения (Ж1):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) = & \sigma^1 (A \cdot \mathbf{x}^\sigma)^{-\alpha} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma-\sigma+1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} \times \right. \\ & \left. \times F \left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha \mathbf{t}^{\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{Ж10})$$

Таким образом, если уравнение (Ж1) разрешимо, то его решение имеет вид (Ж10).

Приведем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (Ж1) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{x})^\alpha)$:

$$L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{x})^\alpha) = \left\{ f(\mathbf{x}) : (A \cdot \mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x}) \in L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})) \right\}, \quad (\text{Ж11})$$

где пространство $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ определяется (2.79)

Если $A = E$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и $r=0$, (Ж11) принимает вид

$$L_1(E_1(\mathbf{b}); \mathbf{x}^\alpha) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x}) \in L_1(E_1(\mathbf{b})) \right\},$$

где пространство $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ определяется в (2.83).

Справедлива теорема.

Теорема Ж1 [42, Теорема 1]. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (Ж1) с $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \gamma < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) &= \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} \times \\ &\times F\left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \times \\ &\times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma - 1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x})]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} &= \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \\ &= \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0. \end{aligned}$$

При выполнении этих условий уравнение (Ж1) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}); (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha)$ и его единственное решение дается формулой (Ж10).

Следствие Ж1 [42, Следствие 1]. Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\gamma - 1} F\left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)}{\mathbf{t}^\sigma}\right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \quad (\text{Ж12})$$

где $\alpha, \beta, \sigma, \gamma \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \gamma < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$, разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{\alpha\sigma})$ тогда и только тогда, если

$$f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times$$

$$\times F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{x}^\sigma}\right] \mathbf{t}^{2\sigma-2} \sigma^1 f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1}(L_1)$$

и

$$[f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x})]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (Ж12) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{\alpha\sigma})$ и его единственное решение дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^{-\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \sigma^1 \mathbf{x}^{-\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\mathbf{x}^{\alpha\sigma-\sigma+1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \right. \\ &\quad \left. \times F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma}{\mathbf{x}^\sigma}\right] \mathbf{t}^{2\sigma-2} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \end{aligned}$$

**Решение трех классов интегральных уравнений первого рода
с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера
и нормированной функцией Бесселя в ядрах в классе интегрируемых функций**

Рассматриваются интегральные уравнения [46,47]:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) f(t) dt = g(x), \quad x > a, \quad (31)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda \sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) f(t) dt = g(x), \quad x > a, \quad (32)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] f(t) dt = g(x), \quad x > a, \quad (33)$$

где $\sigma > 0$; $0 < \alpha < 1$; $\lambda > 0$ – некоторый действительный параметр;

${}_1F_1(a; c; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера), определяемая по формуле [34, 99 §1; 111, §1.6]

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty, \quad (34)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса (2.26);

$\bar{J}_\nu(z)$ – нормированная функция Бесселя (функция Бесселя – Клиффорда), определяемая по формуле [34; 99, §37.1]

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z), \quad |z| < \infty; \quad (35)$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [34, 99, §1.3; 4]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu + k + 1)k!}. \quad (36)$$

Будем считать, что $a > -\infty$ и уравнения (31) – (33) рассматриваются на конечном отрезке $[a, b]$.

Уравнения (31) – (33) обобщают соответствующие интегральные уравнения в [34, 99, §37.1], получающиеся из (31) – (33) при $\sigma = 1$ соответственно.

Нам понадобятся интегральная теорема сложения для функции Кумера (34) [3, п. 6.10, формула (15)]

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a; c; u) \frac{(t-u)^{c'-1}}{\Gamma(c')} {}_1F_1(a'; c'; t-u) du = \\ & = \frac{t^{c+c'-1}}{\Gamma(c+c')} {}_1F_1(a+a'; c+c'; t), \quad \operatorname{Re}(c) > 0, \operatorname{Re}(c') > 0; \end{aligned} \quad (37)$$

второй интеграл Сонина для функции Бесселя (36) [4, п. 7.7 формула (4)]

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sqrt{\tau^\mu (t-\tau)^\nu} J_\mu(\alpha\sqrt{\tau}) J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau}) d\tau = \\ & = 2\alpha^\mu \beta^\nu \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^{-(\nu+\mu+1)}} J_{\nu+\mu+1}\left(t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \\ & \operatorname{Re}(\mu) > -1, \operatorname{Re}(\nu) > -1; \end{aligned} \quad (38)$$

интегральная формула типа свертки для функции Бесселя (36) [4, п. 7.7 формула (6)]:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tau^\mu J_\mu(\tau) (t-\tau)^\nu J_\nu(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) t^{\nu+\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} J_{\nu+\mu+\frac{1}{2}}(t); \quad (39) \\ & \operatorname{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}, \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Сначала дадим формальное решение уравнения (31). Заменяя в (31) x на t и t на u , умножая обе части полученного равенства на

$$\left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1}$$

и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt \times \\ & \times \int_a^t \left(t^\sigma - u^\sigma\right)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t^\sigma - u^\sigma)) f(u) du = \\ & = \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt; \quad x > a. \end{aligned} \quad (310)$$

Равенство (310) после изменения порядка интегрирования в его левой части согласно формуле (2.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u) du \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t^\sigma - u^\sigma)) \times \\ & \times {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ & = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \end{aligned} \quad (311)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (311) введем новые переменные

$$s = \lambda(x^\sigma - t^\sigma).$$

Используя формулу (37), для внутреннего интеграла в (311) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \times \\ & \times {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(t^\sigma - u^\sigma)) {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ & = \Gamma(1-\alpha) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda(x^\sigma - u^\sigma)} s^{(1-\alpha)-1} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; s) \times \\ & \times (\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s) ds = \\ & = \Gamma(1-\alpha) {}_1F_1(0; 1; \lambda(x^\sigma - u^\sigma)) = \Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (311) принимает вид:

$$\int_a^x f(u) du = f_{\lambda, \alpha, \beta}(x), \quad (312)$$

где

$$f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (313)$$

После дифференцирования обеих частей равенства (312) получаем

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (314)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (31) разрешимо, то его решение необходимо имеет вид (314).

Дадим теперь формальное решение уравнения (32). Заменяя в нем x на t и t на u , умножая обе части полученного равенства на $(x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1}$ и интегрируя, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} dt \times \\ & \times \int_a^t (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}) f(u) du = \\ & = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt, \quad x > a. \end{aligned} \quad (315)$$

Равенство (315) после изменения порядка интегрирования в его левой части согласно формуле (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u) du \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \times \\ & \times \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}) \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ & = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt, \quad x > a. \end{aligned} \quad (316)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (316) делаем замену $s = \lambda(x^\sigma - t^\sigma)$. Далее по формуле (35) выражаем функцию Бесселя – Клиффорда $\bar{J}_\nu(z)$ через функцию Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ (36), используем формулу (38), для внутреннего интеграла в (316) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^\sigma - u^\sigma}) \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ & = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sqrt{\lambda}}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda(x^\sigma - u^\sigma)} \sqrt{s^{-\alpha}(\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s)^{\alpha-1}} J_{-\alpha}(\sqrt{\lambda}\sqrt{s}) \times \\ & \times J_{\alpha-1}(\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda(x^\sigma - u^\sigma) - s}) ds = \Gamma(1-\alpha) J_0(\sqrt{2\lambda}\lambda(x^\sigma - u^\sigma)). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (316) принимает вид:

$$\int_a^x J_0(\sqrt{2\lambda}\lambda(x^\sigma - u^\sigma)) f(u) du = f_{\lambda, \alpha}(x), \quad (317)$$

где $f_{\lambda, \alpha}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt.$ (318)

После дифференцирования (317), учитывая, что $J_0(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, получаем

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda\sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (319)$$

Таким образом, если уравнение (32) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (319).

Аналогичным образом находим решение уравнения (33). Заменяя в (33) x на t и t на u , умножая обе части полученного равенства на $(x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1}$ и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} dt \times \\ & \times \int_a^t (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}[\lambda(t^\sigma - u^\sigma)] f(u) du = \\ & = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt, \quad x > a. \end{aligned} \quad (320)$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (320) по формуле (2.6), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(u) du \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \times \\ & \times \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}[\lambda(t^\sigma - u^\sigma)] \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} dt = \\ & = \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \end{aligned} \quad (321)$$

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (321) делаем замену $s = \lambda(x^\sigma - t^\sigma)$. Далее по формуле (35) выражаем функцию Бесселя – Клиффорда $\bar{J}_\nu[z]$ через функцию Бесселя первого рода $J_\nu[z]$ (36), используем формулу (39), для внутреннего интеграла в (321) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} (t^\sigma - u^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}}[\lambda(t^\sigma - u^\sigma)] \times \\ & \times \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma^1 t^{\sigma-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2 \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} J_0(\lambda(x^\sigma - u^\sigma)). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (321) принимает вид:

$$\int_a^x J_0(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)) f(t) dt = f_{*}^{\lambda, \alpha}(x), \quad (322)$$

где

$$f_{\lambda, \alpha}^*(x) = \frac{2\Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (323)$$

После дифференцирования (322), учитывая, что $J_0(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, получаем

$$f(x) = \sigma \frac{2\Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] t^{\sigma-1} g(t) dt. \quad (323)$$

Таким образом, если уравнение (33) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (323).

Докажем теоремы, которые дают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (31) – (33) в пространстве

$L_1(a, b) = \left\{ f(x) : \int_a^b |f(t)| dt < \infty \right\}$ в терминах вспомогательных функций

$f_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$, $f_{\lambda, \alpha}(x)$ и $f_{\lambda, \alpha}^*(x)$ соответственно. При доказательстве исполь-

зуюм тот факт, что пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций [22, с. 338; 28, с. 368–369]:

$$g(x) \in AC([a, b]) \Leftrightarrow g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt, \quad \int_a^b |\varphi(t)| dt < \infty, \quad (324)$$

поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $g'(x)$.

Теорема 1 [47, теорема 1]. Для того чтобы уравнение (31), $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0, \lambda > 0$, было разрешимо в пространстве $L_1(a, b)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1[-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt \in AC([a, b])$$

и $f_{\lambda, \alpha, \beta}(a) = 0$. (325)

При выполнении условий (325) уравнение (31) имеет единственное решение, определяемое формулой (314).

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (31) разрешимо в $L_1(a, b)$. Тогда справедливы все рассуждения, приведенные выше (при этом возможность перестановки порядка интегрирования в (310) обосновывается с помощью теоремы Фубини (2.6) и, следовательно, справедливо (312). Отсюда, в силу (324), следуют условия (325).

Достаточность. Так как $f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) \in AC([a, b])$, то

$f'_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \frac{d}{dx} f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) \in L_1(a, b)$. Поэтому функция, представляемая формулой (314), существует почти всюду и принадлежит $L_1(a, b)$. Покажем, что она дает решение уравнения (31). Для этого подставим ее в левую часть уравнения (31) и результат обозначим через $\varphi(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) f'_{\lambda, \alpha, \beta}(t) dt = \varphi(x). \quad (326)$$

Покажем, что почти всюду $\varphi(x) = g(x)$, что и докажет теорему. Равенство (326) есть уравнение (31) относительно $f'_{\lambda, \alpha, \beta}(t)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому в силу (314)

$$f'_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} \varphi(t) dt,$$

т.е. $f'_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \varphi'_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$. Функции $f_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$ и $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$ абсолютно непрерывны: первая – по предположению, вторая – в силу равенства (312) с $\varphi(x)$ в правой части. Поэтому $f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) - \varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = c$. По предположению $f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = 0$, $\varphi_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = 0$, потому что (326) – разрешимое уравнение. Отсюда $c = 0$, так что

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} (g(t) - \varphi(t)) dt = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение вида (31). В силу единственности решения $g(t) - \varphi(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (31) сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$. Следующая лемма и следствие из нее дают достаточное условие в терминах самой функции $g(x)$.

Лемма 1 [47, лемма 1]. Если $g(x) \in AC([a, b])$, то и $f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) \in AC([a, b])$, при этом справедливо представление

$$f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) + \int_a^x g'(t) (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) dt \right). \quad (327)$$

Доказательство. Подставляем на основании (324) функцию $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(s) ds$ в формулу (313), имеем

$$\begin{aligned} f_{\lambda, \alpha, \beta}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \\ &\times \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} \left(g(a) + \int_a^t g'(s) ds \right) dt = \\ &= \frac{g(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) + \\ &+ \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} dt \int_a^t g'(s) ds. \end{aligned} \quad (328)$$

Здесь первое слагаемое – абсолютно непрерывная функция, так как выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \left(x^\sigma - a^\sigma\right)^{1-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 2-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) = \\ & \sigma(1-\alpha) \int_a^x \left(t^\sigma - a^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(t^\sigma - a^\sigma)) t^{\sigma-1} dt. \end{aligned}$$

Поскольку имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \int_a^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} dt \int_a^t g'(s) ds = \\ & = \int_a^x \left[\int_a^t \left(t^\sigma - s^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(t^\sigma - s^\sigma)) \sigma s^{\sigma-1} g'(s) ds \right] dt \end{aligned} \quad (329)$$

(что проверяется непосредственной перестановкой порядка интегрирования в обеих его частях), то и второе слагаемое в (328) является первообразной от суммируемой функции и, следовательно, абсолютно непрерывно. Представление (327) следует из (328) после перестановки порядка интегрирования. Лемма доказана.

Следствие 1 [47, Следствие 1]. Если функция $g(x) \in AC([a, b])$, то уравнение типа Абеля (1.1) разрешимо при $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ в $L_1(a, b)$, при этом его решение (2.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \left(g(a) \left(x^\sigma - a^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - a^\sigma)) x^{\sigma-1} + \right. \\ & \left. + \int_a^x \left(x^\sigma - s^\sigma\right)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - s^\sigma)) s^{\sigma-1} g'(s) ds \right). \end{aligned} \quad (330)$$

Доказательство. Действительно, условия разрешимости $g(x) \in AC([a, b])$ и $f_{\lambda, \alpha, \beta}(a) = 0$ выполнены в силу леммы 1 и формул (328), (330). Так как выполняется соотношение $f(x) = \frac{d}{dx} f_{\lambda, \alpha, \beta}(x)$, то формула (330) получается дифференцированием равенства (327), что возможно в силу (329).

Аналогично доказательству теоремы 1 для уравнения (32) устанавливаем следующую теорему.

Теорема 2 [47, Теорема 2]. Для того чтобы уравнение (32), $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, было разрешимо в пространстве $L_1(a, b)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$f_{\lambda, \alpha}(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt \in AC([a, b])$$

$$\text{и } f_{\lambda, \alpha}(a) = 0. \quad (331)$$

При выполнении условий (331) уравнение (32) имеет единственное решение, определяемое формулой (319).

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (32) сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{\lambda, \alpha}(x)$. Аналогично доказательствам леммы 1 и следствия 1 доказываются соответственно лемма 2 и следствие 2, которые дают достаточные условия задачи разрешимости уравнения (32) в терминах самой функции $g(x)$.

Лемма 2 [47, Лемма 2]. Если функция $g(x) \in AC([a, b])$, то и функция $f_{\lambda, \alpha}(x) \in AC([a, b])$, при этом справедливо представление

$$f_{\lambda, \alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{1-\alpha} \bar{J}_{1-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - a^\sigma}) + \right. \\ \left. + \int_a^x g'(t) (x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha} \bar{J}_{1-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - t^\sigma}) dt \right). \quad (332)$$

Следствие 2 [47, Следствие 2]. Если $g(x) \in AC([a, b])$, то уравнение типа Абеля (32) разрешимо при $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$ в $L_1(a, b)$, при этом решение (319) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \left(g(a) (x^\sigma - a^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - a^\sigma}) x^{\sigma-1} + \right. \\ \left. + \int_a^x (x^\sigma - s^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}(\lambda \sqrt{x^\sigma - s^\sigma}) s^{\sigma-1} g'(s) ds \right). \quad (333)$$

Таким образом, получены еще две формы (330) и (333) обращения уравнений (31) и (32) соответственно, применимые к абсолютно непрерывным правым частям $g(x)$.

Аналогично доказательству теоремы 1 для уравнения (33) устанавливаем следующую теорему.

Теорема 3 [45, теорема1]. Для того чтобы уравнение (33), $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, было разрешимо в пространстве $L_1(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{\lambda, \alpha}^*(x) = \frac{2\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}[\lambda(x^\sigma - t^\sigma)] \sigma t^{\sigma-1} g(t) dt \in AC([a, b])$$

и $f_{\lambda, \alpha}^*(a) = 0$.

При выполнении этих условий уравнение (33) имеет единственное решение, определяемое формулой (323).

Интегральные преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и нормированной функцией Бесселя в ядрах и интегральные уравнения первого рода

Рассмотрим интегральные преобразования в левых частях (И1) – (И3):

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(x) &\equiv \int_0^x \frac{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_1F_1(\beta; \alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \sigma t^{\sigma-1} f(t) dt = g(x), \quad x > a; \end{aligned} \quad (\text{И1})$$

$$\begin{aligned} (A_{a+}^{\alpha, \lambda} f)(x) &\equiv \int_0^x \frac{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{(\alpha-1)/2}(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \times \\ &\times \sigma t^{\sigma-1} f(t) dt = g(x), \quad x > a; \end{aligned} \quad (\text{И2})$$

$$\begin{aligned} (B_{a+}^{\alpha, \lambda} f)(x) &\equiv \int_0^x \frac{(x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{\alpha/2-1}(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \times \\ &\times \sigma t^{\sigma-1} f(t) dt = g(x), \quad x > a, \end{aligned} \quad (\text{И3})$$

с действительными параметрами $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$, β , содержащие вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера ${}_1F_1(a; c; z)$ (34) и нормированную функцию Бесселя $\bar{J}_\nu(z)$ (35) в ядрах [49].

Будем считать, что $a > -\infty$ и преобразования в левых частях (И1) – (И3) рассматриваются на конечном отрезке $[a, b]$.

Конструкции вида (И1) – (И3) обобщают соответствующие интегральные преобразования в [34, 99, § 37.1] при $\sigma = 1$.

Интегралы

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > a); \\ (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x < b), \end{aligned} \quad (\text{И4})$$

где $\text{Re}(\alpha) > 0$, называются интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка α [34, 99, §2]. Первый из них называют левосторонним, а второй –

правосторонним. Операторы I_{a+}^α , I_{b-}^α называют операторами дробного интегрирования.

Каждое из выражений

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \\ (D_{b-}^\alpha f)(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_b^\infty \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b, \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1, \end{aligned}$$

называется дробной производной порядка $\alpha \in C$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, соответственно левосторонней и правосторонней. Дробный интеграл порядка $\alpha \in C$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, функции $\varphi(x)$ по функции $g(x)$ определяется формулой (см. [34; 99, §18.2])

$$(I_{a+; g}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(g(x) - g(t))^{1-\alpha}} g'(t) dt, \quad x > a.$$

В частности, дробный интеграл порядка $\alpha \in C$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, функции $\varphi(x)$ по функции x^σ ($x > a$, $\sigma \in R$) по определению равен

$$(I_{a+; x^\sigma}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\sigma-1} \varphi(t)}{(x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha}} dt, \quad (x > a) \quad (\text{И5})$$

а соответствующая дробная производная порядка α ($\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$) функции $\varphi(x)$ по функции x^σ ($x > a$, $\sigma \in R$) имеет вид:

$$(D_{a+; x^\sigma}^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n (I_{a+; x^\sigma}^{n-\alpha} f)(x), \quad (x > a; n = \operatorname{Re}[\alpha] + 1). \quad (\text{И6})$$

Мы будем использовать для них следующие обозначения для $\alpha \in C$:

$$I_{a+; x^\sigma}^\alpha \varphi = \begin{cases} I_{a+; x^\sigma}^\alpha \varphi, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ D_{a+; x^\sigma}^{-\alpha} \varphi, & \operatorname{Re} \alpha \leq 0; \end{cases}.$$

В данном приложении преобразования (И1) – (И3) изучаются в пространствах $L_p = L_p(\Omega)$ [34, 99, §1.2], измеримых на $\Omega = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, функций $f(x)$, вообще говоря, комплекснозначных, для

которых $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$, где $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке Ω , если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \dots, n$, такой, что $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

Класс всех таких функций обозначается $AC(\Omega)$ [34, 99, §1.1]. Известно, что пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций [22, с. 338; 28, с. 368 – 369]:

$$g(x) \in AC([a, b]) \Leftrightarrow g(x) = c + \int_a^x f(t) dt, \quad \int_a^b |f(t)| dt < \infty,$$

поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $g'(x)$.

Через $I_{a+}^\alpha(L_p(a, b))$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, обозначим класс функций $g(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом (И4) порядка α от суммируемой функции: $g = I_{a+}^\alpha f$, $f \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$ [34, 99, §2.6].

Через $I_{a+; x^\sigma}^\alpha(L_p(a, b))$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, обозначим класс функций $g(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α функции $f(x)$ по функции x^σ ($x > a$, $\sigma \in R$) (И5) от суммируемой функции $f(x)$: $g = I_{a+; x^\sigma}^\alpha f$, $f \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.

Введем пространство

$$I_{a+}^{m(\alpha)}(L_p(a, b)) = \begin{cases} L_p(a, b), & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ I_{a+}^{-\alpha}(L_p(a, b)), & \operatorname{Re} \alpha < 0, \end{cases} \quad -\infty < a < b < +\infty,$$

где функция $m(\alpha)$ определяется в (2.48).

Введем также некоторые функциональные пространства. $C^m([a, b])$ означает класс функций, m раз непрерывно дифференцируемых на отрезке

$[a, b]$ с нормой $\|f\|_{C^m} = \max_{x \in \Omega} \sum_{k=1}^m |f^{(k)}(x)|$, $m = 0, 1, \dots$, $\|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_C$. Через

$H^\lambda([a, b])$ обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на отрезке $[a, b]$ условию Гельдера фиксированного порядка λ : $|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^\lambda$ для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$, где A – постоянная.

Теорема И1 [34, 99, теорема 37.1]. Операторы в левых частях (И1) – (И3) при $\sigma=1$ ограничено действуют из пространства $L_p(a, b)$, $p \geq 1$, на пространство $I_{a+}^\alpha(L_p(a, b)) \subset L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Теорема И2 [34, 99, теорема 18.1]. Класс функций, представимых дробным интегралом $I_{a+;g}^\alpha \varphi$, $0 < \alpha < 1$, от функции из $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, не зависит от выбора функции $g(x)$:

$$I_{a+;g}^\alpha(L_p) = I_{a+}^\alpha(L_p),$$

если $g(x) \in C^1([a, b])$, $g'(x) \in H^\lambda([a, b])$ и имеет место $g'(x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$. При этом

$$I_{a+;g}^\alpha \varphi = I_{a+}^\alpha \psi, \quad \psi(x) = [g'(x)]^\alpha \varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial \Phi(x, s)}{\partial x} \varphi(s) ds \in L_p,$$

где: $\Phi(x, s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} g'(x) \int_s^x (x-u)^{-\alpha} (u-s)^{\alpha-1} h(s, u) du$;

$$h(s, u) = \left[\frac{u-s}{g(u)-g(s)} \right]^{1-\alpha} = \left[\int_s^x g'(u+(s-u)\xi) d\xi \right]^{\alpha-1}.$$

Преобразование Лапласа функции $f(x)$ ($x > 0$) определяется формулой [34, 99, формула (1.119)]

$$Lf = (L f)(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{И7})$$

При $\text{Re}(b) > 0$, $\text{Re}(s) > \max(0, \text{Re } k)$, $|s| > k$, имеем место формула [3, формула 6.10(5)]

$$\begin{aligned} L\{t^{b-1} {}_1F_1(a, c; kt); s\} &= \Gamma(b) s^{-b} {}_2F_1(a, b; c; ks^{-1}) = \\ &= \Gamma(b) (s-k)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{k}{k-s}\right), \quad |s-k| > |k|. \end{aligned} \quad (\text{И8})$$

Обобщенное преобразование Лапласа функции $f(x)$ ($x > 0$) определяется формулой [76, формулы 2.5.26, 3.3.3]:

$$(L_{k, \alpha} f)(s) = \int_0^\infty (st)^{-\alpha} e^{-|k|(st)^{1/k}} f(t) dt, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{И9})$$

Нам понадобятся формулы [30, формула (2.12.8.3) и формула (2.12.8.4) для случаев I_v^{v+1} и I_v^{v+2}]

$$\int_0^\infty e^{-px} J_v(cx) dx = \frac{c^v}{\sqrt{p^2 + c^2}} \left(p + \sqrt{p^2 + c^2} \right)^{-v}, \text{Re } p > |\text{Im } c|; \text{Re } v > -1; \quad (\text{И10})$$

$$\int_0^\infty x^v e^{-px} J_v(cx) dx = \frac{(2c)^v}{\sqrt{\pi}} \left(p^2 + c^2 \right)^{-v-\frac{1}{2}} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right), \text{Re } v > -\frac{1}{2}; \quad (\text{И11})$$

$$\int_0^\infty x^{v+1} e^{-px} J_v(cx) dx = \frac{2p(2c)^v \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \left(p^2 + c^2 \right)^{v+\frac{3}{2}}}, \text{Re } v > -1. \quad (\text{И12})$$

В силу равенства $\bar{J}_v(0) = \bar{I}_v(0) = 1$ получаем

$$I_{a+; \sigma}^{\alpha, \beta, 0} = A_{a+; \sigma}^{\alpha, 0} = B_{a+; \sigma}^{\alpha, 0} = C_{a+; \sigma}^{\alpha, 0} = I_{a+; x^\sigma}^\alpha. \quad (\text{И13})$$

Это позволяет операторы в левых частях (И1) – (И3) считать некоторыми обобщениями интегралов дробного порядка α функции $\phi(x)$ по функции x^σ ($I_{0+; x^\sigma}^\alpha$), определяемых по формуле (И5).

Исходя из представлений ядер указанных операторов через ряды и воспользовавшись формулой удвоения (2.25), выписываем следующие формулы, отражающие структуру операторов (И1) – (И3):

$$I_{a+; \sigma}^{\alpha, \beta, \lambda} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\beta)_k}{k!} \lambda^k I_{a+; x^\sigma}^{\alpha+k} = I_{a+; x^\sigma}^\alpha \left(E - \lambda I_{a+; x^\sigma}^1 \right)^{-\beta}, \quad (\text{И14})$$

$$A_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha/2)_k}{k!} (-\lambda^2)^k I_{a+; x^\sigma}^{\alpha+2k} = I_{a+; x^\sigma}^\alpha \left(E + \lambda^2 I_{a+; x^\sigma}^2 \right)^{-\alpha/2}, \quad (\text{И15})$$

$$B_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{(\alpha+1)}{2} \right)_k \frac{(-\lambda^2)^k}{k!} I_{a+; x^\sigma}^{\alpha+2k} = I_{a+; x^\sigma}^\alpha \left(E + \lambda^2 I_{a+; x^\sigma}^2 \right)^{-(\alpha+1)/2}, \quad (\text{И16})$$

где E – единичный оператор.

Отмеченная в (И13) связь с дробными интегралами (И5) дает возможность заключить, что операторы (И1) – (И3) обладают в пространстве

$L_p = L_p(a, b)$ таким же действием, как и оператор $I_{a+; x^\sigma}^\alpha$. Справедлива теорема.

Теорема И3 [49, Теорема 3]. Операторы в левых частях (И1) – (И3) ограничено действуют из пространства $L_p(a, b)$, $p \geq 1$, на пространство $I_{a+; x^\sigma}^\alpha(L_p(a, b))$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < b < \infty$.

Доказательство непосредственно следует из свойств ${}_1F_1(a; c; 0) = \bar{J}_v(0) = 1$, теоремы И1 и теоремы И2 для случая функции $g(x) = x^\sigma$, $\sigma > 0$.

Если в (И1) – (И3) $a = 0$ или $a > 0$, но функция $f(t)$ доопределена нулем на интервал $0 < t < a$, то применяем обобщенное преобразование Лапласа (И9) с параметрами $k = 1/\sigma$, $\alpha = 1 - \sigma$ к левым частям равенств (И1) – (И3), пользуясь формулами (И8), (И10) – (И12), получаем соответственно:

$$\begin{aligned} (L_{1/\sigma, 1-\sigma} I_{0+; \sigma}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(s) &= (s^\sigma / \sigma)^{-\alpha} \left(1 - \lambda (s^\sigma / \sigma)^{-1}\right)^{-\beta} \times \\ &\times (L_{1/\sigma, 1-\sigma} f)(s), \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0; \end{aligned} \quad (\text{И17})$$

$$\begin{aligned} (L_{1/\sigma, 1-\sigma} A_{0+; \sigma}^{\alpha, \lambda} f)(s) &= \left((s^\sigma / \sigma)^2 + \lambda^2 \right)^{-\alpha/2} \times; \\ &\times (L_{1/\sigma, 1-\sigma} f)(s), \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im} \lambda| \end{aligned} \quad (\text{И18})$$

$$\begin{aligned} (L_{1/\sigma, 1-\sigma} B_{0+; \sigma}^{\alpha, \lambda} f)(s) &= (s^\sigma / \sigma) \left((s^\sigma / \sigma)^2 + \lambda^2 \right)^{-(\alpha+1)/2} \times \\ &\times (L_{1/\sigma, 1-\sigma} f)(s), \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im} \lambda|. \end{aligned} \quad (\text{И19})$$

Сравнивая правые части формул (И17) – (И19) с правыми частями формул (И14) – (И16), замечаем, что первые три формулы получаются из (И14) – (И16) заменой $I_{a+; x^\sigma}^1$ на $(s^\sigma / \sigma)^{-1}$. Действительно, непосредственно проверяя, получаем

$$(L_{1/\sigma, 1-\sigma} I_{0+; x^\sigma}^\alpha f)(s) = (s^\sigma / \sigma)^{-\alpha} (L_{1/\sigma, 1-\sigma} f)(s), \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов преобразований (И1) – (И3).

Как показывают формулы (И17) – (И19), обобщенные преобразования Лапласа $(L_{1/\sigma, 1-\sigma}h)(s)$ ядер $h(x)$ операторов (И1) – (И3) и соответствующие им обратные величины $\left[(L_{1/\sigma, 1-\sigma}h)(s) \right]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования $I_{0+; x^\sigma}^\alpha$, которому соответствует $(L_{1/\sigma, 1-\sigma}h)(s) = (s^\sigma / \sigma)^{-\alpha}$ с условием $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, для обобщенного преобразования Лапласа $(s^\sigma / \sigma)^\alpha$ ядра обратного оператора $D_{0+; x^\sigma}^\alpha$ условие $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ вынуждает нас представить $(s^\sigma / \sigma)^\alpha$ в виде $(s^\sigma / \sigma)^\alpha = (s^\sigma / \sigma)^n (s^\sigma / \sigma)^{-(n-\alpha)}$, где $\operatorname{Re}(n-\alpha) > 0$, причем значению $(s^\sigma / \sigma)^n$ соответствует оператор [34; 99, равенство (18.12)].

$$\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1} dx} \right)^n = x^{1-\sigma} \left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}} \right)^n x^{\sigma-1} = D_{0+; x^\sigma}^n.$$

Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении операторов (И1) – (И3).

Учтя сказанное, построим решение уравнения (И1) $(I_{a+; \sigma}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(x) = g(x)$, $x > 0$. Пользуясь формулой (И17) и равенством ${}_1F_1(a, c; x) = e^x {}_1F_1(c-a, c; -x)$ [3, формула 6.3(7)], формально приходим к следующему представлению решения уравнения (И1):

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\{ \left(I_{a+; \sigma}^{\alpha, \beta, \lambda} \right)^{-1} g \right\}(x) = I_{a+; x^\sigma}^{-\alpha} \left(E - \lambda I_{a+; x^\sigma}^1 \right)^\beta g(x) = \\ &= \frac{\sigma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(x^\sigma - t^\sigma)) t^{\sigma-1} g'(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{И20})$$

Аналогичным образом, исходя из (И18), (И19), формально выписываются следующие представления для обратных к (И2), (И3)-операторов:

$$f(x) = \left\{ \left(A_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} \right)^{-1} g \right\}(x) = \left(A_{a+; \sigma}^{-\alpha, \lambda} g \right)(x) = A_{a+; \sigma}^{2-\alpha, \lambda} \left(I_{a+; x^\sigma}^{-2} + \lambda^2 \right) g(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x (x^\sigma - t^\sigma)^{1-\alpha} \bar{J}_{(1-\alpha)/2}(\lambda(x^\sigma - t^\sigma)) \left(\frac{d^2}{\sigma t^{\sigma-1} dt^2} + \lambda^2 \right) g(t) dt; \quad (\text{И21})$$

$$f(x) = \left\{ \left(B_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} \right)^{-1} g \right\} (x) = I_{a+; x^\sigma}^1 \left(A_{a+; \sigma}^{-\alpha-1, \lambda} g \right) (x). \quad (\text{И22})$$

Следующие теоремы дают условия обратимости операторов (И1) – (И3).

Теорема И4 [49, Теорема 4]. Пусть задано уравнение $(I_{a+; \sigma}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(x) = g(x)$, $0 \leq a < x < b < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$; $g(x)$ – заданная на $[a, b]$ функции; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a > 0$ полагается, что $f(x) = g(x) = 0$ при $0 < x < a$), тогда его решение f в классе $L_p(a, b)$, $b < \infty$, существует и единственно, если $g(x) \in I_{a+; x^\sigma}^\alpha (L_p(a, b))$, $p \geq 1$. В случае $p = 1$ оно может быть представлено формулой (И20), если еще выполняются дополнительные условия $g(x) \in AC([a, b])$, $g(a) = 0$.

Теорема И5 [49, Теорема 5]. Пусть задано уравнение $(A_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} f)(x) = g(x)$, $0 \leq a < x < b < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$; $g(x)$ – заданная на $[a, b]$ функции; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a > 0$ полагается, что $f(x) = g(x) = 0$ при $0 < x < a$), тогда его решение f в классе $L_p(a, b)$, $b < \infty$, существует и единственно, если $g(x) \in I_{a+; x^\sigma}^\alpha (L_p(a, b))$, $p \geq 1$. В случае $p = 1$ оно может быть представлено формулой (И21), если еще выполняются дополнительные условия $g(x) \in AC([a, b])$, $g(a) = 0$.

Теорема И6 [49, Теорема 6]. Пусть задано уравнение $(B_{a+; \sigma}^{\alpha, \lambda} f)(x) = g(x)$, $0 \leq a < x < b < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$; $g(x)$ – заданная на $[a, b]$ функции; $f(x)$ – искомая функция (в случае $a > 0$ полагается, что $f(x) = g(x) = 0$ при $0 < x < a$), тогда его решение f в классе $L_p(a, b)$, $b < \infty$, существует и единственно, если $g(x) \in I_{a+; x^\sigma}^\alpha (L_p(a, b))$, $p \geq 1$. В случае $p = 1$ оно может быть представлено формулой (И22), если еще выполняются дополнительные условия $g(x) \in AC([a, b])$, $g(a) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих обобщенных преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций g и f .

**Двумерное интегральное преобразование
с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера
в ядре и интегральное уравнение первого рода
в пространстве суммируемых функций**

Рассмотрим интегральное преобразование в левой части (К1):

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f\right)(\mathbf{x}) \equiv \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} > \mathbf{a}, \quad (\text{K1})$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$; $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2$ – векторы;

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^2 x_k t_k \text{ – их скалярное произведение, в частности } \mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^2 x_k$$

для $\mathbf{1} = (1, 1)$;

$\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, x_2 > t_2$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$;

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2, \quad \lambda_i > 0 \quad (i=1, 2); \quad \beta = (\beta_1, \beta_2) \in R^2; \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2) \in R^2;$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad (i=1, 2);$$

$$k = (k_1, k_2) \in N = N \times N \quad (k_1 \in N, k_2 \in N) \text{ – индекс с } k! = k_1! k_2! \text{ и}$$

$$|k| = k_1 + k_2; \quad D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2}};$$

$$d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2; \quad (\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha-1} = (x_1-t_1)^{\alpha_1-1} (x_2-t_2)^{\alpha_2-1}; \quad f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2);$$

$F(\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t}))$ – функция вида

$$\begin{aligned} F(\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{t})) &= \prod_{j=1}^2 {}_1F_1(\beta_j; \alpha_j; \lambda_j(x_j - t_j)) = \\ &= {}_1F_1(\beta_1; \alpha_1; \lambda_1(x_1 - t_1)) \cdot {}_1F_1(\beta_2; \alpha_2; \lambda_2(x_2 - t_2)), \end{aligned}$$

представляющая собой произведение вырожденных гипергеометрических функций Куммера ${}_1F_1(a; c; z)$ (34).

Областью интегрирования оператора преобразования в левой части (К1) является прямоугольник с противоположными вершинами $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$:

$$\left\{ \mathbf{x} : x = (x_1, x_2) \in R^2, -\infty < a_1 < x_1 < \infty, -\infty < a_2 < x_2 < \infty \right\};$$

в частности, это может быть октант с вершиной $\mathbf{x} = (x_1, x_2) : \left\{ \mathbf{x} : x = (x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_1 < \infty, 0 \leq x_2 < \infty \right\}$.

Конструкция вида (K1) обобщает соответствующее одномерное интегральное преобразование в [34, 99, §37.1].

В данном приложении преобразование (K1) изучается в пространстве $L_{\bar{p}}(\Omega) = L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$ ($i=1, 2$), $\bar{p} = (p_1, p_2)$ ($1 \leq p_i < \infty$, $i=1, 2$), функций $f(x_1, x_2)$, имеющих конечную норму [34, 99, §24.4]:

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left\{ \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right\}^{1/p_2} < \infty. \quad (\text{K2})$$

Даются условия ограниченности оператора преобразования в левой части (K1), описание образа этого оператора, а также устанавливается формула его обращения. Рассматривается также соответствующее интегральное уравнение первого рода с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера в ядре. Устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для соответствующего одномерного интегрального уравнения первого рода [34, 99, §37.1; 49].

Выражение

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \varphi \right)(\mathbf{x}) = \left(I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} \varphi \right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\varphi(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}} d\mathbf{t}, \quad \alpha > 0, \quad (\text{K3})$$

определенное для функций $\varphi(x)$, заданных при $x_1 > a_1$, $x_2 > a_2$, будем называть (левосторонним) смешанным дробным интегралом Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

$$\left(D_{\mathbf{a}+}^{\alpha} f \right)(\mathbf{x}) = \left(D_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} f \right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{K4})$$

называют смешанной дробной производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ [34, 99, § 24.2]. Выражение (K4) определено для функций, заданных на $x_1 > a_1, x_2 > a_2$.

Мы будем использовать для них следующие обозначения:

$$I_{a+}^{\alpha} \varphi = \begin{cases} I_{a+}^{\alpha} \varphi, & \alpha > 0, \\ D_{a+}^{-\alpha} \varphi, & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Введем пространство

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) &= I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \\ &= \left\{ f : f = I_{a_1+, a_2+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} \varphi, \varphi \in L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), -\infty < a_i < b_i < \infty, i = 1, 2 \right\} \end{aligned} \quad (K5)$$

функций, являющихся смешанными дробными интегралами от функций из пространства (K2) $L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $1 < p_1 < \frac{1}{\alpha_1}$, $1 < p_2 < \frac{1}{\alpha_2}$; $0 \leq \alpha_1 < 1$, $0 \leq \alpha_2 < 1$.

Пространство $I_{a+}^{\alpha}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ играет ту же роль для уравнения (K1), что и пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [34, 99, §2.2].

Теорема K1 [34, 99, теорема 25.2]. Пусть $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq q_i \leq \infty$, $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2$). Левосторонний оператор смешанного дробного интегрирования (K5) $I_{a+}^{\alpha} = I_{a_1, a_2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_i < 1$, $1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}$, $q_i = \frac{p_i}{1 - \alpha_i p_i}$ ($i = 1, 2$).

Из теоремы K1 следует

$$I_{a+}^{\alpha}(L_{p_1, p_2}) \subset L_{q_1, q_2}(R^2), \quad q_i = \frac{p_i}{1 - \alpha_i p_i} \quad (i = 1, 2). \quad (K6)$$

Теорема K2 [34; 99, теорема 37.1]. Одномерный оператор преобразования

$$\left(I_{a+}^{\alpha, \beta, \lambda} f \right)(x) \equiv \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(\beta; \alpha; \lambda(x-t)) f(t) dt \quad (x > a)$$

ограниченно действует из пространства $L_p(a, b)$, $p \geq 1$, на пространство $I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b)) \subset L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Преобразование Лапласа функции $f(x)$ ($x > 0$) определяется формулой [34, 99, формула (1.119)]

$$Lf = (L f)(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Сверткой для преобразования Лапласа является интеграл [111, формула 1.4.10]

$$[h * \varphi] = [h * \varphi](x) = \int_0^x h(x-t)\varphi(t) dt;$$

теорема о свертке [111, формула 1.4.12]

$$L[h * \varphi](s) = L(h)(s)L(\varphi)(s). \quad (K7)$$

При выполнении условий $\operatorname{Re}(b) > 0$, $\operatorname{Re}(s) > \max(0, \operatorname{Re} k)$, $|s| > k$, имеем место формула [111, формула 6.10(5)]:

$$\begin{aligned} L\{t^{b-1} {}_1F_1(a, c; kt); s\} &= \Gamma(b)s^{-b} {}_2F_1(a, b; c; ks^{-1}) = \\ &= \Gamma(b)(s-k)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{k}{k-s}\right) |s-k| > |k|. \end{aligned} \quad (K8)$$

Двумерное преобразование Лапласа функции $f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$ ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) определяется формулой [34, 99, формула 24.49]:

$$Lf = (Lf)(s) = \int_0^{\mathbf{x}} e^{-st} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad s = (s_1, s_2), \quad s_1 > 0, s_2 > 0; \quad \mathbf{x} \in R_{++}^2 = R_+ \times R_+, \quad (K9)$$

где R_{++}^2 – октант $\{t: t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$.

Свертка Лапласа двух функций $h(\mathbf{t}) = h(t_1, t_2)$ и $\varphi(\mathbf{t}) = \varphi(t_1, t_2)$ определяется через интеграл [111, формула 1.4.21]:

$$h * \varphi \equiv [h * \varphi](\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}-\mathbf{t})\varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} \in R_{++}^2 = R_+ \times R_+), \quad (K10)$$

где $\int_0^{\mathbf{x}} := \int_0^{x_1} \int_0^{x_2}$; $h(\mathbf{x}-\mathbf{t}) = h(x_1-t_1, x_2-t_2)$.

Для свертки (K10) теорема (K7) также выполняется.
Справедлива формула [34, 99, формула 24.50]:

$$(L I_{0+}^{\alpha} f)(s) = s^{-\alpha} (Lf)(s), \quad (K11)$$

где
$$(I_{0+}^{\alpha} f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{f(\mathbf{t})}{(\mathbf{x}-\mathbf{t})^{1-\alpha}} d\mathbf{t}, \alpha > 0.$$

В силу равенства ${}_1F_1(a; c; 0) = 1$ получаем

$$I_{a+}^{\alpha, \beta, 0} = I_{a+}^{\alpha}. \quad (K12)$$

Это позволяет оператор в левой части (K1) считать некоторым обобщением смешанного дробного интеграла порядка α , определяемого по формуле (K3).

Исходя из представления ядра оператора преобразования (K1) через ряд (34) и воспользовавшись формулой (2.24), выводим следующую формулу, отражающую структуру оператора (K1):

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha, \beta, \lambda} &= I_{a_1+}^{\alpha_1, \beta_1, \lambda_1} I_{a_2+}^{\alpha_2, \beta_2, \lambda_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_k}{k!} \lambda_1^k I_{a_1+}^{\alpha_1+k} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta_2)_k}{k!} \lambda_2^k I_{a_2+}^{\alpha_2+k} = \\ &= I_{a_1+}^{\alpha_1} \left(E - \lambda_1 I_{a_1+}^1 \right)^{-\beta_1} I_{a_2+}^{\alpha_2} \left(E - \lambda_2 I_{a_2+}^1 \right)^{-\beta_2} = I_{a+}^{\alpha} \left(E - \lambda I_{a+}^1 \right)^{-\beta}, \end{aligned} \quad (K13)$$

где E – единичный оператор.

Отмеченная в (K12) связь с дробным интегралом (K3) дает возможность заключить, что оператор (K1) обладает в пространстве $L_{\bar{p}}(R^2)$ таким же действием, как и оператор I_{a+}^{α} . Справедлива теорема.

Теорема K3. [50, Теорема 3]. Оператор в левой части (K1) ограниченно действует из пространства $L_{p_1, p_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $p \geq 1$, на пространство $I_{a+}^{\alpha}(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$,

$$1 < p_1 < \frac{1}{\alpha_1}, 1 < p_2 < \frac{1}{\alpha_2}; 0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, -\infty < \mathbf{a} < \mathbf{b} < \infty.$$

Доказательство непосредственно следует из свойства ${}_1F_1(a; c; 0) = 1$ и теорем K1 и K2.

Если в (K1) $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{a} > 0$, но функция $f(\mathbf{t})$ доопределена нулем на интервал $0 < \mathbf{t} < \mathbf{a}$, то применяем двумерное преобразование Лапласа (K9) к левой части равенства (K1). Записываем оператор (K1) как свертку Лапласа (K10). Тогда по теореме о свертке (K7), вычислив преобразование Лапласа ядра по формуле (K11), получаем следующее значение преобразования Лапласа равенства (K1):

$$\begin{aligned} (L I_{0+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(s) &= \int_0^\infty e^{-s_2 x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t_2)^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_2)} F(\beta_2; \alpha_2; \lambda_2 (x_2 - t_2)) dt_2 \times \\ &\times \int_0^\infty e^{-s_1 x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - t_1)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} F(\beta_1; \alpha_1; \lambda_1 (x_1 - t_1)) f(t_1, t_2) dt_1 = s^{-\alpha} (1 - \lambda s^{-1})^{-\beta} (Lf)(s), \quad (K14) \\ s_1 > 0, s_2 > 0; \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0. \end{aligned}$$

Сравнивая правую часть формулы (K14) с правой частью формулы (K13), замечаем, что она получается из (K13) заменой $\Gamma_{\mathbf{a}+}^1$ на s^{-1} .

Рассмотрим вопрос об обращении оператора преобразования (K1).

Как показывает формула (K14), преобразование Лапласа $(Lh)(s)$ ядра $h(\mathbf{x})$ оператора (K1) и соответствующая ему обратная величина $[(Lh)(s)]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования I_{0+}^α , которому соответствует $(Lh)(s) = s^{-\alpha}$ с условием $\text{Re}(\alpha) > 0$, для преобразования Лапласа s^α ядра обратного оператора D_{0+}^α условие $\text{Re}(\alpha) > 0$ вынуждает нас представить s^α в виде $s^\alpha = s^n s^{-(n-\alpha)}$, где $\text{Re}(n - \alpha) > 0$, причем значению s^n соответствует оператор $\left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^n = D_{0+}^n$ [34; 99, равенство (18.12)]. Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении оператора (K1).

Учтя сказанное, построим решение уравнения (K1) $(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} > \mathbf{a}$. Пользуясь формулой (K14) и равенством

${}_1F_1(a, c; x) = e^x {}_1F_1(c - a, c; -x)$ [3, формула 6.3(7)], формально приходим к следующему представлению решения уравнения (K1):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \left\{ \left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} \right)^{-1} g \right\}(\mathbf{x}) = I_{\mathbf{a}+}^{-\alpha} \left(E - \lambda I_{\mathbf{a}+}^1 \right)^{\beta} g(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} (\mathbf{x} - \mathbf{t})^{-\alpha} {}_1F_1(-\beta; 1-\alpha; \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{t})) \frac{dg(\mathbf{t})}{d\mathbf{t}}. \end{aligned} \quad (\text{K15})$$

Следующая теорема дает условия обратимости оператора (K1).

Теорема K4. [50, Теорема 4]. Пусть задано уравнение (K1):

$$\left(I_{\mathbf{a}+}^{\alpha, \beta, \lambda} f \right)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad 0 \leq a_i < x_i < b_i < \infty, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \lambda_i > 0 \quad (i=1, 2);$$

где: $g(\mathbf{x})$ – заданная на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R \times R$ функции;

$f(\mathbf{x})$ – искомая функция (в случае $\mathbf{a} > 0$ полагается, что $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0$ при $0 < x < \mathbf{a}$).

Тогда его решение f в классе $L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{b} < \infty$, существует и единственно, если $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \left(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)$, $\bar{p} \geq 1$.

В случае $\bar{p} = (p_1, p_2) = (1, 1)$ оно может быть представлено формулой (K15), если еще выполняются дополнительные условия $g(\mathbf{x}) \in I_{\mathbf{a}+}^{\alpha} \left(L_{\bar{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)$, $g(\mathbf{a}) = g(a_1, a_2) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих обобщенных преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций g и f .

**Решение многомерного интегрального уравнения
первого рода с функцией Куммера в ядре
по пирамидальной области**

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид [43]:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\alpha-1} F[\beta; \alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \times$$

$$\times f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}), \quad (\text{Л1})$$

где $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1, \sigma \in \mathbb{R}_+^n$ и $F[\beta; \alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)]$ – функция вида

$$F[\beta; \alpha; \mathbf{x}] = \prod_{j=1}^n {}_1F_1[\beta_j; \alpha_j; x_j]$$

представляющая собой произведение вырожденных гипергеометрических функций (функций Куммера) ${}_1F_1(a; c; z)$, определяемых по формуле (34).

Нам понадобится интегральная теорема сложения для функции Куммера (34) [3, п. 6.10, формула (15)]:

$$\int_0^t \frac{u^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a; c; u) \frac{(t-u)^{c'-1}}{\Gamma(c')} {}_1F_1(a'; c'; t-u) du =$$

$$= \frac{t^{c+c'-1}}{\Gamma(c+c')} {}_1F_1(a+a'; c+c'; t), \quad \operatorname{Re}(c) > 0, \operatorname{Re}(c') > 0. \quad (\text{Л2})$$

Сначала дадим формальное решение уравнения (Л1). Заменяя в (Л1) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на $\left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1}$, где $\sigma^1 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} t_2^{\sigma_2-1} \cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} \times$$

$$\times \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{t})} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\alpha-1} F[\beta; \alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} =$$

$$= \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (\text{Л3})$$

$\mathbf{x} \in A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}).$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (Л3) согласно формуле (2.69), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\alpha-1} \times \\ & \times F[\beta; \alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)] F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \quad (\text{Л4}) \\ & = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \end{aligned}$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x} \}.$

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (Л4) введем новые переменные

$$s_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \quad (j=1, \dots, n).$$

Используя формулу (Л2), для внутреннего интеграла в (Л4) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\alpha-1} \times \\ & \times F[\beta; \alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)] F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\ & = \Gamma(1-\alpha) \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_j)} \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{(1-\alpha_j)-1} F[-\beta_j; 1-\alpha_j; s_j] \times \right. \\ & \times \left. \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right)^{\alpha_j-1} F[\beta_j; \alpha_j; \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j] ds_j \right] = \\ & = \Gamma(1-\alpha) F\{0; 1; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\} = \Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (Л4) принимает вид:

$$\int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}), \quad (\text{Л5})$$

$$f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \times$$

$$\times F\left[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (\text{Л6})$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right), \quad (\text{Л7})$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (Л5) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \quad (\text{Л8})$$

где $E_1(\mathbf{x})$ – модельная пирамида (2.66),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right), \quad \varphi(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (Л8) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1+\dots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+\dots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2+\dots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}_1 = \varphi(\mathbf{y}). \quad (\text{Л9})$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \varphi(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1, \dots, n), \quad (\text{Л10})$$

где $\tilde{a}_{jk}$ ($j, k=1, \dots, n$) – элементы обратной матрицы A^{-1} .

Приходим к следующей форме решения уравнения (Л1):

$$f(\mathbf{x}) = \sigma^1 \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \times \right. \\ \left. \times F \left[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \quad (\text{Л11})$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (Л1) разрешимо, то его решение имеет вид (Л11).

Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (Л1) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ (2.79).

Нам потребуется пространство (2.78)

$$I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})) \right\}.$$

Напомним, что пространство $I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (Л1), что и пространство $AC([a, b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [34, 99, §2.2]. Отметим, что если $\varphi \in I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}).$$

В частности, если $A = E$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, то (2.79) и (2.78) принимают вид (2.83) и (2.82) соответственно:

$$L_1(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\},$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}), (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})) \right\},$$

где $h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(\mathbf{x}).$

Теорема Л1. [43, Теорема 1]. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (Л1) с $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \times \\ \times F[-\beta; 1-\alpha; A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1) \quad (\text{Л12})$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \\ = \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0. \quad (\text{Л13})$$

При выполнении этих условий уравнение (Л1) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой (Л11).

Доказательство. В модельном случае $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (Л8), (Л9). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ оно получается из (Л8), (Л9) после замены переменных (Л7) с учетом (Л10).

Следствие 1 [43, Следствие 1]. Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} F[\beta; \alpha; \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \quad (\text{Л14})$$

с $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ тогда и только тогда, если

$$f_{E_1}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} \times \\ \times F[-\beta; 1-\alpha; \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1}(L_1)$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (Л14) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\lambda, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \\ &= \sigma^1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} F[-\beta; 1-\alpha; \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \end{aligned}$$

**Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля
с функцией Бесселя-Клиффорда в ядре
по пирамидальной области**

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}), \quad (\text{M1})$$

где: $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^1$) – пирамида (2.65);

$\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ и $\bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right]$ – функция вида:

$$\bar{J}_v[\mathbf{x}] = \prod_{j=1}^n \bar{J}_{v_j}[x_j] \quad (v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n),$$

представляющая собой произведение функций Бесселя–Клиффорда $\bar{J}_\mu(z)$, определяемых по формуле [34, 99, §37.1], (И5).

Уравнение (M1) при $\sigma = 1$ обобщает соответствующее одномерное интегральное уравнение [34, 99, §37.1].

Нам понадобится интегральная формула типа свертки для функции Бесселя (M1) [2(1), 7.7(6)]:

$$\int_0^t \tau^\mu J_\mu(\tau) (t-\tau)^v J_v(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) t^{v+\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(v+\mu+1)} J_{v+\mu+\frac{1}{2}}(t), \quad (\text{M2})$$

$$\left(\operatorname{Re}(\mu) > -\frac{1}{2}, \operatorname{Re}(v) > -\frac{1}{2} \right).$$

Сначала дадим формальное решение уравнения (M1). Заменяем в (M1) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$\left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\sigma^1 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} t_2^{\sigma_2-1} \dots t_n^{\sigma_n-1}$,

Интегрируем результат по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} \times \\
& \times \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{t})} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \\
& = \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).
\end{aligned} \tag{M3}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (M3) согласно формуле (2.69), имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\alpha-1} \times \\
& \times \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right] \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\
& = \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned} \tag{M4}$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x} \}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (M4) вводим новые переменные

$$s_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Далее по формуле (И5) выражаем функцию Бесселя – Клиффорда $\bar{J}_\mu[z]$ через функцию Бесселя $J_\mu[z]$, используем формулу (M2), для внутреннего интеграла в правой части (M4) получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \left(A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right)^{\alpha-1} \times \\
& \times \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right] \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{-\alpha_j} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}}[s_j] \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right)^{\alpha_j-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times \bar{J}_{\frac{\alpha_j-1}{2}} \left[\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right] ds_j \right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\Gamma\left(1 - \frac{\alpha_j}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha_j+1}{2}\right) \int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{-\alpha_j} \left(\frac{s_j}{2}\right)^{\frac{\alpha_j}{2}} J_{\frac{\alpha_j}{2}}(s_j) \times \right. \\
&\quad \times \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right)^{\alpha_j-1} \left(\frac{\left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right)}{2} \right)^{\frac{1-\alpha_j}{2}} \times \\
&\quad \left. \times J_{\frac{\alpha_j-1}{2}} \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right) ds_j \right] = \\
&= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} s_j^{-\frac{\alpha_j}{2}} J_{\frac{\alpha_j}{2}}(s_j) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right)^{\frac{\alpha_j-1}{2}} J_{\frac{\alpha_j-1}{2}} \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - s_j \right) ds_j \right] = \\
&= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \\
&\quad \times \mathbf{t}^{\frac{-\alpha+\alpha-1+1}{2}} J_{\frac{-\alpha+\alpha-1+1}{2}} \left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right) = \\
&= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} J_0 \left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) \right),
\end{aligned}$$

где $\mathbf{2} = (2, 2, \dots, 2)$, $\boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \dots, \pi)$.

Применяя в последнем выражении дважды формулу дополнения для гамма-функции $\Gamma(z)$ [34; 99, формула (1.60)]: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, окончательно для внутреннего интеграла в правой части (M4)

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} J_0\left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) = \\ & = \frac{\pi\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2\pi\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} J_0\left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)} J_0\left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) \end{aligned}$$

где $\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi\alpha_1)\sin(\pi\alpha_2) \cdots \sin(\pi\alpha_n)$.

На основании этого равенство (M4) принимает вид:

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}),$$

или

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \quad (\text{M5})$$

или

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} f^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}),$$

где $f^*(\mathbf{t}) = J_0\left(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right) f(\mathbf{t})$,

$$\begin{aligned} f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) &= \frac{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha} \times \\ &\times \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}}\left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (\text{M6})$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \quad (\text{M7})$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (M5) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \quad (\text{M8})$$

где $E_1(\mathbf{y})$ – модельная пирамида (2.66),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f^* \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right), \quad \varphi(\mathbf{y}) = f_{A\mathbf{c}, r}^{\lambda, \alpha} \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (M8) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1 + \dots + y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1 + \dots + y_{n-2} + \tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2 + \dots + \tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \quad (\text{M9})$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \varphi(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1, \dots, n), \quad (\text{M10})$$

где $\tilde{a}_{jk}$ ($j, k=1, \dots, n$) – элементы обратной матрицы A^{-1} , и $J_0(A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)) = J_0(0) = 1$, приходим к следующей формуле решения уравнения (M1):

$$f(\mathbf{x}) = \sigma^1 \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha)}{\pi} \times \right. \\ \left. \times \int_{A\mathbf{c}, r(\mathbf{x})} \left(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right)^{-\alpha} \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}} [A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \quad (\text{M11})$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (M1) разрешимо, то его решение имеет вид (M11).

Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (M1) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$.

Теорема M1 [51, Теорема 1]. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (M1) с $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \times \\ \times \bar{J}_{-\frac{\alpha}{2}} \left[A \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c}, r}}(L_1) \quad (\text{M12})$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \\ = \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c}, r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0. \quad (\text{M13})$$

При выполнении этих условий уравнение (M1) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой (M11).

Доказательство. В модельном случае $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (M8), (M9). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b})$ оно получается из (M8), (M9) после замены переменных (M7) с учетом (M10).

Следствие M1 [51, Следствие 1]. Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\frac{\alpha-1}{2}} \left[\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma) \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \quad (\text{M14})$$

с $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) и $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$ разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ тогда и только тогда, когда

$$f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} \times \\ \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1}(L_1)$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1 \cdot \mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (M14) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \\ = \sigma^1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{\frac{\alpha}{2}} [\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)] \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}.$$

Научное издание

СКОРОМНИК Оксана Валерьевна

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
С ФУНКЦИЯМИ ГАУССА И ЛЕЖАНДРА В ЯДРАХ
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА**

Редактор: *И. Н. Чапкевич*
Дизайн обложки: *М. С. Мухоморовой*

Подписано в печать 27.12.19. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 10,44. Уч.-изд. л. 8,93. Тираж 100 экз. Заказ 1052.

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.