МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELLING

Оригинальное теоретическое исследование

УДК 519.6
https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33

Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

Н.К. Волосова[1], К.А. Волосов[2], А.К. Волосова[2], Д.Ф. Пастухов[3] ✉, Ю.Ф. Пастухов[3]
[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация
[2] Российский университет транспорта, г. Москва, Российская Федерация
[3] Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь
✉ dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация
Введение. Рассматривается решение краевых задач на отрезке с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых коэффициенты и правая часть являются непрерывными функциями. Условия ортогональности невязки уравнения координатным функциям дополняются системой линейно независимых краевых условий задачи. Число координатных функций m должно быть больше порядка n дифференциального уравнения.
Материалы и методы. Для численного решения краевой задачи предложена система линейно независимых координатных функций на симметричном отрезке $[-1,1]$ с единичной нормой Чебышева каждой функции системы. Применен модифицированный метод Петрова-Галеркина с включением линейно независимых краевых условий исходной задачи в систему линейных алгебраических уравнений. Применена интегральная квадратурная формула с двенадцатым порядком погрешности для вычисления скалярного произведения двух функций.
Результаты исследования. Получен критерий существования и единственности решения краевой задачи, при условии, что известны n линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения. Получены формулы для матричных коэффициентов и коэффициентов правой части системы линейных алгебраических уравнений для вектора разложения решения по системе координатных функций. Формулы получены для линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина сформулирован для уравнения произвольного порядка.
Обсуждение и заключение. Полученные формулы обобщенного метода Бубнова-Галеркина могут быть полезными для решения краевых задач с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Численно решены три краевых задачи с уравнениями второго и третьего порядков, равномерная норма невязки не превышает 10^{-11}.

Ключевые слова: численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, метод Галеркина, гидродинамика

Для цитирования. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированный метод Бубнова-Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33

Original Theoretical Research

A Modified Bubnov-Galerkin Method for Solving Boundary Value Problems with Linear Ordinary Differential Equations

Natalya K. Volosova[1], Konstantin A. Volosov[2], Aleksandra K. Volosova[2], Dmitriy F. Pastukhov[3], Yuriy F. Pastukhov[3]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

[2] Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation

[3] Polotsk State University named after Euphrosyne of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus

Abstract

Introduction. The paper considers the solution of boundary value problems on an interval for linear ordinary differential equations, in which the coefficients and the right-hand side are continuous functions. The conditions for the orthogonality of the residual equation to the coordinate functions are supplemented by a system of linearly independent boundary conditions. The number of coordinate functions m must exceed the order n of the differential equation.

Materials and Methods. To numerically solve the boundary value problem, a system of linearly independent coordinate functions is proposed on a symmetric interval $[-1,1]$, where each function has a unit Chebyshev's norm. A modified Petrov-Galerkin method is applied, incorporating linearly independent boundary conditions from the original problem into the system of linear algebraic equations. An integral quadrature formula with twelfth-order error is used to compute the scalar product of two functions.

Results. A criterion for the existence and uniqueness of a solution to the boundary value problem is obtained, provided that n linearly independent solutions of the homogeneous differential equation are known. Formulas are derived for the matrix coefficients and the coefficients of the right-hand side in the system of linear algebraic equations for the vector expansion of the solution in terms of the coordinate function system. These formulas are obtained for second- and third-order linear differential equations. The modified Bubnov-Galerkin method is formulated for differential equations of arbitrary order.

Discussion and Conclusions. he derived formulas for the generalized Bubnov-Galerkin method may be useful for solving boundary value problems involving linear ordinary differential equations. Three boundary value problems with second- and third-order differential equations are numerically solved, with the uniform norm of the residual not exceeding 10^{-11}.

Keywords: numerical methods, ordinary differential equations, boundary value problems, Galerkin method, hydrodynamics

For citation. Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F. A Modified Bubnov-Galerkin Method for Solving Boundary Value Problems with Linear Ordinary Differential Equations. *Computational Mathematics and Information Technologies*. 2024;8(3):23–33. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2024-8-3-23-33

Введение. Краевые задачи с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно классифицировать по порядку уравнения. Например, в задачах гидродинамики — первого [1], второго [2] или третьего порядка [3–4].

Для решения краевых задач на отрезке с обыкновенными дифференциальными уравнениями наиболее известны метод прогонки и метод стрельбы [5]. Неизвестная функция в указанных методах отыскивается на заданной сетке (так называемая сеточная функция). В данной работе решение находится в функциональном виде, для чего предложена система линейно независимых координатных функций, гладких и ограниченных по модулю на симметричном отрезке [–1, 1]. Неизвестная функция-решение раскладывается по базису линейно независимых координатных функций. Методом Бубнова-Галеркина в работе [6], где невязка дифференциального или интегрального уравнения ортогональна координатным функциям, из условий ортогональности находят коэффициенты разложения решения задачи по базису.

В работе [7] показано, что в простейшей классической вариационной задаче (краевой задаче) необходимо искать решение на классе допустимых функций, определяемом краевыми условиями. Именно эту идею авторы использовали в модифицированном методе Бубнова-Галеркина, включив n–1 (n — порядок уравнения) линейно независимых краевых условий в систему m линейных алгебраических уравнений. При этом число условий ортогональности равно m–n+1 (m — число координатных функций). В данной работе модифицированный метод Бубнова-Галеркина используется в краевых задачах с уравнениями второго и третьего порядков.

Материалы и методы. Пусть неизвестная функция $u(x)\in C^n[a,b]$, n раз непрерывно дифференцируемая, является решением краевой задачи с обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n с переменными коэффициентами $g_i(x), i=\overline{0,n}$

$$\begin{cases} L[u(x)] = f(x),\ x\in(a,b), \\ L[u(x)] \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} g_i(x)\frac{d^i}{dx^i}\right)u(x). \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_\mu^i u^{(i)}(a)\right)=\gamma_\mu,\ \mu=\overline{1,k}, \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\beta_\mu^i u^{(i)}(b)\right)=\gamma_\mu,\ \mu=\overline{k+1,n}. \end{cases} \tag{2}$$

В краевой задаче (1)–(2) функции $g_i(x)(i=\overline{0,n}), f(x)\in C[a,b]$ заданы и непрерывны на отрезке $[a, b]$. Первые k уравнений в системе (2) представляют собой краевые условия в точке $x = a$, а последние $n – k$ уравнений — краевые условия в точке $x = b$. Для замкнутости задачи (1) необходимо, чтобы полное число краевых условий было равно n. Матрицы коэффициентов $\alpha_\mu^i,\beta_\mu^i, i=\overline{0,n-1}, \mu=\overline{1,n}$, а также числа $\gamma_\mu,\ \mu=\overline{1,n}$ заданы.

Краевые условия вида (2) называются разделенными. Именно связь между числами α_μ^i,β_μ^i определяет существование и единственность решения краевой задачи (1)–(2).

Утверждение 1. Пусть известно n линейно независимых частных решений однородного уравнения (1) $U_j(x), j=\overline{1,n}$. Тогда краевая задача (1)–(2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполнено условие $\det A_{\mu j}\neq 0, \mu=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$, где

$$A_{\mu j}=\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1}\alpha_\mu^i U_j^{(i)}(a), \mu=\overline{1,k} \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}\beta_\mu^i U_j^{(i)}(b), \mu=\overline{k+1,n}. \end{cases}$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1)

$$u(x)=\sum_{j=1}^{n}U_j(x)D_j+\overline{u(x)},\ j=\overline{1,n}.$$

Здесь D_j — произвольные постоянные интегрирования, $\overline{u(x)}$ — частное решение неоднородного уравнения (1), $U_j(x)$ — частные линейно независимые решения однородного уравнения (1).

Подставим решение $u(x)$ в краевые условия (2):

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_\mu^i u^{(i)}(a)\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_\mu^i\left(\sum_{j=1}^{n}U_j^{(i)}(a)D_j+\overline{u^{(i)}(a)}\right)=\gamma_\mu \Leftrightarrow, \\ \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_\mu^i U_j^{(i)}(a)\right)D_j=\gamma_\mu-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_\mu^i\overline{u^{(i)}(a)}, \mu=\overline{1,k}. \end{gathered} \tag{3}$$

Аналогично для точки $x = b$ получим:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\beta_\mu^i U_j^{(i)}(b)\right)D_j=\gamma_\mu-\sum_{i=0}^{n-1}\beta_\mu^i\overline{u^{(i)}(b)}, \mu=\overline{k+1,n}. \tag{4}$$

Неоднородная система n линейных алгебраических уравнений(3)–(4) относительно неизвестных D_j, $j = 1, n$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда детерминант матрицы $\det A_{\mu j}\neq 0, \mu=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$, где

$$A_{\mu j}=\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1}\alpha_\mu^i U_j^{(i)}(a), \mu=\overline{1,k} \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}\beta_\mu^i U_j^{(i)}(b), \mu=\overline{k+1,n}. \end{cases} \tag{5}$$

Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим простой вариант задачи (1) с обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) второго порядка с краевыми условиями Дирихле:

$$\begin{cases} L[u(x)]=f(x),\ x\in(a,b) \\ L[u(x)]\equiv\left[g_2(x)\dfrac{d^2}{dx^2}+g_1(x)\dfrac{d}{dx}+g_0(x)\right]u(x) \\ u(a)=u_a, u(b)=u_b. \end{cases} \tag{6}$$

Обобщим метод Бубнова-Галеркина, предложенный в работе [6] для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода, на решение задачи Дирихле с ОДУ второго порядка (6).

Выберем систему координатных функций $\varphi_i(x)$:

$$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{m}=\left\{\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)^i, x\in[a,b], i=\overline{0,m}\right\}. \tag{7}$$

Утверждение 2. Координатные функции системы (7) $\varphi_i(x) \in C^\infty[a,b]$ ограничены по модулю, дифференцируемы любое число раз и линейно независимы.

Доказательство проведем от противного. Используем линейное отображение $z = \dfrac{2x-a-b}{b-a} \in [-1,1], x \in [a,b]$, взаимно однозначно отображающее отрезок $x \in [a,b]$ на симметричный отрезок $z \in [-1,1]$. Такой простой метод используют авторы учебника [5] в задаче построения интегральных квадратурных формул. Предположим, что система координатных функций линейно зависима и с учетом переменной z имеет вид $\left\{\varphi_i(z) = z^i, z \in [-1,1], i = \overline{0,m}\right\}$. Если система функций линейно зависима, то существует нетривиальное решение (α_0, α_1, ... α_m) уравнения $\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + ... + \alpha_m z^m \equiv 0 \forall z \in [-1,1]$.

Последнее уравнение имеет не более, чем m действительных решений, в то время как требуется решение последнего уравнения для всех точек отрезка $z \in [-1,1]$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость функций системы (7). Функции (7) бесконечно непрерывно дифференцируемы по переменной x как полиномы конечной степени, а также ограничены, поскольку $\|\varphi_i\|_C = \max\limits_{z \in [-1,1]} \left|z^i\right| = 1$. **Утверждение 2** доказано.

Применим метод Бубнова-Галеркина с системой линейно независимых координатных функций (7) к решению краевой задачи Дирихле (6). Симметричный отрезок $z \in [-1,1]$ в нашей задаче приводит к одному порядку погрешности в симметричных относительно середины отрезка $c = (a+b)/2$ узлах и в целом уменьшает норму погрешности.

Разложим решение по линейно-независимой системе координатных функций

$$u(x) = u(c) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) C_j = u(c) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2(x-c)}{b-a}\right)^j C_j. \tag{8}$$

В формуле (8) коэффициенты C_j неизвестны и подлежат определению.

Из формулы (8) следует тождество $u(c) = u(c)$, а сама формула напоминает разложение неизвестной функции в ряд Тейлора с центром $x = c = (a+b)/2$, однако ни самой функции, ни ее производных мы не знаем. Подставим (8) в уравнение (6) и запишем невязку уравнения (6):

$$R(u((x)) = L[u(x)] - f(x) = L\left(u(c) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) C_j\right) - f(x) = L\big(u(c)\big) + \sum_{j=1}^{m} L\varphi_j(x) C_j - f(x).$$

Метод Бубнова-Галеркина является ортогональным, поэтому потребуем ортогональность невязки максимальному числу координатных функций, $\left\{1, z, z^2, ..., z^{m-2}\right\}$ всего m–1 функций, которые дают максимальный вклад в невязку уравнения (6):

$$\left\langle R\big(u(x)\big), \varphi_i(x)\right\rangle = 0, \overline{i = 0, m-2} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left\langle L\varphi_j(x), \varphi_i(x)\right\rangle C_j = \left\langle f(x) - L\big(u(c)\big), \varphi_i(x)\right\rangle, i = \overline{0, m-2}. \tag{9}$$

В формуле (9) введено обозначение:

$$\left\langle f, g\right\rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx, \ L\big(u(c)\big) = g_0(x) u(c) = g_0(x) u_c.$$

В отличие от метода [6, стр. 140], последнее условие с номером m для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно m неизвестных C_j, $j = \overline{1,m}$, получим из краевых условий

$$\frac{u_b - u_a}{2} = C_1 + C_3 + ... + \begin{cases} C_{m-1}, m = 2l \\ C_m, m = 2l+1. \end{cases} \tag{10}$$

Покажем справедливость формулы (10). На концах отрезка в точках $x = a$, $x = b$, используя разложение (8), получим:

$$u(a) \equiv u_a = u(c) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{(2a-a-b)}{b-a}\right)^j C_j = u_c + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j C_j, u(b) \equiv u_b = u(c) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{(2b-a-b)}{b-a}\right)^j C_j = u_c + \sum_{j=1}^{m} C_j.$$

Складывая два последних уравнения и выражая $u(c) = u_c$, получим

$$u_c = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) - C_2 - C_4 - ... - \begin{cases} C_m, m = 2l \\ C_{m-1}, m = 2l+1. \end{cases} \tag{11}$$

Аналогично, вычитая из второго уравнения u_b первое u_a и выражая $\dfrac{u_b - u_a}{2}$, получим формулу (10). Подставим значение $u(c)$ из формулы (11) в правую часть уравнения (9), затем перенесем в левую часть уравнения (9) все слагаемые с C_j и получим СЛАУ на коэффициенты C_j:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} C_j = \overline{f_i},\ i = \overline{0, m-1}. \tag{12}$$

Элементы матрицы $a_{i,j}, i = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, m}$ и коэффициенты правой части $\overline{f_i}$ в системе уравнений (12) определены ниже:

$$a_{i,j} = \begin{cases} \left\langle L\varphi_j, \varphi_i \right\rangle, \text{если } j \equiv 1(\text{mod } 2), i = \overline{0, m=2} \\ \left\langle L(\varphi_j - 1), \varphi_i \right\rangle, \text{если } j \equiv 0(\text{mod } 2), i = \overline{0, m-2} \\ 1, \text{если } i = m-1, j \equiv 1(\text{mod } 2) \\ 0, \text{если } i = m-1, j \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases},$$

$$\overline{f_i} = \begin{cases} \left\langle f(x) - L\left(\dfrac{u_a + u_b}{2}\right), \varphi_i(x) \right\rangle, \text{если } i = \overline{0, m-2} \\ \dfrac{u_b - u_a}{2}, \text{если } i = m-1 \end{cases},$$

$$L\left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) g_0(x).$$

Замечание 1. Использовать два краевых условия Дирихле $u(a)$, $u(b)$ в СЛАУ (12) невозможно, так как условия линейно зависимы.

Доказательство. Подставим в выражения $u(a)$, $u(b)$ значение $u(c) = u_c$ из формулы (11):

$$u(c) = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) - C_2 - C_4 - \ldots - \begin{cases} C_m, m = 2l \\ C_{m-1}, m = 2k+1 \end{cases}, u_a = u_c + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j C_j = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) - \left(C_1 + C_3 + \ldots + \begin{cases} C_{m-1}, m = 2l \\ C_m, m = 2l+1 \end{cases}\right).$$

Последнее выражение равносильно (10).

$$u_b = u_c + \sum_{j=1}^{m} C_j = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) + C_1 + C_3 + \ldots + \begin{cases} C_{m-1}, m = 2l \\ C_m, m = 2l+1. \end{cases}$$

Последняя формула также равносильна (10), что доказывает линейную зависимость краевых условий.

Замечание 2. В формулах (12) для матричных коэффициентов a_{ij} в четных столбцах дифференциальный оператор L действует на неположительную функцию $\varphi_j(x)$–1, а в нечетных столбцах на знакопеременную координатную функцию $\varphi_j(x)$. Если детерминант матрицы СЛАУ (12) не равен нулю, то численное решение (12) является единственным. Запишем формулы дифференцирования линейного оператора L по формуле (6) координатных функций (8):

$$\begin{cases} L\varphi_0 = g_0(x), \text{если } j = 0, \\ L\varphi_1 = \dfrac{2g_1(x)}{(b-a)} + g_0(x)\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right), \text{если } j = 1, \\ L\varphi_j = 4j(j-1)g_2(x)\dfrac{(2x-a-b)^{j-2}}{(b-a)^j} + 2jg_1(x)\dfrac{(2x-a-b)^{j-1}}{(b-a)^j} + g_0(x)\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)^j, \text{если } j \ge 2. \end{cases} \tag{13}$$

Учитывая (11), численное решение задачи Дирихле (6) можно привести к выражению (14), преобразуя формулу (8):

$$u(x) = \left(\frac{u_a + u_b}{2}\right) + \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\frac{(2x-a-b)}{b-a}\right)^j + \left(\frac{-1 + (-1)^{j+1}}{2}\right)\right] C_j. \tag{14}$$

Из (12) следует, что вектор C, входящий в формулу (14), имеет вид $C = A^{-1}\overline{f}$.

Оценим $u(x)$ по модулю с учетом формулы $C = A^{-1}\overline{f}$

$$|u(x)| \le \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2\sum_{j=1}^{m} |C_j| \le \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m \max_{j=1,m} C_j = \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m\|C\|_C \le \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m\left\|A^{-1}\right\|_C \|f\|_C \Rightarrow$$

$$\|u\|_C \le \frac{|u_a| + |u_b|}{2} + 2m\left\|A^{-1}\right\|_C \left\|\overline{f}\right\|_C.$$

Известно, что норма $\|B\|_C$ произвольной квадратной матрицы $B(m\times m)$ определяется формулой $\|B\|_C = \max_{i=\overline{1,m}} \sum_{j=1}^{m} |b_{i,j}|$.

В работе [9] получена составная квадратурная интегральная формула с равномерным шагом и с 12-м порядком погрешности $O(h^{12})$, которую использует программа для вычисления всех матричных элементов a_{ij}, а также коэффициентов правой части $\overline{f_i}$ СЛАУ (12) через скалярное произведение двух функций:

$$\langle y_1, y_2\rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)dx = 5h\sum_{i=0}^{n_1} y_1(x_i)y_2(x_i)C_i + O(h^{12}),\ n_1 = 10p,\ h = \frac{b-a}{n_1},\ p\in N, \tag{15}$$

где весовые коэффициенты интегральной квадратурной формулы (15) определяются величиной остатка по модулю 10 от номера узла равномерной сетки i:

$$C_i = \begin{cases} \dfrac{16067}{299376}, \text{если } i = 0 \text{ или } i = n_1, \\ \dfrac{16067}{149688}, \text{если } i \equiv 0\ (\text{mod}10) \text{ и } (0 < i < n_1), \\ \dfrac{26575}{74844}, \text{если } i \equiv 1\ (\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 9\ (\text{mod}10), \\ \dfrac{-16175}{99792}, \text{если } i \equiv 2\ (\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 8\ (\text{mod}10), \\ \dfrac{5675}{6237}, \text{если } i \equiv 3\ (\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 7\ (\text{mod}10), \\ \dfrac{-4825}{5544}, \text{если } i \equiv 4\ (\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 6\ (\text{mod}10), \\ \dfrac{17807}{12474}, \text{если } i \equiv 5\ (\text{mod}10). \end{cases}$$

Приведем примеры численного решения краевых задач алгоритмом (12)–(15).

Пример 1 [10]. Решить краевую задачу Дирихле

$$y'' - y = 2x, y(0) = 0, y(1) = -1, x\in[0,1]. \tag{16}$$

Точное решение $y(x) = sh(x)/sh(1) - 2x$.

Программа на языке Fortran, где функции и переменные заданы с двойной точностью по алгоритму (12)–(15), дает векторную норму Чебышева разности точного и приближенного решения $\|y-u\|_C = 4{,}218847493575595\text{E}-015$, если число координатных функций $m = 11$, число интервалов для вычисления скалярного произведения функций формулой (15) на равномерной сетке равно $n_1 = 50$, $\|y-u\|_C = \max_{i=\overline{0,n_1}} |y(x_i) - u(x_i)|, x_i = a + hi, h = \dfrac{b-a}{n_1}$.

Обратная матрица A^{-1} в системе линейных алгебраических уравнений (12) вычисляется библиотекой линейной алгебры msimsl для отыскания вектора коэффициентов разложения $C_j,\ j = \overline{1,m}$.

Пример 2 [9]. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = e^y \sin x,\ 0 < x < \pi, 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0. \end{cases}$

Решение задачи ищем в виде $u(x) = \sin(x) f(y)$. Такой выбор решения автоматически выполняет два краевых условия $u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0$. Подставим решение $u(x)$ в уравнение Пуассона $\sin(x)\left(f''(y) - f(y)\right) = e^y \sin(x), \forall x\in(0,\pi)$. Получим краевую задачу Дирихле для $f(y)$:

$$\begin{cases} f''(y) - f(y) = e^y \\ f(0) = f(\pi) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Последнее краевое условие Дирихле $f(0) = f(\pi) = 0$ в (17) выполняет краевые условия исходной задачи $u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0$.

Общее решение однородного уравнения (17) $f''(y) - f(y) = 0$ можно записать как $f_{o,o}(y) = A\,\text{ch}(y) + B\,\text{sh}(y)$, а частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$f_ч(y) = Cye^y, f_ч''(y) = Ce^y\left(y+2\right), f_ч'' - f_ч = Ce^y\left(y+2\right) - Cye^y = e^y \Leftrightarrow 2C = 1, C = \frac{1}{2}.$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения (17)

$$f_{o,н}(y) = A\,\text{ch}(y) + B\,\text{sh}(y) + \frac{ye^y}{2},\ f_{o,н}(0) = 0 \Rightarrow A = 0,\ f_{o,н}(\pi) = 0 \Rightarrow B = \frac{-\pi e^{\pi}}{2\,\text{sh}(\pi)},$$

$f(y) = \dfrac{ye^y\,\text{sh}(\pi) - \pi e^{\pi}\,\text{sh}(y)}{2\,\text{sh}(\pi)},\ u(x,y) = \left(\dfrac{ye^y\,\text{sh}(\pi) - \pi e^{\pi}\,\text{sh}(y)}{2\,\text{sh}(\pi)}\right)\sin(x)$ — точное решение задачи из примера 2.

Решая численно краевую задачу (17) с помощью алгоритма (12)–(15), получим норму Чебышева для разности численного и приближенного решения с числом координатных функций $m = 11$, числом интервалов для вычисления скалярного произведения функций на равномерной сетке $n_1 = 100$, $\|f - f_{num}\|_C = 8{,}079448221565144\text{E} - 011$.

Оценим равномерную норму вычислительной погрешности в примере 2 алгоритмом (12)–(15) $\|u - u_{num}\|_C \le \|f - f_{num}\|_C \|\sin(x)\|_C = \|f - f_{num}\|_C \approx 8\cdot 10^{-11}$.

В гидродинамике [3, 4] встречаются краевые задачи с дифференциальным уравнением третьего порядка. Рассмотрим пример 3.

Пример 3.

$$\begin{cases} u'''(x) + u'(x) = -2\sin(x), x \in (0,\pi), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0, y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Решим однородное уравнение $u'''(x) + u'(x) = 0$. Его характеристическое уравнение и собственные числа равны $\lambda^3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i = \pm\sqrt{-1}$, которым соответствуют 3 частных линейно независимых решения

$$\left\{U_1(x) = 1, U_2(x) = \sin(x), U_3(x) = \cos(x)\right\}, \left\{U_1'(x) = 0, U_2'(x) = \cos(x), U_3'(x) = -\sin(x)\right\},$$

$$\left\{U_1''(x) = 0, U_2''(x) = -\sin(x), U_3''(x) = -\cos(x)\right\}.$$

Проверим существование и единственность решения краевой задачи (18). Запишем элементы матрицы по формуле (5):

$$\alpha_1^0 = 1; \alpha_1^1 = 0; \alpha_1^2 = 0; \alpha_2^0 = 0; \alpha_2^1 = 1; \alpha_2^2 = 0; \beta_3^0 = 1; \beta_3^1 = 0; \beta_3^2 = 0,$$

$$A_{\mu j} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_\mu^i U_j^{(i)}(a), \mu = \overline{1,k} \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} \beta_\mu^i U_j^{(i)}(b), \mu = \overline{k+1,n},\ k = 2, n = 3. \end{cases}$$

$$A_{11} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1, A_{21} = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0, A_{31} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1,$$

$$A_{12} = 1\cdot\sin(0) + 0\cdot\cos(0) + 0\cdot(-\sin(0)) = 0, A_{22} = 0\cdot\sin(0) + 1\cdot\cos(0) + 0\cdot(-\sin(0)) = 1,$$

$$A_{32} = 1\cdot\sin(\pi) + 0\cdot\cos(\pi) + 0\cdot(-\sin(\pi)) = 0, A_{13} = 1\cdot\cos(0) + 0\cdot(-\sin(0)) + 0\cdot(-\cos(0)) = 1,$$

$$A_{23} = 0\cdot\cos(0) + 1\cdot(-\sin(0)) + 0\cdot(-\cos(0)) = 0, A_{33} = 1\cdot\cos(\pi) + 0\cdot(-\sin(\pi)) + 0\cdot(-\cos(\pi)) = -1.$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \ne 0$, то краевая задача (18) имеет единственное решение.

Непосредственной проверкой убедимся, что точным решением краевой задачи (18) является функция

$$u(x) = x\sin(x), u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), u''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x),$$

$$u'''(x) = -3\sin(x) - x\cos(x), u'''(x) + u'(x) = -3\sin(x) - x\cos(x) + \sin(x) + x\cos(x) = -2\sin(x), u(0) = u(\pi) = u'(0) = 0.$$

Утверждение 1 для краевой задачи (18) выполнено, следовательно, решение задачи единственно и совпадает с $u(x) = x\sin(x)$. Других решений нет.

Вычислим первую производную $u(x)$ по формуле (8) и приравняем ее к нулю в точке $x = a$.

$$u'(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(x) C_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{2j}{(b-a)} \left(\frac{(2x - a - b)}{b - a}\right)_{x=a}^{j-1} C_j = 0 \Leftrightarrow C_1 - 2C_2 + 3C_3 + \ldots + m(-1)^{m-1} C_m = 0. \tag{19}$$

Для краевой задачи с дифференциальным уравнением третьего порядка (18) получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} C_j = \overline{f_i},\ i = \overline{0, m-1}. \tag{20}$$

$$a_{i,j}=\begin{cases}\left\langle L\varphi_j,\varphi_i\right\rangle, \text{если } j\equiv 1(\operatorname{mod}2), i=\overline{0,m-3}\\ \left\langle L(\varphi_j-1),\varphi_i\right\rangle, \text{если } j\equiv 0(\operatorname{mod}2), i=\overline{0,m-3}\\ 1, \text{если } i=m-2, j\equiv 1(\operatorname{mod}2)\\ 0, \text{если } i=m-2, j\equiv 0(\operatorname{mod}2)\\ j(-1)^{j-1}, \text{если } i=m-1\end{cases},$$

$$\overline{f_i}=\begin{cases}\left\langle f(x)-L\left(\dfrac{u_a+u_b}{2}\right),\varphi_i(x)\right\rangle, \text{если } i=\overline{0,m-3}\\ \dfrac{u_b-u_a}{2}, \text{если } i=m-2\\ 0, \text{если } i=m-1\end{cases},$$

$$\begin{cases}L\varphi_0=g_0(x), \text{если } j=0,\\ L\varphi_1=\dfrac{2g_1(x)}{(b-a)}+g_0(x)\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right), \text{если } j=1,\\ L\varphi_2=8g_2(x)\dfrac{1}{(b-a)^2}+4g_1(x)\dfrac{(2x-a-b)}{(b-a)^2}+g_0(x)\left(\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)^2, \text{ если } j=2,\\ L\varphi_j=8j(j-1)(j-2)g_2(x)\dfrac{(2x-a-b)^{j-3}}{(b-a)^j}+\\ +4j(j-1)g_2(x)\dfrac{(2x-a-b)^{j-2}}{(b-a)^j}+2jg_1(x)\dfrac{(2x-a-b)^{j-1}}{(b-a)^j}+g_0(x)\dfrac{(2x-a-b)^j}{(b-a)^j}, \text{если } j\geq 3.\end{cases} \tag{21}$$

$$u(x)=\left(\frac{u_a+u_b}{2}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{(2x-a-b}{b-a}\right)^j+\left(\frac{-1+(-1)^{j+1}}{2}\right)\right]C_j. \tag{22}$$

Обратная матрица A^{-1} вычисляется библиотекой линейной алгебры msimsl для отыскания вектора коэффициентов разложения $C_j, j=1,m$, с использованием коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (20). Программа с использованием формул (14), (20), (21), (22) дает численное u_i^{num} и точное $u_i^{exact}=x_i\sin(x_i)$ решение задачи (18) на равномерной сетке $x_i=a+h\cdot i, i=\overline{0,n_1}, h=\dfrac{b-a}{n_1}, n_1=50, a=0, b=\pi$. Число координатных функций m = 15. Численное и точное решение данной задачи представлено в таблице 1.

Таблица 1

Решение задачи (18)

x_i	u_i^{num}	u_i^{exact}	$u_i^{num}-u_i^{exact}$
0,000000000E+000	0,0000000000E+000	0,00000000000E+000	0,00000000E+000
0,12566370614359	1,5749838632E–002	1,5749838632E–002	3,36702887793E–013
0,25132741228718	6,2502585803E–002	6,2502585803E–002	–7,5051076464E–014
0,37699111843077	0,1387796868382	0,1387796868384	–2,2543078515E–013
0,50265482457436	0,2421558085434	0,2421558085436	–2,5310309403E–013
0,62831853071795	0,3693163660978	0,3693163660980	–2,3742119381E–013
0,75398223686155	0,5161363581649	0,5161363581652	–2,1926904736E–013
0,87964594300514	0,6777788480392	0,6777788480394	–2,0117241206E–013
1,00530964914873	0,8488110105527	0,8488110105529	–1,7474910407E–013
1,13097335529233	1,0233352874866	1,0233352874867	–1,4477308241E–013
1,25663706143592	1,1951328658964	1,1951328658966	–1,3122836151E–013

Окончание таблицы 1

x_i	u_i^{num}	u_i^{exact}	$u_i^{num}-u_i^{exact}$
1,38230076757951	1,3578164206656	1,3578164206658	–1,4432899320E–013
1,50796447372310	1,5049888502957	1,5049888502959	–1,6875389974E–013
1,63362817986669	1,6304045878204	1,6304045878205	–1,7497114868E–013
1,75929188601028	1,72812998993818	1,72812998993833	–1,5254464358E–013
1,88495559215388	1,79269929884481	1,79269929884493	–1,2145839889E–013
2,01061929829747	1,81926273330968	1,81926273330979	–1,1013412404E–013
2,13628300444106	1,80372339742481	1,80372339742493	–1,2212453270E–013
2,26194671058465	1,74285989495849	1,74285989495861	–1,2412293415E–013
2,38761041672824	1,63443180085643	1,63443180085651	–8,038014698286E–014
2,51327412287183	1,47726546439236	1,47726546439237	–5,1070259132E–015
2,63893782901543	1,27131799485423	1,27131799485419	4,50750547997E–014
2,76460153515902	1,01771770348181	1,01771770348179	2,17603712826E–014
2,89026524130261	0,71877973673595	0,71877973673604	–9,7144514654E–014
3,01592894744620	0,37799612718318	0,37799612718362	–4,3676173788E–013
3,07876080051800	0,193316990170226	0,193316990171009	–7,8290152139E–013
3,14159265358979	3,8472143247E–016	–1,0104259667E–015	1,39514739920E–015

В первом столбце таблицы 1 указано значение узла x_i равномерной сетки, во втором столбце записано численное решение u_i^{num}, в третьем столбце точное решение u_i^{exact} в узлах x_i. В последнем столбце находится их разность $u_i^{num}-u_i^{exact}$.

В примере 3 программа дает норму погрешности $\left\|u_i^{num}-u_i^{exact}\right\|_C=\max\limits_{i=\overline{0,n_1}}\left|u_i^{num}-u_i^{exact}\right|\approx 7{,}829\mathrm{E}-013.$

Результаты исследования. Авторами получен следующий алгоритм модифицированного метода Бубнова-Галеркина:

– в краевой задаче с обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n необходимо выбрать систему m+1 координатных функций $\left\{1,z,z^2,...,z^m,m>n\right\}$;

– из n краевых условий выбрать систему линейно независимых условий (в случае заданных значений функции u_a, u_b независимых условий n–1), включить независимые краевые условия в СЛАУ;

– потребовать, чтобы первые m–(n–1) = m–n+1 координатные функции были ортогональны невязке дифференциального уравнения. Тогда в неоднородной системе линейных алгебраических уравнений m–n+1+n–1 = m строк и m неизвестных C_j, $j=\overline{1,m}$.

Обсуждение и заключение. Основные результаты, полученные авторами:

1. Предложена система координатных функций, бесконечно дифференцируемых, ограниченных, линейно независимых на отрезке [–1,1] для решения краевой задачи с линейным дифференциальным уравнением порядка n.

2. Впервые предложен модифицированный метод Бубнова-Галеркина, в котором система линейных алгебраических уравнений (12), (20) включает n–1 краевое условие задачи.

3. Для случая, когда известны n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения, получен критерий (5) существования и единственности решения краевой задачи с разделенными краевыми условиями (Утверждение 1).

4. Модифицированный алгоритм Бубнова-Галеркина предложен для краевых задач с уравнениями второго и третьего порядков (12)–(15) и (20)–(22).

5. Модифицированным алгоритмом численно решены 3 примера с равномерной нормой погрешности не более, чем 10^{-11}.

Список литературы / References

1. Морозова Е.А. Разрешимость краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* 2010;3(3):46–50.

Morozova E.A. Solvability of a boundary value problem for a system of ordinary differential equations. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2010;3(3):46–50. (in Russ.)

2. Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2014;2(25):5–9.

Abdullaev A.R., Skachkova E.A. On one multipoint boundary value problem for a second-order differential equation. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2014;2(25):5–9. (in Russ.)

3. Ершова Т.Я. Краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка с сильным пограничным слоем. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*. 2020;1:30–39.

Ershova T.Ya. Boundary value problem for a third-order differential equation with a strong boundary layer. *Bulletin of Moscow University. Episode 15: Computational mathematics and cybernetics*. 2020;1:30–39. (in Russ.)

4. Ершова Т.Я. О сходимости сеточного решения задачи для уравнения третьего порядка в случае сильного пограничного слоя. В: «*Ломоносовские чтения: научная конференция*». Москва: ООО «МАКС Пресс»; 2020. С. 77–78.

Ershova T.Ya. On the convergence of a grid solution to the problem for a third-order equation in the case of a strong boundary layer. *Lomonosov readings: scientific conference*. 2020:77–78. (in Russ.)

5. Бахвалов Н.С. Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений*. Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. Москва: Бином. Лаборатория знаний; 2011. 636 с.

Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods: a textbook for students of physics and mathematics specialties of higher educational institutions*. Moscow: Binom. lab. Knowledge; 2011. 636 p. (in Russ.)

6. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. *Численные методы в задачах и упражнениях*. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний; 2010. 240 с.

Bakhvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. *Numerical methods in problems and exercises*. Moscow: BINOM. Knowledge laboratory; 2010. 240 p. (in Russ.)

7. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации: *Теория. Примеры. Задачи*. Москва: Физматлит; 2008. 256 с.

Alekseev V.M., Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Collection of optimization problems: Theory. Examples. Problems*. Moscow: FIZMATLIT; 2008. 256 p. (in Russ.)

8. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К. *Численные методы. Лекции. Численный практикум*. Новополоцк; 2021. 237 с.

Pastukhov D.F., Pastukhov Yu.F., Volosova N.K. *Numerical methods. Lectures. Numerical workshop*. Novopolotsk; 2021. 237 p. (in Russ.)

9. Пикулин В.П., Похожаев С.И. *Практический курс по уравнениям математической физики*. Москва: МЦНМО; 2004. 208 с.

Pikulin V.P., Pohozhaev S.I. *Practical course on the equations of mathematical physics*. Moscow: MTsNMO; 2004. 208 p. (in Russ.)

10. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. Москва : URSS, 2009. 176 с.

Filippov A.F. *Collection of problems on differential equations*. URSS, 2009. 176 p. (in Russ.)

Об авторах:

Наталья Константиновна Волосова, аспирант МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Российская Федерация, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1), ORCID, navalosova@yandex.ru

Константин Александрович Волосов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, Российская Федерация, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), ORCID, konstantinvolosov@yandex.ru

Александра Константиновна Волосова, кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин» Российского университета транспорта (127994, Российская Федерация, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9), ORCID, alya01@yandex.ru

Дмитрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), ORCID, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Юрий Феликсович Пастухов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), ORCID, pulsar1900@mail.ru

Заявленный вклад авторов: **все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.**

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Natalya K. Volosova, Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5–1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, Russian Federation, 105005), ORCID, navalosova@yandex.ru

Konstantin A. Volosov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, Russian Federation, 127994), ORCID, konstantinvolosov@yandex.ru

Aleksandra K. Volosova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (9–9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, Russian Federation, 127994), ORCID, alya01@yandex.ru

Dmitriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), ORCID, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Yuriy F. Pastukhov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), ORCID, pulsar1900@mail.ru

Contributions of the authors: **all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.**

Conflict of Interest Statement: the authors declare no conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 30.07.2024
Поступила после рецензирования / Revised 19.08.2024
Принята к публикации / Accepted 26.08.2024