ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Козлов А.А.
заведующий кафедрой высшей математики УО «ПГУ»,
г. Новополоцк, Республика Беларусь

На сегодняшний день одной из активно развивающихся как в Республике Беларусь, так и за рубежом, областей математических исследований является теория управления асимптотическими характеристиками (инвариантами) линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Это связано, прежде всего, с тем, что полученные в этой теории результаты позволяют для управляемой динамической системы (механической, физической, технической) строить воздействия, управляющие ее устойчивостью. При этом устойчивость здесь понимается в самом широком смысле – это и устойчивость по Ляпунову, и асимптотическая устойчивость, и равномерная асимптотическая устойчивость, и устойчивость по Пуассону, и орбитальная устойчивость и др. Все зависит лишь от выбора тех асимптотических инвариантов, подлежащих управлению, которые отвечают за требуемый тип устойчивости.

В настоящее время уже достаточно хорошо изучены задачи управления асимптотическими инвариантами в классе линейных систем (1) с гладкими или кусочно-гладкими коэффициентами (П. Бруновский, Р.Калман, И.В. Гайшун, Е.Я. Смирнов, В.Т. Борухов, Е.Л. Тонков), в классе систем с равномерно непрерывными, а также кусочно-постоянными коэффициентами (Е.Л. Тонков, С.Н. Попова, Е.К. Макаров, В.А. Зайцев).

Материал и методы. В представленной работе рассматривается линейная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad u \in \mathrm{R}^m, \quad t \ldots 0, \tag{1}$$

Замыкая систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U – некоторая ограниченная и измеримая $(m \times n)$-матрица, получим однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathrm{P}^n, \quad t \square 0. \quad 0 \tag{2}$$

Определение 1. *Преобразованием Ляпунова* называется линейное преобразование $z = L(t)y$ с обратимой абсолютно непрерывной матричной функцией $L = L(t)$ заданной на положительной полуоси со значениями во множестве $n \times n$-матриц и удовлетворяющей для всех $t \geq 0$ неравенству $\| L(t) \| + \| L^{-1}(t) \| + \| \dot{L}(t) \| < +\infty$ (здесь $\| \cdot \|$ означает операторную (спектральную) норму матриц).

Определение 1. Однородные линейные системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами $\dot{y} = F(t)y, \ t \geq 0,$ и $\dot{z} = D(t)z, \quad t \geq 0,$ связанные преобразованием Ляпунова, называются *асимптотически эквивалентными* (*по Богданову*).

Определение 3. *Асимптотическими* (*ляпуновскими*) *инвариантами* линейных однородных систем n-го порядка называются величины (свойства), относящиеся к этим системам, которые не меняются под действием преобразований Ляпунова. Асимптотическими инвариантами являются [1, с. 29-80], например, свойства устойчивости, асимптотической устойчивости, правильности, приводимости и т.п.; полный спектр показателей Ляпунова, особый показатель Боля, коэффициенты неправильности и т.п.

Определение 4. *Задача глобального управления асимптотическим инвариантом* системы (2) состоит в нахождении такого измеримого и ограниченного управления U, что система (2) с этим управлением будет иметь наперед заданное значение этого инварианта. Так, напр., рассматривая в данной задаче в качестве асимптотического инварианта $i(A+BU)$ полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A+BU) \square \ldots \square \lambda_n(A+BU)$ системы (2), получим *задачу глобального управления показателями Ляпунова*, т.е. задачу о построении для системы (1) обратной связи $u = U(t)x,$ обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A+BU) = \mu_i, \ i = \overline{1,n},$ для произвольных заранее заданных вещественных чисел $\mu_1 \square \ldots \square \mu_n$.

Определение 5. Система (1) называется равномерно вполне управляемой (по Тонкову), если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0,$ что при любых $t_0 \ldots 0$ и $x_0 \in \mathrm{R}^n$ на отрезке

$[t_0, t_0+\sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление u, при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Результаты и их обсуждение. Получены следующие результаты

Теорема 1. Пусть $n \in \{2,3\}, m \in \{1,\dots,n\}$. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема* (*по Тонкову*), *то*

1) *полная совокупность характеристических показателей Ляпунова соответствующей системы* (2) *глобально управляема;*

2) *верхний особый* (*генеральный*) *показатель Боля соответствующей системы* (2) *глобально управляем;*

3) *соответствующая ей система* (2) *обладает свойством глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана;*

4) *соответствующая ей система* (2) *обладает свойствами глобальной управляемости правильности и приводимости.*

Определение 5. Система (2) обладает *свойством глобальной ляпуновской приводимости,* если для любой наперед заданной системы

$$\dot{z} = D(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами найдется измеримое и ограниченное управление $U(\cdot)$, что система (2) с этим управлением будет асимптотически эквивалентна системе (3).

Свойство глобальной ляпуновской приводимости системы (2) означает, что при любой наперед заданной линейной системе (3) для системы (2) найдется такое управление $U(\cdot)$, которое обеспечит качественную "схожесть" характеров поведения в окрестности времени $+\infty$ решений системы (2) с этим управлением и системы (3) (такие *системы* называются *кинематически подобными*). Поскольку в этом случае каждый асимптотический инвариант системы (2) окажется равным соответствующем инварианту системы (3), то система (2) обладает еще и *свойством глобальной управляемости полной совокупности асимптотических инвариантов*.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \{2,3\}$, $m \in \{1,\dots,n\}$. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то полная совокупность асимптотических инвариантов соответствующей системы* (2) *глобально управляема.*

Определение 6. Система (2) называется *равномерно глобально достижимой*, если найдется число $\sigma > 0$, для которого при любых $r \geq 1$ и $\rho > 0$ существует величина $d = d(r,\rho) > 0$ такая, что для всякой $(n \times n)$-матрицы H, удовлетворяющей неравенствам $\|H - E\| \leq r$ и $\det H \geq \rho$, и любого $t_0 \geq 0$ найдется на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ такое измеримое и ограниченное управление U, удовлетворяющее условию $\|U(t)\| \leq d$ для всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t,s \geq 0$, системы (2) с этим управлением справедливо равенство $X_U(t_0+\sigma, t_0) = H$.

Замечание 1. Равномерная глобальная достижимость является достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости.

Теорема 5. *Пусть* $n \in \{2,3\}$, $m \in \{1,\dots,n\}$. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Теорема 6. *Система* (1) *с кусочно-непрерывными и ограниченными* ω*-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система* (2) *с такими же коэффициентами равномерно глобально достижима.*

Замечание 2. С основными определениями, используемыми в данной работе, можно более подробно познакомится в монографии [1].

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований РБ «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

1. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов неста-ционарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Бела-рус. навука, 2012. – 407 с.