

ПАСТУХОВ Юрий Феликсович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры технологий программирования
Полоцкий государственный университет,
г. Полоцк, Белоруссия

ПАСТУХОВ Дмитрий Феликсович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры технологий программирования
Полоцкий государственный университет,
г. Полоцк, Белоруссия

ПАСТУХОВ Александр Юрьевич,
студент
Витебский государственный университет,
г. Витебск, Белоруссия

УРОВНИ КВАНТОВАНИЯ – ВЫЧИСЛЕНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ОТКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

Аннотация. Предложен метод нахождения наилучшего приближения плотности распределения Стьюдента ступенчатыми функциями на конечном интервале. В данной работе предложен алгоритм и метод, заменяющий функцию распределения Стьюдента кусочно-постоянной функцией, являющейся наилучшим приближением плотности распределения Стьюдента в метрике квадратичного отклонения. Использован ранее разработанный авторами метод численного нахождения наилучшего приближения плотности распределения Стьюдента ступенчатыми функциями.

Ключевые слова: интегральные уравнения численные методы, автоматика, разностные уравнения, сжатие данных, наилучшее приближение функции, точные вычисления, численные методы, математические модели, условия оптимальности, уравнения Эйлера-Лагранжа, система уравнений Эйлера-Пуассона.

PASTUKHOV Yuri Feliksovich,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Programming Technologies
Polotsk State University,
Polotsk, Belarus

PASTUKHOV Dmitry Feliksovich,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Programming Technologies
Polotsk State University,
Polotsk, Belarus

PASTUKHOV Alexander Yurievich,
student
Vitebsk State University,
Vitebsk, Belarus

QUANTIZATION LEVELS – CALCULATION OF THE SMALLEST DEVIATION FOR THE STUDENT'S DISTRIBUTION DENSITY

Annotation. A method is proposed for finding the best approximation of the Student's distribution density by stepwise functions over a finite interval. In this paper, an algorithm and a method are proposed that replaces the Student's distribution function with a piecewise constant function, which is the best approximation of the Student's distribution density in the metric of quadratic deviation. The method previously developed by the authors for numerically finding the Student's distribution density on a set of step functions is used.

Key words: integral equations numerical methods, automation, difference equations data compression, best approximation of a function, precise calculations, numerical methods, mathematical models, optimality conditions, Euler-Lagrange equations, Euler-Poisson system of equations.

1. Введение.

Новым в данной работе является алгоритм нахождения наилучшего приближения плотности распределения Стьюдента в пространстве ступенчатых функций на заданном интервале.

2. Квантование функции плотности распределения Стьюдента в метрике квадратичного отклонения.

Работа изначально возникла научно-технической задачи в алгоритмах сжатия и восстановления невероятно большого потока графических данных. Из-за чрезвычайного переполнения данных, которое невозможно передавать, например, в режиме реального времени при съемке со спутников с использованием высокочувствительного (с очень высоким разрешением) цифрового оптического оборудования. В силу этого обстоятельства приходится передавать данные не в «прямом» – изначальном виде, а приближать на определенных участках некоторым набором заданных числовых значений (так называемых дискретных уровней), из-за чего при таком методе передачи, естественно, возникает ошибка приближения (яркости пикселей). Задача в таком случае (у передающей стороны) состоит, конечно, в том, чтобы добиться такого выбора этих значений, чтобы ошибка была как можно (насколько возможно) меньше.

Точно такая же задача состоит у тех, кто принимает передаваемые данные (принимающей стороны) – им нужно извлечь из переданных уже с ошибкой данных информацию, максимально точно приближенную к исходным (еще не обработанным никакими методами) данным. Здесь применяется обратный процесс к сжатию-восстановлению, который также как и в выше описанном случае требует специального подбора конкретных значений (так называемых уровней восстановления) для наименьшего (максимально меньшего) искажения передаваемой информации. Помочь решить эти, описанные выше задачи, существенно повлияв на минимизацию конечной ошибки (в результате применения двух преобразования и сжатия, и восстановления) помогает поиск наилучшего приближения функциями-ступеньками с наименьшим среднеквадратичным отклонением от функции плотности распределения. Метод может быть применен для поиска залежей полезных ископаемых (например, нефти и газа).

Определение. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) называется n кусочно-постоянной (или n -ступенькой) на $[a, b]$, если $\exists x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ такие что:

$$\begin{aligned} b_0 &= a < b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1} < b = b_n, \\ f_n(x) &= c_i = \text{const} \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \\ f_n(b_i) &= c_i \text{ или } f_n(b_i) = c_{i+1}, \quad c_i \neq c_{i+1}, \quad \forall i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Множество n -ступенчатых функций $f_n : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) обозначим как $S_n[a, b]$.

Считаем, что выполнено условие неизменности функции на заданном открытом интервале, то есть что $h_n(x) = c_k$ при $x \in (B_{k-1}, B_k)$ $k = \overline{1, n}$.

Функционал ошибки имеет следующий вид:

$$G(B_1, \dots, B_{n-1}, C_1, \dots, C_n) = \sum_{k=1}^n \int_{B_{k-1}}^{B_k} (f(x) - c_k)^2 dx \text{ и выражает квадрат отклонения (ошибки) ступенчатой функции от исходной функции плотности распределения. Необходимое условие экстремума для функции } G(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_m) \text{ задается системой:}$$

$$\begin{cases} f(B_i) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}), i = \overline{1, n-1} \\ f(B_i) = \frac{1}{2}C_n \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx = C_j(B_j - B_{j-1}), j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1)$$

Для $n+1$ (1) принимает вид:

$$\begin{cases} f(B_i) = \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1}), i = \overline{1, n} \\ \int_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx = C_j(B_j - B_{j-1}), j = \overline{1, n+1} \end{cases} \quad (2)$$

Для исследования рассмотренного алгоритма разработана программа, которая позволяет получать пороговые уровни и ошибку приближения для различного числа n .

Для плотности распределения Стьюдента с n степенями свободы имеем:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} = (\text{при } n=1) = \frac{\Gamma(\frac{1+1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{1+1}{2}}}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(1)(1+\frac{x^2}{n})^{-1}}{\sqrt{1\pi}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1\Gamma(1+\frac{x^2}{n})^{-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

На рисунке 1 изображены результаты работы программы поиска наилучшего приближения среднеквадратичного отклонения плотности распределения Стьюдента (с одной степенью свободы)

ступенчатыми функциями $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Поиск проводился для числа ступеней а) $m=2$, б) $m=3$,

в) $m=5$, г) $m=7$, д) $m=10$, е) $m=20$, ж) $m=30$, з) $m=40$ (на положительной полуоси). Найдены числовые выражения для $n=20$ ($m=10$ ступеней):

```
Начало работы программы:
Время :   год:2023   мес:5   дней:5   час:13   мин:18   сек:7   .
Прогресс: 100.0000 %   Осталось: сут: 0   час: 0   мин: 0   секунд: 0   .
Время :   год:2023   мес:5   дней:5   час:13   мин:18   сек:7   .
Оценка приближения к решению = 3.938435344893065E-004
Вывод уровней квантования :
X( 1 ) = 1.053671212772351E-008
X( 2 ) = 0.2600000000000000
X( 3 ) = 0.380791471808581
X( 4 ) = 0.4960000000000000
X( 5 ) = 0.605456506884314
X( 6 ) = 0.7160000000000000
X( 7 ) = 0.832887700477754
X( 8 ) = 0.9540000000000001
X( 9 ) = 1.09084228301115
X(10 ) = 1.234999999999997
X(11 ) = 1.40774343768887
X(12 ) = 1.593999999999994
X(13 ) = 1.83248032415603
X(14 ) = 2.094999999999988
X(15 ) = 2.46152759287458
X(16 ) = 2.878999999999979
X(17 ) = 3.54635408370378
X(18 ) = 4.349999999999979
X(19 ) = 6.03381585102864
X(20 ) = 8.337000000000082
Ошибка(квадрат расстояния)-интеграл квадрата разности f(x) и ступенчатой функции
= 3.938435344893065E-004
Расстояние = 1.984549154063226E-002
```

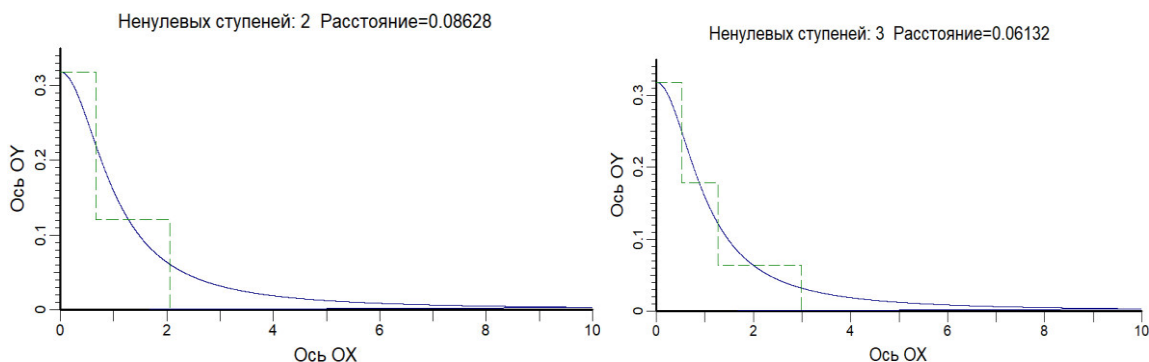


Рис. 1. Работа программы: а) для $m=10$; б) для $m=20$

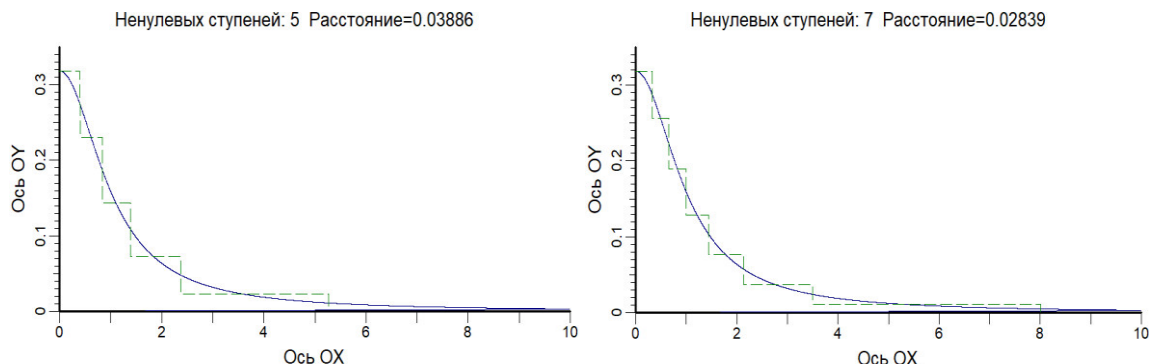


Рис. 2. Работа программы: а) для $m=10$; б) для $m=20$

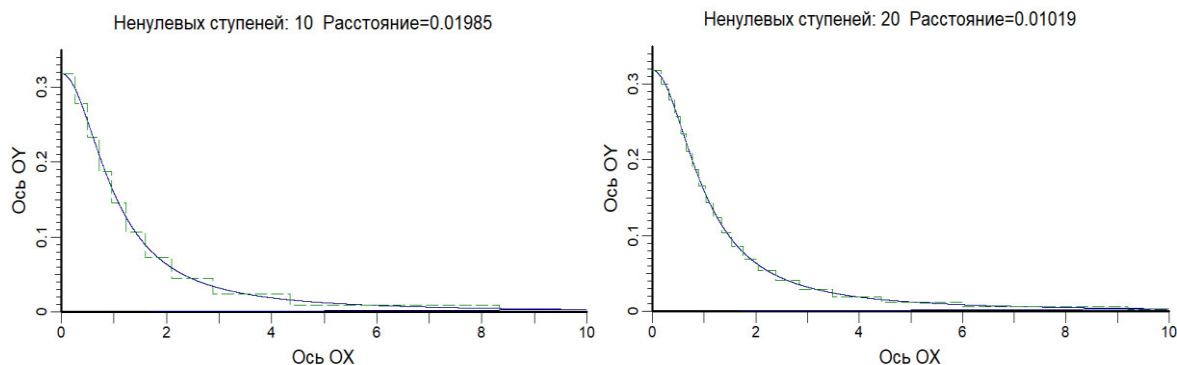
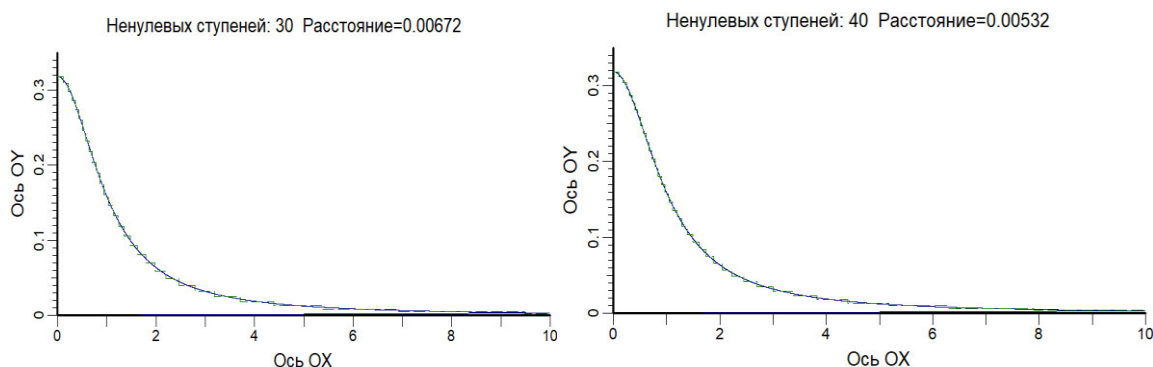


Рис. 3. Работа программы: а) для $t=10$; б) для $t=20$



**Рис. 4. Работа программы: а) для $t=3$; б) для $t=5$;
в) для $t=7$; г) для $t=10$; д) для $t=20$; е) для $t=30$; ж) $t=40$**

Список использованных источников

1. Обобщение метода Петрова-Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1 (60). – С. 5-14.
2. Применение формул прогонки для шифрования текстовых данных / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 3 (62). – С. 5-12.
3. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на числовой оси / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, М.И. Карлов, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 2 (61). – С. 5-15.