УДК [517.51:519.6]+004.94

Наилучшее приближение для плотности распределения Шамперноуна с нулевым параметром лямбда

Пастухов Ю. Ф.[1], Пастухов Д. Ф.[1], Чернов С. В.[2], Пастухов А. Ю.[3], Волосова А. К.[4], Волосов К. А.[4], Волосова Н. К.[5]

1 - Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, г. Полоцк, Беларусь
2 - «Конструкторское бюро «Дисплей», г. Витебск, Беларусь
3 - Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь
4 - МИИТ, г. Москва, Россия
5 - МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Аннотация. Представлен метод нахождения наилучшего приближения плотности распределения Шамперноуна ступенчатыми функциями на заданном интервале. Применен алгоритм квантования плотности распределения Шамперноуна в пространстве функций-ступенек на заданном отрезке.

Abstract. A method is presented for finding the best approximation of the Champernowne distribution density by stepwise functions over a given interval. The algorithm of quantization of the Champernoune distribution density in the space of step functions on a given segment is applied.

Ключевые слова: экстремальное значение функции, точки экстремума функции, система уравнений для нахождения экстремума функции, интегральные уравнения ,алгоритмы сжатия графических данных, численные методы анализа, автоматика, цифровая обработка данных, математические методы обработки информации, наилучшие приближение функции в в метрических и нормированных пространствах, разностные уравнения, стационарные точки , минимальное значение функции, интегральные уравнения, вычисление определенного интеграла с двенадцатым порядком погрешности.

Keywords: the extreme value of the function, the extremum points of the function, the system of equations for finding the extremum of the function, integral equations, algorithms for compressing graphical data, numerical methods of analysis, automation, digital data processing, mathematical methods of information processing, the best approximation of the function in metric and normalized spaces, difference equations, stationary points, the minimum value of the function, integral equations, calculation of a definite integral with the twelfth order of error.

1. Введение

В работе использован алгоритм нахождения наилучшего приближения плотности распределения Шамперноуна ступенчатыми функциями на заданном отрезке, в качестве расстояния использовалась метрика квадратичного отклонения.

2. Квантование функции плотности распределения Шамперноуна в метрике квадратичного отклонения

Определение. Пусть $m \in N$. Функция $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ называется m-кусочно-постоянной на [a,b] , если $\exists\, x_1 < x_2 < ... < x_{m-1}$ такие что:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{m-1} < b = x_m ,$$

$$f_m(x) = y_i = const \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ f_m(x_i) = y_i,\ f_m(x_{i+1}) = y_{i+1}\ y_i \ne y_{i+1},\ \forall i = \overline{1, m-1}.$$

Для множества $m-$ ступенчатых функций ($m-$ уровней) $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ введем обозначение $S_m[a,b]$.

Пусть $f:[a,b] \to \Re$, $f \in C^2[a,b]$, $f'(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$, $m \in N$. Для получения минимума ошибки отклонения нужно в пространстве $m-$ступенчатых функций вычислить наилучшее приближение $h_m:[a,b]\to R$ функции $f:[a,b]\to\Re$ в метрике квадратичного отклонения, такое что $dist=\|f-h_m\|_{C^2_{[a,b]}}=\min\limits_{f_m\in S_m[a,b]}\|f-f_m\|_{C^2_{[a,b]}}$. Тогда, расстояние оценивается как:

$$dist=\|f-h_m\|_{C^2_{[a,b]}}=\sqrt{\int_a^b\left(f(x)-h_m(x)\right)^2dx}=\min_{f_m\in S_m[a,b]}\sqrt{\int_a^b\left(f(x)-f_m(x)\right)^2dx}=\min_{f_m\in S_m[a,b]}\|f-f_m\|_{C^2_{[a,b]}} \tag{1}$$

Пусть ступенчатая функция $h_m(x)=y_k$ равна константе на отрезке $x\in(x_{k-1},x_k)$, $k=\overline{1,m}$, при этом функция ошибки

$$G(x_1,\ldots,x_{m-1},y_1,\ldots,y_m)=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-y_k\right)^2dx \tag{2}$$

описывает квадрат отклонения ступенчатой функции $h_m:[a,b]\to R$ от функции распределения $f:[a,b]\to\Re$.

Для n+1 ненулевой ступени система для условия экстремума примет вид :

$$\begin{cases} f(B_i)=\dfrac{1}{2}(C_i+C_{i+1}),\ i=\overline{1,n} \\ \displaystyle\int_{B_{j-1}}^{B_j}f(x)dx=C_j(B_j-B_{j-1}),\ j=\overline{1,n+1} \end{cases} \tag{3}$$

То есть (3) содержит 2n+1 уравнений и 2n+1 неизвестных.

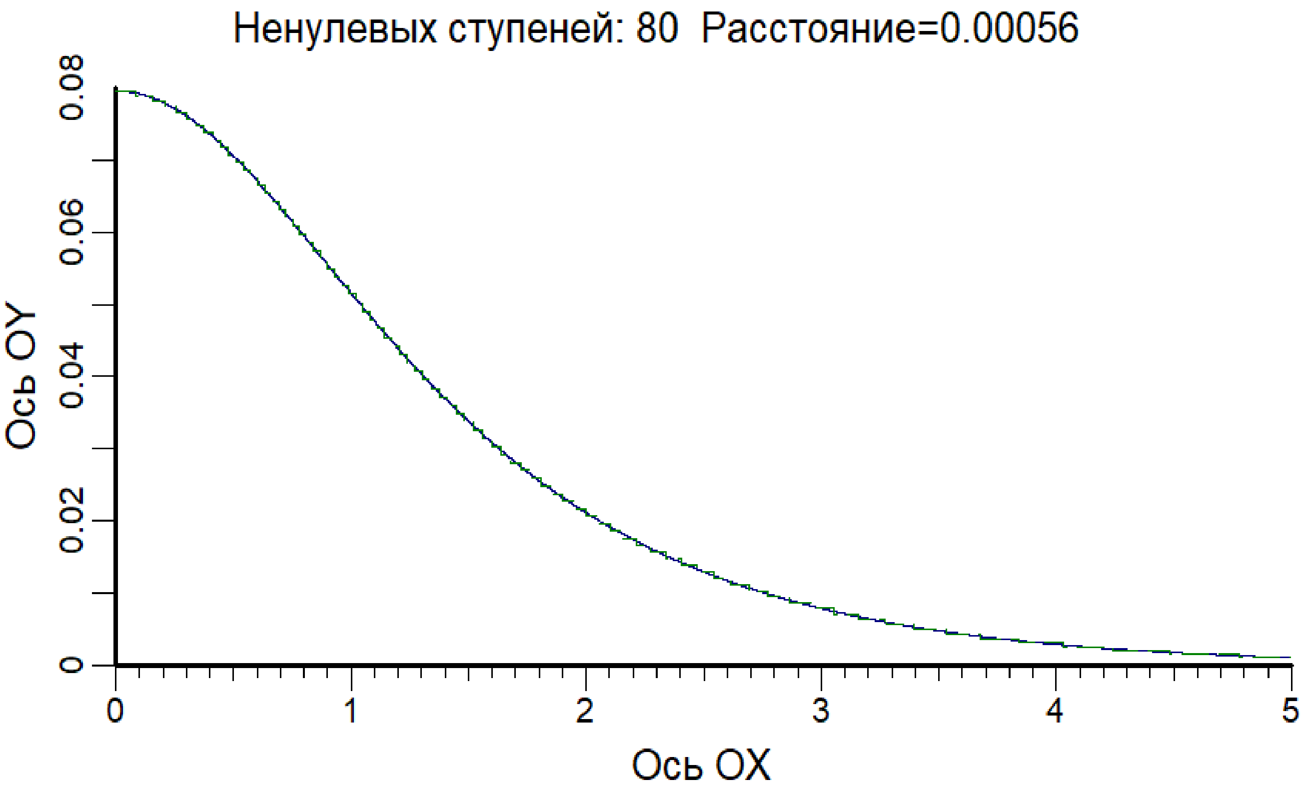
На рисунках ниже представлены примеры квантования функции плотности распределения Шамперноуна

$y=f(x,\alpha,\lambda,x_0)=\dfrac{n}{\cosh(\alpha(x-x_0))+\lambda}$ при $\alpha=1,\lambda=x_0=0$ $y=f(x,\alpha=1,\lambda=0,x_0=0)=\dfrac{1}{4\pi*\cosh(x)}$

Ниже на рисунке приведен пример работы программы для определения уровней приближения функции плотности Шамперноуна с 0-ым параметром лямбда для числа ступеней равного m=10(соответственно уровней будет 20)

```
Начало работы программы:
Время :   год:2023  мес:4   дней:19  час:17  мин:3   сек:49 .
Прогресс: 100.0000 %  Осталось: сут: 0       час: 0    мин: 0    секунд: 0  .
Время :   год:2023  мес:4   дней:19  час:17  мин:4   сек:1  .
Оценка приближения к решению =   2.089822069136863E-005
Вывод уровней квантования :
X(          1 )=  1.188348993212966E-008
X(          2 )=  0.335000000000000
X(          3 )=  0.485284677498974
X(          4 )=  0.626125000000024
X(          5 )=  0.754048873057924
X(          6 )=  0.880375000000109
X(          7 )=   1.00657792326874
X(          8 )=   1.13400000000007
X(          9 )=   1.26813098952817
X(         10 )=   1.40562499999992
X(         11 )=   1.55651284050480
X(         12 )=   1.71324999999975
X(         13 )=   1.89273288836974
X(         14 )=   2.08199999999969
X(         15 )=   2.31066772541131
X(         16 )=   2.55700000000028
X(         17 )=   2.88071271916505
X(         18 )=   3.24275000000111
X(         19 )=   3.81282640935227
X(         20 )=   4.51587500000084
Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата раности f(x) и ступенчатой функции
 =   2.089822069136863E-005
Расстояние  =   4.571457173743252E-003
```

Ниже представлены графические результаты работы программы для количества ступеней равного 5,10,20,40,80,160(и расстояния в среднеквадратичной метрике)



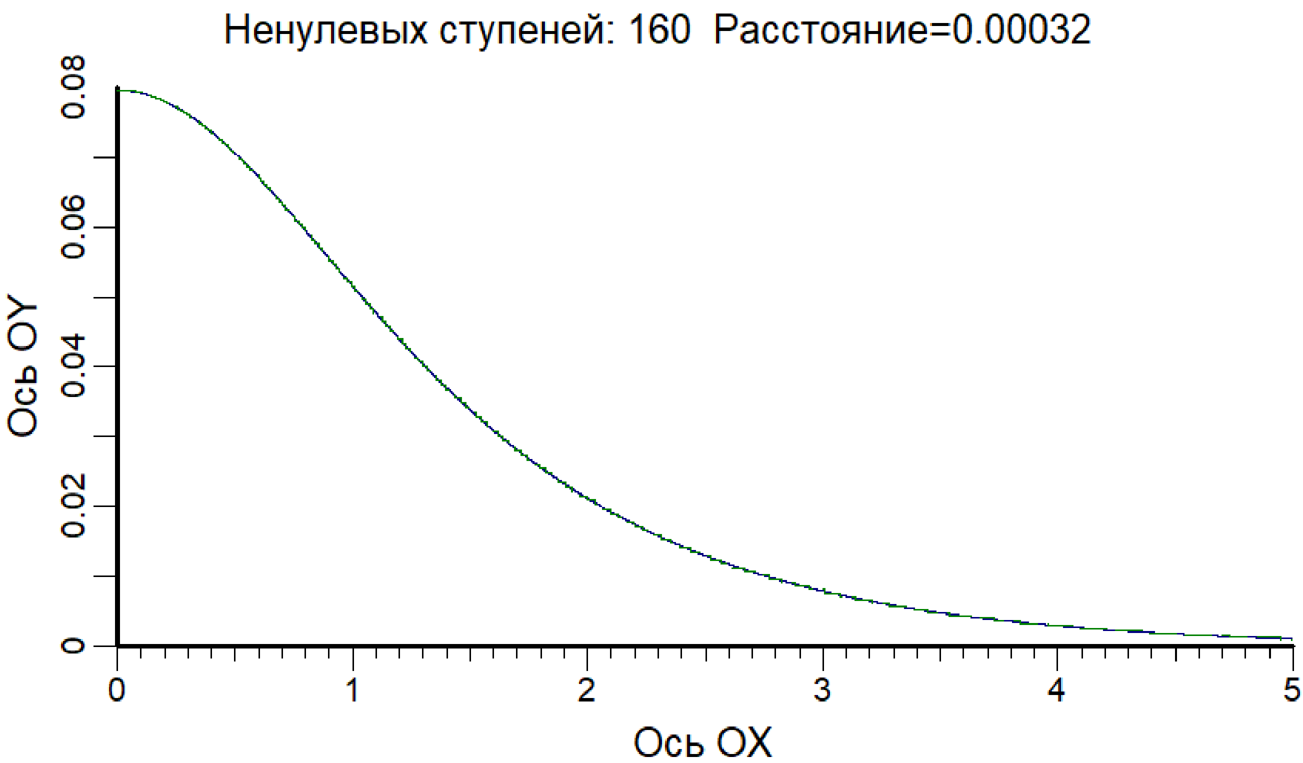


Рисунок 1 - Результат для уровней квантования: а) для m=80; б) для m=160.

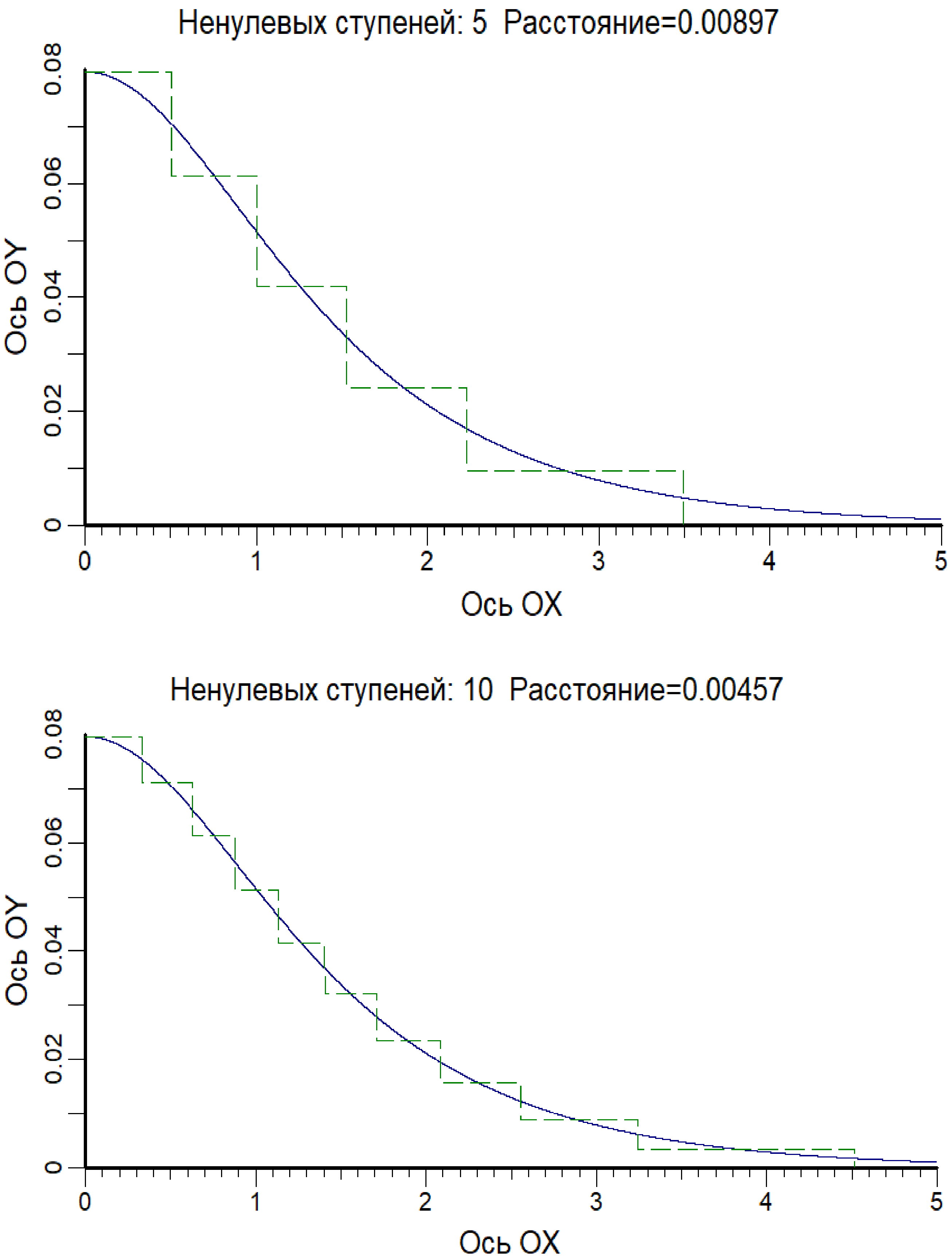


Рисунок 2 - Результат получения уровней квантования: а) для m=5; б) для m=10.

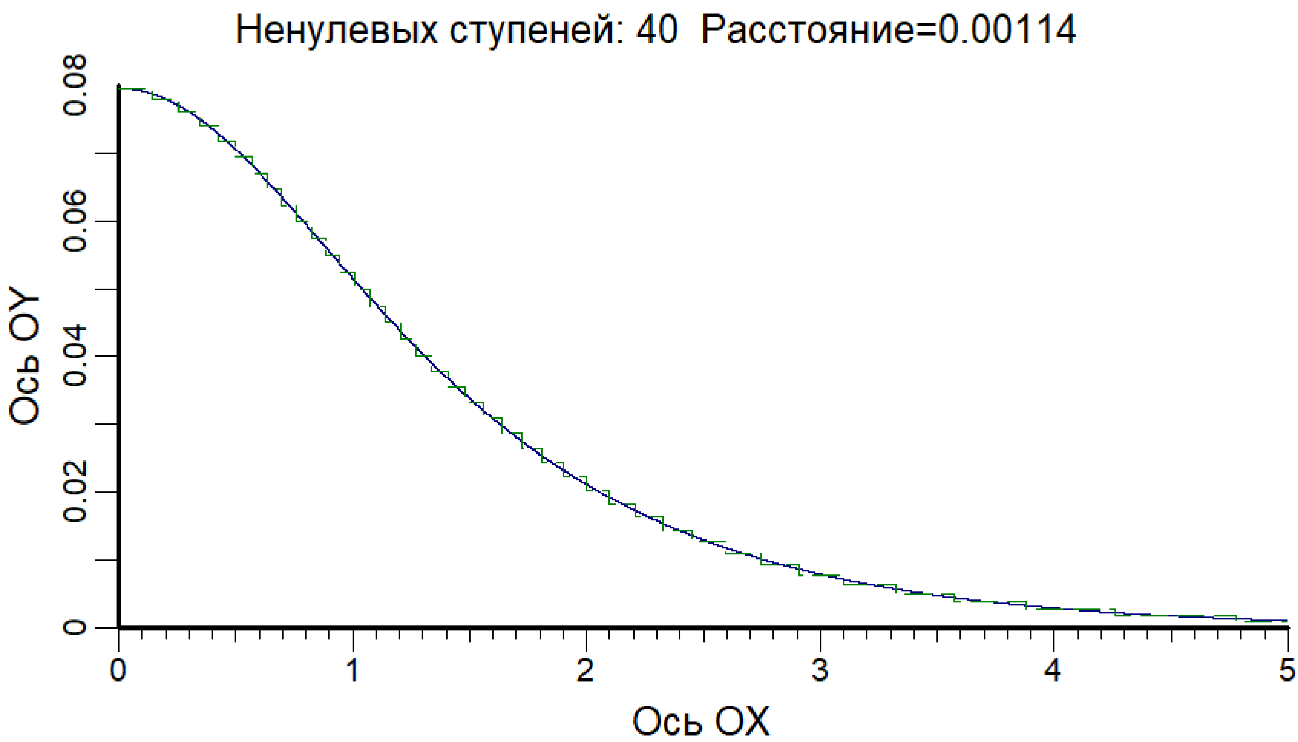


Рисунок 3 - Результат получения уровней квантования: а) для m=20; б) для m=40.

Более подробно о прикладных методах оптимизации можно прочитать в работах [1]-[4].

Библиографический список:

1. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи Q-R кода с помощью.
2. Пастухов Ю. Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче/ Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика. 7:1 (2001). С. 285–288.

3. МАТРИЦА ГЕССЕ ПО СТАРШИМ ПРОИЗВОДНЫМ ЛОКАЛЬНОЙ ЗАПИСИ ГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ В РАССЛОЕНИИ СКОРОСТЕЙ - ТЕНЗОР ВТОРОГО РАНГА ТИПА (0,2) Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Карлов М.И. Тенденции развития науки и образования. 2022. № 85-2. С. 28-32.
4. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи Q-R кода с помощью стеганографии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. 2019. Т. 17. № 3(82). С. 16–39.

УДК [517.51:519.6]+004.94

Точное восстановление данных для обратной функции плотности распределения Шамперноуна с нулевым параметром лямбда

Пастухов Ю. Ф.[1], Пастухов Д. Ф.[1], Чернов С. В.[2], Пастухов А. Ю.[3], *Волосова А. К.*[4], *Волосов К. А.*[4], *Волосова Н. К.*[5]

1 - Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, г. Полоцк, Беларусь
2 - «Конструкторское бюро «Дисплей», г. Витебск, Беларусь
3 - Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь
4 - МИИТ, г. Москва, Россия
5 - МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Аннотация. Применен метод численного решения нахождения наилучшего приближения для обратной функции плотности распределения Шамперноуна на множестве ступенчатых функций на отрезке.

Abstract. The method of numerical solution of finding the best approximation for the inverse function of the Champernowne distribution density on a set of step functions on a segment is applied.

Ключевые слова: метрические пространства, метрика, автоматизация, кибернетика, численные методы в инженерных расчетах, интегральные уравнения, алгоритм решения системы уравнений ,дифференциально-разностные уравнения**,** методы нахождения экстремума, численные методы анализа, экстремум, стационарные точки, наилучшее приближение функции в линейных нормированных пространствах, численное вычисление интегралов с двенадцатым порядком погрешности, цифровая обработка сигналов, численные методы решения уравнений , критические точки, математические методы и модели, краевые задачи и математическое моделирование.

Keywords: metric spaces, metrics, automation, cybernetics, numerical methods in engineering calculations, integral equations, algorithm for solving a system of equations, differential-difference equations, methods for finding the extremum, numerical methods of analysis, extremum, stationary points, the best approximation of a function in linear normalized spaces, numerical calculation of integrals with the twelfth order of error, digital signal processing, numerical methods for solving equations, critical points, mathematical methods and models, boundary value problems and mathematical modeling.

1. Введение

В работе применен алгоритм нахождения наилучшего приближения обратной функции плотности распределения Шамперноуна на множестве кусочно-постоянных(ступенчатых) функций на заданном отрезке.

2. Квантование функции плотности распределения Шамперноуна в метрике квадратичного отклонения

Определение. Пусть $m \in N$. Функция $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ называется m-кусочно-постоянной на [a,b] , если $\exists\, x_1 < x_2 < ... < x_{m-1}$ такие что:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{m-1} < b = x_m \quad ,$$