Многомерное H-преобразование и его модификации в весовых пространствах измеримых по Лебегу функций

С. М. Ситник (Белгород, Россия)
О. В. Скоромник, М. В. Папкович (Новополоцк, Беларусь)

Рассматриваются многомерное интегральное H-преобразование [1]:

$$(\mathrm{H}f)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{H}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\mathbf{xt} \,\middle|\, \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \overline{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \overline{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \right] f(\mathbf{t})\mathbf{dt}, \qquad \mathbf{x} > 0; \tag{1}$$

и отдельные его модификации. Здесь (см., например, [1]; [2, §28.4]) $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum\limits_{n=1}^{n} x_n t_n$; $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, ..., x_n > t_n$: $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \cdots \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}$; $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathrm{N}_0 \times ... \times \mathrm{N}_0$; $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; $\mathbf{dt} = dt_1 \cdots dt_n$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, ..., t_n)$; $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $m_1 = ... = m_n$; $\mathbf{n} = (\overline{n}_1, ..., \overline{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $\overline{n}_1 = \overline{n}_2 = ... = \overline{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $p_1 = p_2 = ... = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{N}_0^n$ and $q_1 = q_2 = ... = q_n$ $(0 \le \mathbf{m} \le \mathbf{q},\ 0 \le \mathbf{n} \le \mathbf{p})$; $\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n})$, $1 \le i \le \mathbf{p}$, $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} \in \mathbb{C}$ $(i_1 = 1, 2, ..., p_1; ...; i_n = 1, 2, ..., p_n)$; $\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n})$, $1 \le j \le \mathbf{q}$, $b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_n} \in \mathbb{C}$ $(j_1 = 1, 2, ..., q_1; ...; j_n = 1, 2, ..., q_n)$; $\overline{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n})$, $1 \le i \le \mathbf{p}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$ $(i_1 = 1, 2, ..., p_1; ...; i_n = 1, 2, ..., p_n)$; $\overline{\beta}_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ..., \beta_{j_n})$, $1 \le j \le \mathbf{q}$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, ..., \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$ $(j_1 = 1, 2, ..., q_1; ...; j_n = 1, 2, ..., q_n)$. Функция

$$\mathrm{H}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\mathbf{xt} \,\middle|\, \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \overline{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \overline{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \right] = \prod_{k=1}^{n} H_{p_k, q_k}^{m_k, \overline{n}_k} \left[x_k t_k \,\middle|\, \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \right] \tag{2}$$

представляет собой произведения H-функций $H_{p,q}^{m,n}[z]$ (см., например, [3, §1.1]).

Введем постоянные, определяемые через параметры H- функции (2): $a^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*)$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n)$ и $a_k^* = \sum\limits_{i=1}^{\overline{n}_k} \alpha_{i_k} - \sum\limits_{i=\overline{n}_k+1}^{p_k} \alpha_{i_k} + \sum\limits_{j=1}^{m_k} \beta_{j_k} - \sum\limits_{j=m_k+1}^{q_k} \beta_{j_k}$, $\Delta_k = \sum\limits_{j=1}^{q_k} \beta_{j_k} - \sum\limits_{i=1}^{p_k} \alpha_{i_k}$ $(k = 1, 2, ..., n)$; $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ и $\mu_k = \sum\limits_{j=1}^{q_k} b_{j_k} - \sum\limits_{i=1}^{p_k} a_{i_k} + \frac{p_k - q_k}{2}$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Работа продолжает исследования, начатые авторами ранее, и посвящена исследованию функциональных и композиционных свойств преобразования (1) и отдельных его модификаций в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ измеримых по Лебегу функций $f(\mathbf{x})$:

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}} = \{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \{ \cdots \{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 \cdot -1} \times$$

$$[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, ..., x_n)|^{r_1} dx_1]^{r_2/r_1} dx_2 \}^{r_3/r_2} \cdots \}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \}^{1/r_n} < \infty,$$

где $\overline{r} = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le \overline{r} < \infty$, $r_1 = r_2 = ... = r_n$; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n$, когда постоянные $a_k^* = \Delta_k = 0$, $\mathrm{Re}(\mu_k) \le 0\,(k = 1, 2, ...n)$.

Схема изучения аналогична процессу построения теории одномерного H- преобразования [3, (3.1.1)], центральное место в которой отведено вопросам ограниченного и взаимно однозначного действия соответствующего интегрального оператора в пространствах интегрируемых функций с весом, сосредоточенным в нуле и на бесконечности. С помощью применения техники многомерного преобразования Меллина авторами получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств интегрируемых функций в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для исследуемого преобразования. Настоящая работа обобщает результаты, полученные А.А. Килбасом и М. Сайго ранее, для соответствующего одномерного преобразования [3, §4.1 и 4.2].

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, задание 1.2.01.

Литература

1. *Sitnik S.M. and Skoromnik O.V.* Multi-Dimensional Integral Transform with Fox Function in Kernel in Lebesgue-Type Spaces. *Mathematics* (2024), 12, 1829.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, (1987).

3. *Kilbas A.A. and Saigo M.* H-*Transforms. Theory and Applications.* Chapman and Hall, Boca Raton, (2004).

Нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения и возможность их аналитического решения

П. А. Слиняков (Минск, Беларусь)

В теории нейронных сетей рассматриваются сети со скрытыми слоями $\{\mathbf{h}_t\}$, которые удовлетворяют рекуррентному соотношению вида:

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_{t-1} + f(\mathbf{h}_{t-1}, \theta_{t-1}), \tag{1}$$

где f нелинейная, зависящая от некоторых параметров (весов) θ_t.

В работе [1] вводится *нейронное дифференциальное уравнение* как инфинитезимальный аналог уравнения (1):

$$\frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = f(\mathbf{h}(t), t, \theta), \tag{2}$$

где справа функция, в общем случае зависящая от скрытого слоя $h(t)$, переменной t и параметра θ. В той же работе [1] приведен алгоритм для численного решения уравнения (2) *методом сопряженных систем*, предложенным Понтрягиным [2]. В настоящей работе исследуется возможность существования аналитического решения уравнения (2).

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы функции $\mathbf{H}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\Theta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, вектор $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^n$ а также скалярная функция $\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \sigma(\mathbf{H}(t) \cdot \Theta(t)), \\ \mathbf{H}(t_0) = \mathbf{H}_0 \end{cases} \tag{3}$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Конструкция в правой части уравнения называется *ридж-функцией* и обусловлена употребимостью в приложениях. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1$, и $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Пусть также функции $\mathbf{H}(t), \Theta(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$, а функция $\sigma(t)$ — липшицева на данном отрезке. Тогда у задачи Коши (3) существует единственное непрерывно дифференцируемое решение, определенное на $[t_0, t_1]$, непрерывно зависящее от начальных данных и устойчивое при малых их возмущениях.