

Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области

О.В. Скоромник, А.П. Мателенок

Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

Рассматриваются многомерные интегральные уравнения первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по ограниченным пирамидальным областям многомерного евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов. Устанавливаются формулы решений рассматриваемых интегральных уравнений в замкнутой форме. Даются необходимые и достаточные условия разрешимости таких уравнений в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных гипергеометрических уравнений.

Ключевые слова: интегральные преобразования, интегральные уравнения, гипергеометрическая функция Гаусса, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

Solution of multidimensional Abel-type integral equations with the Gauss hypergeometric function in the kernels over pyramidal domain

O.V. Skoromnik, A.P. Matelenok

Educational establishment «Polotsk State University»

Multidimensional integral equations of the first kind with the Gauss hypergeometric function in the kernels over special bounded pyramidal domains in Euclidean space are considered. The interest in such equations is caused by their applications to problems on reflection of waves on a rectilinear boundary as well as on a supersonic flow around spatial corners. Solutions of these equations in closed form are established, and necessary and sufficient conditions for their solvability in the space of summable functions are given. The results generalize those obtained earlier for multi-dimensional Abel type integral equation and for the corresponding one-dimensional hypergeometric equations.

Key words: integral transforms, integral equations, Gauss hypergeometric function, space of summable functions, fractional integrals and derivatives.

Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, §§ 35.1, 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля со степенными весами и использовании известных свойств таких дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные ус-

ловия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах.

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48], [5] и в задачах

сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, §§ 25.1, 28.4]).

Следуя методике Я. Тамаркина, в [7–8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a, b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. Настоящая работа продолжает эти исследования. Мы даем решение в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследуем картину их разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Ниже приводятся вспомогательные сведения, решение рассматриваемых уравнений в квадратурах и устанавливаются необходимые и достаточные условия их разрешимости.

Предварительные сведения. Введем некоторые обозначения [1, § 28.4]. Пусть $\mathfrak{I} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I} \setminus \{0\}$, \oplus^n – n -мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n \in \oplus^n$ и $\mathbf{t} = t_1, t_2, \dots, t_n \in \oplus^n$ обозначим через

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ их скалярное произведение, в ча-

стности, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ для $\mathbf{1} = 1, \dots, 1$. Пусть

$\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства \geq , $\oplus_+^n = \{\mathbf{x} \in \oplus^n : \mathbf{x} > 0\}$,

$\mathbf{k} = k_1, \dots, k_n \in \mathfrak{I}_0^n = \mathfrak{I}_0 \times \dots \times \mathfrak{I}_0$, где $(k_i \in \mathfrak{I}_0, i=1, 2, \dots, n$ – мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! \cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$. Для $\mathbf{x} \in \oplus_+^n$, $\mathbf{k} \in \mathfrak{I}_0^n$ и $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \oplus_+^n$ положим

$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\mathbf{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$ и

$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)$. Пусть $A = \|\alpha_{jk}\|$ ($\alpha_{jk} \in \oplus_1$) – матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j = a_{j_1}, \dots, a_{j_n}$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через a_{jk} . Без ограничения общности положим $|A| = 1$. Пусть

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x}$, $(A \cdot \mathbf{x})^\alpha = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_1} \cdots (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x})^{\alpha_n}$.

Для $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n \in \oplus^n$, $\mathbf{c} = c_1, \dots, c_n \in \oplus^n$ и $r \in \oplus^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \oplus^n : A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq 0, \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0\} \quad (1)$$

n -мерную ограниченную в \oplus^n пирамиду с вершиной в точке \mathbf{b} с основанием на гиперплоскости $\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r = 0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) = 0$ $j = 1, \dots, n$.

В частности, когда $A = E = \|\delta_{jk}\|$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, $E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in \oplus^n : \mathbf{t} \leq \mathbf{b}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{t} \geq 0\} \quad (2)$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды A необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1} \cdot \mathbf{c} > 0$.

Для

$$\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta = \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \oplus^n \quad \text{и}$$

$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n \in \oplus^n$ введем функцию

$$F[\alpha, \beta; \gamma; \mathbf{x}] = \prod_{j=1}^n F[\alpha_j, \beta_j; \gamma_j; x_j], \quad (3)$$

представляющую собой произведение гипергеометрических функций Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$, определяемых при комплексных $a, b, c \in \partial$ и $|z| < 1$ гипергеометрическим рядом

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, \quad (4)$$

для $z \in \partial, 0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c, (\arg(1-z) < \pi, z \neq 1)$ (см. [9, 2.1(2) и 2.1(10)]). Здесь z_n – символ

Похгаммера: $z_0 \equiv 1$,

$$z_n = z z_1 \cdots z_{n-1} \quad (z \in \partial; n \in \mathfrak{I})$$

Рассматриваемое нами интегральное уравнение типа Абеля имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\gamma-1} \times \\ & \times F\left[\alpha, \beta; \gamma, \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma}\right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} \in A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{P}^n$, $r \in \mathbb{P}^1$) – пирамида (1); $\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}^n$, $0 < \gamma < 1$, $\sigma \in \mathbb{P}_+^n$ и $F[\alpha, \beta; \gamma; A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma) / A \cdot (\mathbf{t}^\sigma)]$ – функция вида (3).

Уравнение (5) обобщает многомерное уравнение типа Абеля [1, § 28.4], получающееся из (5) при $\sigma=1$, $r=0$ в случаях $\alpha=0$ или $\beta=0$. При $\sigma=1$ уравнение (5) является модификацией уравнения, рассмотренного в [7–8].

Нам понадобятся следующее обобщение интеграла (4) [9, 2.4(3)]:

$$\begin{aligned} F(a, b, c, z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(s)\Gamma(c-s)} \times \\ &\times \int_0^{1-x^{s-1}(1-x)^{c-s-1}} \frac{(1-xz)^{a'}}{(1-xz)^{a'}} F(a-a', b; s; xz) \times \\ &\times F\left(a', b-s; c-s; \frac{(1-x)z}{1-xz}\right) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

формула [9, 2.1(22)]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right), \quad (7)$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; § 28]. *Если функция $f(\mathbf{x}, t)$, определенная на $A_c(b) \times A_c(b)$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int_{A_c(b)} dt \int_{A_c(t)} f(t, \tau) d\tau = \int_{A_c(b)} d\tau \int_{\sigma(b, \tau)} f(t, \tau) dt, \quad (8)$$

$$\sigma(\mathbf{b}, \tau) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{P}^n : A \cdot \tau \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{b}\}, \quad (9)$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (8) сходится абсолютно.

Решение в замкнутой форме. Сначала дадим формальное решение уравнения (5). Используя представление (7) для $F[\alpha, \beta; \gamma; A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma) / A \cdot (\mathbf{t}^\sigma)]$ в (5) и умножая обе части уравнения (5) на $(A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} (A \cdot \mathbf{x}^\sigma)^\alpha$, представим его в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{(A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\gamma-1} A \cdot \mathbf{t}^{\sigma-\alpha} \times \\ &\times F\left[\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_1(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$x \in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \quad f_1(\mathbf{x}) = (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} (A \cdot \mathbf{x}^\sigma)^\alpha f(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Заменяя \mathbf{x} на \mathbf{t} и \mathbf{t} на \mathbf{u} , умножая обе части полученного равенства на

$$(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\gamma} F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\sigma^1 = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} \cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$ и изменяя порядок интегрирования согласно формуле (8), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot \mathbf{u}^{\sigma-\alpha} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \times \\ &\times \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)^{\gamma-1} \times \\ &\times F\left[\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma}\right] \times \\ &\times F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] \times \\ &\times (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\ &= \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \\ &\times F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] \times \\ &\times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} f_1(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{P}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x}\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в (11) введем новые переменные

$$s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}, \quad \mathbf{a}_j = a_{j1}, \dots, a_{jn} \quad (j=1, \dots, n).$$

Используя соотношения

$$1 - s_j = \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \quad (j=1, \dots, n)$$

и формулу (6), для внутреннего интеграла в (11) получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)^{\gamma-1} \times \\ &\times F\left[\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{t}^\sigma}\right] \times \\ &\times F\left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma}\right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \times \\
 & \times \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^{s_j} \left[\frac{1}{s_j} s_j^{-\gamma_j} (1-s_j)^{\gamma_j-1} \left[1-s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right]^{-\alpha_j \sigma_j + \sigma_j - 1} \right] \right. \\
 & \times F \left\{ \alpha_j, \gamma_j - \beta_j; \gamma_j; \left[(1-s_j) \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right] / \right. \\
 & \left. \left. / \left[1-s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right] \right\} \times \\
 & \times F \left\{ -\alpha_j, 1 - \beta_j; 1 - \gamma_j; s_j \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right\} ds_j \right\} = \\
 & = \Gamma(\gamma) \Gamma(1 - \gamma) (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1} \times \\
 & \times F \left\{ 0, 1 - \beta; 1; \frac{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}{\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{x}^\sigma)} \right\} = \\
 & = \Gamma(\gamma) \Gamma(1 - \gamma) (A \cdot \mathbf{x})^{-\alpha\sigma+\sigma-1}.
 \end{aligned}$$

На основании этого равенства (11) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot \mathbf{u}^\sigma \phi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}), \quad (12) \\
 & f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \\
 & \times F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \times \\
 & \times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} \right), \quad (14)$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right) \in \mathbb{P}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, перепи-
сываем (12) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\tau) d\tau = g(\mathbf{y}), \quad (15)$$

где $E_1(\mathbf{y})$ – модельная пирамида (2),

$$\psi(\tau) = \left(A \cdot \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\tau}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \right)^\sigma \varphi \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\tau}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right),$$

$$g(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta} \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (15) перепишем его в виде

$$\begin{aligned}
 & \int_{-(y_1 + \dots + y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1 + \dots + y_{n-2} + \tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \\
 & \dots \int_{-(\tau_2 + \dots + \tau_n)}^{y_1} \psi(\tau) d\tau_1 = g(\mathbf{y}). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя последовательно по y_n, y_{n-1}, \dots, y_1 , получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} g(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$ и учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{a_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (17)$$

где a_{jk} ($j, k = 1, \dots, n$) – элементы обратной матрицы A^{-1} , приходим к следующей формуле решения уравнения (5):

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{x}) &= \sigma^1 A \cdot \mathbf{x}^\sigma^{-\alpha} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \times \\
 & \times \left\{ \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \right. \\
 & \times F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] \times \\
 & \left. \times (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} A \cdot \mathbf{t}^\sigma^\alpha \mathbf{t}^{\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (5) разрешимо, то его решение имеет вид (18).

Необходимые и достаточные условия разрешимости. Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (5) в пространстве $L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b});(A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha$:

$$L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b});(A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha = f(\mathbf{t});(A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha f(\mathbf{t}) \in L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) , \quad (19)$$

где пространство $L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ определяется следующим образом:

$$L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = \{f(\mathbf{x}): \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty\} . \quad (20)$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}} L_1 = \left\{ g : g(\mathbf{x}) = \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) \right\} . \quad (21)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}} L_1$ играет ту же роль для уравнения (5), что и пространство $AC[a, b]$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, §2.2]. Отметим, что если $g \in I_{A_{\mathbf{c},r}} L_1$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) .$$

В частности, если $A = E$ – единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, (19)–(21) принимают вид соответственно

$$L_1 E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{\alpha\sigma} = f(\mathbf{t}); \mathbf{t}^{\alpha\sigma} f(\mathbf{t}) \in L_1 E_1(\mathbf{b}) ,$$

$$L_1 E_1(\mathbf{b}) = \{f(\mathbf{x}): \int_{E_1(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty\} ,$$

$$I_{E_1} L_1 =$$

$$= \left\{ g : g(\mathbf{x}) = \int_{E_1(\mathbf{x}), (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq (\mathbf{x} - \mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1 E_1(\mathbf{b}) \right\} ,$$

$$\text{где } h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} g(\mathbf{x}) .$$

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a, b)$.

На основании формулы (15) доказывается следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимо-

сти одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a, b)$.

Теорема 1. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (5) с $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}^n$ ($0 < \gamma < 1$) и $\sigma \in \mathbb{P}_+^n$ в пространстве $L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b});(A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{(A \cdot \mathbf{x})^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times \\ \times F \left[-\alpha, 1 - \beta; 1 - \gamma; \frac{A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{A \cdot \mathbf{x}^\sigma} \right] (A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha (A \cdot \mathbf{t})^{-\alpha\sigma + \sigma - 1} \times \\ \times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma - 1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c},r}} L_1 \quad (22)$$

$$u \quad [f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x})]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r} = 0} = \\ = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r} = 0} = \dots = \\ = \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r} = 0} = 0 . \quad (23)$$

При выполнении этих условий уравнение (5) разрешимо в $L_1 A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b});(A \cdot \mathbf{t}^\sigma)^\alpha$ и его единственное решение дается формулой (18).

Доказательство. В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно получается из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (17).

Следствие 1. Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} \mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\gamma - 1} F \left[\alpha, \beta; \gamma; \frac{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)}{\mathbf{t}^\sigma} \right] \times \\ \times \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}) , \quad (24)$$

если $\alpha, \beta, \sigma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}^n$ ($0 < \gamma < 1$) и $\sigma \in \mathbb{P}_+^n$ разрешимо в пространстве $L_1 E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{\alpha\sigma}$ тогда и только тогда, если

$$f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\alpha\sigma - \sigma + 1}}{\Gamma(1 - \gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} \mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\gamma} \times$$

$$\times F \left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}{\mathbf{x}^\sigma} \right] \mathbf{t}^{2\sigma-2} \times$$

$$\times \sigma^1 f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1} L_1$$

u

$$[f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x})]_{\mathbf{l}, \mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{l}, \mathbf{x}=0} = \dots = =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{l}, \mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (24) разрешимо в $L_1 E_1(\mathbf{b}); \mathbf{t}^{\alpha\sigma}$ и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{-\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\gamma, \alpha, \beta}(\mathbf{x}) = \sigma^1 \mathbf{x}^{-\alpha\sigma} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\mathbf{x}^{\alpha\sigma-\sigma+1}}{\Gamma(1-\gamma)} \int_{E_1(\mathbf{x})} \mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma \right\}^{-\gamma} \times$$

$$\times F \left[-\alpha, 1-\beta; 1-\gamma; \frac{\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma}{\mathbf{x}^\sigma} \right] \mathbf{t}^{2\sigma-2} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \}.$$

Замечание 1. При $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1$ теорема 1 и следствие 1 сводятся к результатам, полученным в [3, теорема 1 и следствие] (см. также случай $r = 0$ в [1, теорема 26.7 и следствие]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О.А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О.А. Репин. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A.A. On integrable solution of a multidimensional Abel – type integral equation / A.A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – Vol. 25, № 1. – P. 1–9.
4. Михлин, С.Г. Лекции по интегральным уравнениям / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.
5. Преображенский, Н.Г. Абелева инверсия в физических задачах / Н.Г. Преображенский. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
6. Федосов, В.П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
7. Килбас, А.А. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А.А. Килбас [и др.] // Доклады НАН Беларуси. 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.
8. Raina K.L. Solvability of some Abel – type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K.L. Raina [et al.] // ANZIAM J. – 2001. – Vol. 43, № 2. – P. 291–320.
9. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.

Поступила в редакцию 18.03.2011. Принята в печать 29.04.2011

Адрес для корреспонденции: 211440, г. Новополоцк, ул. Молодежная, д. 145, кв. 316, e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.