3. Создание сопровождающего информационного ресурса	*На основе собранных данных создаются информационные ресурсы, такие как плакаты, буклеты, презентации, демонстрирующие вероятность выигрыша в данной лотерее*
4. Рекомендации и стратегии	*На основе выигрышных ситуаций предоставляются рекомендации и стратегии с опорой на проанализированные вероятностные данные. Например, рассказывается как проанализировать ставки, учитывая вероятности выигрыша на каждом этапе.*
5. Тест предложенных стратегий	*Демонстрация эффективности предложенных стратегий, эксперимент с положительным либо отрицательным результатом*
6. Итог и рефлексия	*Представляется информационный ресурс, полученный результат и его обсуждение, как проект помог лучше понять концепции вероятности в контексте участия в лотерейной игре*

Результат: данный проект не только развивает навыки анализа данных и применения вероятностных концепций, но и позволяет создавать полезные ресурсы для других, помогая принимать более обоснованные решения при участии в лотереях.

Таким образом, метод проектов представляется как эффективный подход к изучению теории вероятности и статистики, позволяя не только усваивать теоретические основы данного раздела математики, но и применять их на практике. В ходе проектной работы учащиеся могут выбирать интересующие их темы и решать реальные задачи, связанные с анализом данных, прогнозированием, и оценкой вероятностей. Данный метод позволяет видеть конкретные применения теории вероятности и статистики в реальной жизни, что делает учебный процесс более практичным и интересным.

***

1. Бабенко А. С., Стрункина К. Ю. Применение метода проектов при изучении вероятностно-статистической линии в школе // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2018. – №2. – С. 150-154.
2. Леонтьева Н. В., Вологжанина Н. Ю. Элементы теории вероятностей в курсе средней школы в рамках подготовки к ОГЭ // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – Т. 9. – С. 1–5.
3. Полункина С. Н., Метод проектов на уроках теории вероятностей и статистики // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2011. – №3. – С. 44-47.

Пастухов Ю.Ф.[1], Пастухов Д.Ф.[1], Волосов К.А.[5], Чернов С.В.[2] , Пастухов А.Ю[3] , Волосова Н.К.[4], Волосова А.К.[5]

Дифференциальные инварианты и тензоры в присоединенных расслоенных пространствах скоростей конечного порядка: полная производная по времени гладкой функции – тензор нулевого ранга

[1]Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой (Россия, Полоцк)
[2]«Конструкторское бюро «Дисплей»
[3]Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» (Россия, Витебск)
[4]МГТУ им. Н.Э. Баумана
[5]МИИТ (Россия, Москва)

doi: 10.18411/trnio-02-2024-516

Аннотация

В работе рассмотрены дифференциально-инвариантные свойства в присоединенных расслоенных пространствах конечного порядка

Доказано, что полная производная по времени локальной записи гладкой вещественнозначной функции - не зависит от выбора локальной системы в базе расслоения, то есть является тензорной операцией или более точно тензором нулевого ранга.

Ключевые слова: дифференциально-геометрические структуры на многообразиях гладкие многообразия, , расслоенные пространства, расслоенное пространство скоростей, дифференциальные инварианты.

Abstract

The paper considers differential invariant properties in connected layered spaces of finite order It is proved that the total time derivative of the local record of a smooth real-valued function does not depend on the choice of a local system in the bundle base, that is, it is a tensor operation or more precisely a tensor of rank zero.

Keywords: differential geometric structures on manifolds smooth manifolds, , layered spaces, layered velocity space, base bundles, differential invariants.

Введение. Огромную роль в развитии всей геометрии, в том числе и дифференциальной геометрии, сыграло открытие неевклидовой геометрии. Б. Риман в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» (1854) заложил основы римановой геометрии, наиболее развитой части современной дифференциальной геометрии. Теоретико-групповая точка зрения Ф. Клейна изложена в его «Эрлангенской программе» (1872): геометрия – учение об инвариантах групп преобразований. В применении к дифференциальной геометрии была развита Э. Картаном, который построил теорию пространств проективной связности и аффинной связности. Основная задача дифференциальной геометрии состоит в нахождении и описании дифференциальных инвариантов геометрических структур. Необходимым аппаратом здесь является исчисление струй. Это понятие интенсивно использовалось в теории геометрических структур высшего порядка в работах В.В. Вагнера, Г.Ф. Лаптева, Л.Е. Евтушика, М.О. Рахулы, а в последнее время в теории особенностей гладких отображений – М. Голубицким, В. Гийеминым и геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений – А.М. Виноградовым, В.В. Лычагиным. Классифицировать алгебраические уравнения по их группам симметрии предложил Э. Галуа; Ф. Клейн – взять идею симметрии в качестве единого принципа при построении различных геометрий. Выйдя за пределы геометрии и развиваясь, эта идея показала, что принцип симметрии служит той единственной основой, которая может объединить все разрозненные части огромного здания современной математики. Феликс Клейн развил свою концепцию в физике и механике. Его программа как задача поиска различных форм симметрии выходит за рамки не только геометрии, но и всей математики в целом, превращается в проблему поиска единого принципа для всего естествознания. В 1872 г. Ф. Клейн представил сенату и философскому факультету Эрлангенского университета и свое «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», получившее название «Эрлангенской программы». Феликс Клейн рассматривает иерархию многообразий – пространств любого числа измерений и соответственных геометрий, положив в основу их определения понятия инварианта, введенное в математику за двадцать лет до этого. В элементарной геометрии преобразованиями, то есть переходами от одних переменных к другим, служат прежде всего движения, переносы и вращения геометрических фигур, когда

сами фигуры (расстояния между образующими их точками) не меняются. Пространство, в котором происходят подобные переносы, называется метрическим. Инвариант пространства – расстояние, определенное, например, теоремой Пифагора в прямоугольной системе координат. Есть более сложные геометрии, где инвариантами служат иные выражения: в проективной геометрии инварианты – уже не расстояния между точками, не величина и форма геометрической фигуры, а только форма, то есть соотношения между расстояниями, например, треугольник, при проективном преобразовании может стать меньше, но остается подобным себе.

Фундаментальность законов сохранения заключается в их универсальности. Они справедливы при изучении любых физических процессов (механических, тепловых, электромагнитных и др.). Они одинаково применимы в релятивистском и нерелятивистском движении, в микромире, где справедливы квантовые представления, и в макромире, с его классическими представлениями. Законы сохранения используются в механике и в теоретической физике. Благодаря той особой роли, которую играют законы сохранения в физике, они являются важнейшим элементом современной научной картины мира. Между основным уравнением динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам

представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены.В начале 20 века Эмми Нетер доказала важную теорему, которая утверждает, что всякому непрерывному преобразованию координат с заданным законом преобразования соответствует некоторая сохраняющаяся величина (или, как говорят, инвариант преобразования). Поскольку преобразования координат тесно связаны со свойствами симметрии пространства и времени (однородностью, изотропностью пространства и однородностью времени), то каждому свойству симметрии пространства и времени должен соответствовать определенный закон сохранения. С однородностью пространства, то есть с симметрией законов физики по отношению к пространственным сдвигам начала координат, связан закон сохранения импульса. С изотропностью пространства, то есть с симметрией относительно поворота системы координат в пространстве, связан закон сохранения момента импульса. Аналогично представление об однородности времени (симметрии по отношению к сдвигам времени) приводит к закону сохранения энергии. Значение теоремы Нетер не ограничивается только тем, что она устанавливает связь классических законов сохранения с видами симметрии, имеющими геометрическую природу. При наличии в физической системе симметрий другого рода, не связанных со свойствами пространства и времени, теорема Нетер позволяет установить другие законы сохранения. И наоборот, всякий закон сохранения связан с некоторой определенной симметрией системы.

Теорема1 Пусть $L : T^n X_m \to \Re$ $L(x,\dots,\overset{(n)}{x})$-локальная запись функции L при выборе локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$.Тогда

$$G(x,\dot{x},\dots,\overset{(n)}{x}\,\overset{(n+1)}{x}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} \qquad (1)$$

при замене локальных координат (x) в базе X_m расслоения $T^n X_m$ преобразуется как тензоры 0-го ранга, то есть не зависят от выбора локальных координат (являются геометрическими инвариантами) .

Доказательство. Для n=1 имеет место

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dots,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k}{\partial x^i}\right)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}^k}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}D_t\left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\right)\right)\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\left(D_t\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\right)\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}D_t(\dot{\bar{x}}^l)\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\ddot{\bar{x}}^l\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\dot{\bar{x}}^l\left(D_t\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\right)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} + D_t\left(\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^k}\delta_l^k\dot{\bar{x}}^l + \frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^k}\delta_l^k\ddot{\bar{x}}^l\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{l}(D_t(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{l}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^i}))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x}\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\ddot{\bar{x}}^{k}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\dot{\bar{x}}^{l}D_t(\delta_l^k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \bar{x}^{k}}\dot{\bar{x}}^{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dot{\bar{x}})}{\partial \dot{\bar{x}}^{k}}\ddot{\bar{x}}^{k}=\bar{G}_1(\bar{x},\dot{\bar{x}},\ddot{\bar{x}}) \qquad (2)$$

$$D_t(\delta_l^k)=0,\delta_i^k=\begin{cases}1,i=k\\0,i\neq k\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{l}}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{l}}\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^i}=\delta_i^k=\begin{cases}1,i=k\\0,i\neq k\end{cases}-\textit{символ Кронекера}$$

Рассмотрим общий случай.

$$G_1(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x}\overset{(n+1)}{x})=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k-1)i}{x}}\overset{(k)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}$$

$$D_t^k x^i(\bar{x})=\overset{(k)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k}C_{k-1}^{s-1}D_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^{s}D_t^{k-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}$$

$$D_t^{k+1}x^i(\bar{x})=\overset{(k+1)i}{x}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k+1-1}C_{k+1-1}^{s}D_t^{k+1-1-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\frac{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}{\partial \overset{(k)i}{x}} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}(x,\dot{x},...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}=\begin{cases}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\dfrac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^i}),C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!},k!=\prod\limits_{g=1}^{k}g,p\geq k\\0,p<k\end{cases}$$

(5) Подставим (4) в (5)

$$\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}=\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^i})$$

(6) и (6) подставим в (3)

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}\overset{(k+1)i}{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L(x,...,\overset{(n)}{x})}{\partial \overset{(k)i}{x}}(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},...,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}C_p^k\cdot D_t^{p-k}(\frac{\partial \bar{x}^{d}(x)}{\partial x^i}))(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k}C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}) \qquad (7)$$

Так как $\overset{(s+1)j}{\bar{x}}=D_t^s(\overset{(1)j}{\bar{x}})=D_t^s(\dot{\bar{x}}^{j})$ $\quad C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})\overset{(s+1)j}{\bar{x}}=C_k^sD_t^{k-s}(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^{j}})D_t^s(\overset{(1)j}{\bar{x}})$ и

$$D_t^a(fg)=\sum_{b=0}^{a}C_a^bD_t^b(f)D_t^{a-b}(g)\ ,\ C_a^b=\frac{a!}{b!(a-b)!},\ b!=\prod_{c=1}^{b}c,a\geq b$$

(формула Лейбница), то

$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s+1)j}{\bar{x}} = \sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right) D_t^s(\overset{(1)j}{\bar{x}}) = D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} D_t^1(\bar{x}^j)\right) = D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right) =$$

$$= D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\dot{\bar{x}}^j\right)$$

(8) Подставляем (8) в (7):

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{k} C_k^s D_t^{k-s}\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\right)\overset{(s+1)j}{\bar{x}}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) \tag{9}$$

Так как $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n} a_{kp} = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} a_{kp}$ при $n \geq p \geq k \geq 0$, то (9) запишем в виде:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{p=k}^{n}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{d=1}^{m}\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) \tag{10}$$

По формуле Лейбница: $\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right) = D_t^p\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)$

Поэтому $\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \cdot D_t^{p-k}\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\right) D_t^k\left(\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) =$

$$= \sum_{p=0}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{j=1}^{m} D_t^p\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\ldots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{i=1}^{m} D_t^p\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right)\right) \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} D_t^p\left(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right) = D_t^p\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}}\right) \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{\bar{x}} = \overset{(1)j}{\bar{x}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = \overset{(1)j}{\bar{x}}\,\delta_j^d$$

,значит,

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^d \quad \delta_j^d = \begin{cases} 1, d = j \\ 0, d \neq j \end{cases} - \textit{символ Кронеккера}$$

$$D_t^p\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big)=D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d\big)$$

(13) Подставляем в (13) в (11):

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\sum_{i=1}^{m}D_t^p\Big(\frac{\partial \bar{x}^d(x)}{\partial x^i}\frac{\partial x^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j}\overset{(1)j}{x}\Big)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{d=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d\big)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\,\delta_j^d\big)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^p\big(\overset{(1)j}{x}\big)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}D_t^{p+1}(\bar{x}^j)=$$

$$=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \bar{L}(\bar{x},\dots,\overset{(n)}{\bar{x}})}{\partial \overset{(p)d}{\bar{x}}}\overset{(p+1)j}{\bar{x}}=\bar{G}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\dots,\overset{(n+1)}{\bar{x}})$$

Теорема доказана.

***

1. Квазилинейность в расслоенных пространствах скоростей конечного порядка -теорема о локальном представлении слоевых координат в виде функциональной квазилинейной комбинации преобразованных координат Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Чернов С.В., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К. Тенденции развития науки и образования. 2023. № 95-6. С. 124-127.
2. N-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 4 (63). С. 12-21.
3. Применение формул прогонки для шифрования текстовых данных Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 3 (62). С. 5-12.
4. Модифицированная формула ньютона - касательных парабол на числовой оси Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 2 (61). С. 5-15.
5. Обобщение метода петрова-галеркина для решения системы интегральных уравнений фредгольма второго рода Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 1 (60). С. 5-14.
6. Решение интегральных уравнений фредгольма методом замены интеграла квадратурой с двенадцатым порядком погрешности в матричном виде Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. № 4 (59). С. 9-17.

Петров А.С., Кремлева Э.Ш.

Важность изучения, роль и применение дискретной математики в науке и жизни

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (Россия, Казань)

doi: 10.18411/trnio-02-2024-517

Аннотация

В этой статье мы рассмотрим значение изучения дискретной математики, её преимущества, важность и применение знаний этой науки в повседневной жизни и научных областях.

Ключевые слова: применение в жизни, применение в областях, графы, комбинаторика, алгоритмы, логика, применение в программировании, криптография, теория игр, теория автоматов, теория кодирования, теория чисел.