УДК 517.926+517.977

О свойстве равномерной согласованности линейных управляемых локально интегрируемых уравнений с наблюдателем

А.А. Козлов, А.Д. Бурак
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

Рассматривается линейное нестационарное управляемое уравнение

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathrm{R}, \quad u \in \mathrm{R}, \quad t\,..\,0, \tag{1}$$

с наблюдателем

$$y = c(t)x, \quad y \in \mathrm{R}, \tag{2}$$

в котором коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ *и* $c(t)$ *являются локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными на положительной полуоси скалярными функциями. Управление в системе* (1), (2) *строится в виде линейной обратной связи по выходу* $u = \upsilon(t)y$ *с измеримой и ограниченной вещественной функцией* $\upsilon(t)$, $t\,..\,0$. *В результате подстановки выбранного управления в исходную систему получим уравнение с коэффициентами из того же класса, что и в* (1), (2),

$$\dot{x} = (a(t) + b(t)\upsilon(t)c(t))x, \quad x \in \mathrm{R}, \quad t\,..\,0. \tag{3}$$

В представленной работе на основании результатов работ С.Н. Поповой и Е.Л. Тонкова для уравнений вида (1), (2) *сформулировано понятие равномерной согласованности на отрезке* $[t_0, t_0 + \sigma]$, *означающее, что при любом числе* $t_0\,..\,0$ *существует величина* $\alpha > 0$ *такая, что для всякого числа* $h \in \mathrm{R}$ *найдется измеримая и ограниченная вещественная функция* $\upsilon(t)$, *удовлетворяющая оценке* $\sup\limits_{t \in [t_0,\, t_0 + \sigma]} |\upsilon(t)| \le \alpha \cdot |h|$ *и обеспечивающая разрешимость задачи управления*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)\upsilon(t)c(t)\tilde{x}(t, t_0),$$
$$x(t_0) = 0, \quad x(t_0 + \sigma) = h,$$

и установлено достаточное условие равномерной согласованности таких уравнений. Приведены примеры согласованных и несогласованных уравнений.

Рассмотренное в работе понятие равномерной согласованности в дальнейшем будет использовано для решения задачи глобального управления асимптотическими инвариантами уравнений (1) *с наблюдателем* (2). *Кроме того, предложенный метод отыскания достаточного условия равномерной согласованности позволит в будущем распространить полученные результаты на случай линейных управляемых локально интегрируемых систем с наблюдателем малых размерностей.*

Ключевые слова: *линейное управляемое уравнение, равномерная полная управляемость, равномерная согласованность, локальная интегрируемость, интегральная ограниченность, управление асимптотическими инвариантами линейных систем.*

About the Property of Uniform Coherency of Linear Control Locally Integrable Equations with Observer

A.A. Kozlov, A.D. Burak
Educational Establishment «Polotsk State University»

Let us consider a linear non-stationary control equation

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)u, \quad x \in \mathrm{R}, \quad u \in \mathrm{R}, \quad t\,..\,0, \tag{1}$$

with observer

$$y = c(t)x, \quad y \in \mathrm{R}, \tag{2}$$

in which coefficients $a(t)$, $b(t)$ *and* $c(t)$ *are Lebesgue locally integrable and integrally bounded scalar functions on the positive* *semiaxis. Control of the system* (1), (2) *is constructed by the principle of a linear feedback of output* $u=\upsilon(t)y$ *with measure and bounded real function* $\upsilon(t),\ t\geq 0.$ *As the result of the lookup of the selected control in the initial system we get equation with coefficients from the same class, as in* (1), (2)

$$\dot{x}=(a(t)+b(t)\upsilon(t)c(t))x,\quad x\in\mathrm{R},\quad t\geq 0. \tag{3}$$

In the present work basing on results of S.N. Popova's and E.L Tonkov's works for equations (1), (2) *the notion of uniform coherency on segment* $[t_0,t_0+\sigma]$ *is formulated that means that measure* $\alpha>0$ *exists with each number* $t_0\geq 0$ *such that for each number* $h\in\mathrm{R}$ *measure and bounded real function* $\upsilon(t)$ *can be found that satisfies the unequatione* $\sup\limits_{t\in[t_0,\,t_0+\sigma]}|\upsilon(t)|\leq\alpha\cdot|h|$ *and provides the solvability of the problem of control*

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)\upsilon(t)c(t)\tilde{x}(t,t_0),$$
$$x(t_0)=0,\quad x(t_0+\sigma)=h\,,$$

and sufficient condition of uniform coherency of this equations is established. Also examples of coherent and non-coherent equations are given.

The notion of uniform coherency that is considered in this research will be used in future for solving the problem of global control of asymptotic exponents of equations (1) *with observer* (2). *Also the proposed method of finding the sufficient condition of uniform coherency allows to extend given results in case of linear control systems with observer with Lebesgue locally integrable and integrally bounded coefficients with observer of small dimensions.*

Key words: *linear control equation, uniform full controllability, uniform coherency, local integrability, integral boundness, control of asymptotic invariants of non-stationary linear systems.*

Понятие *равномерной согласованности* было введено С.Н. Поповой и Е.Л. Тонковым в работах [1–4; см. также 5, с. 101–180]. Равномерная согласованность – это свойство нестационарных линейных систем с наблюдателем, которое позволяет эффективно решать задачи управления различными асимптотическими инвариантами таких систем. Поясним вышесказанное.

Пусть R^m – векторное евклидово пространство размерности *n* с евклидовой нормой, т.е. нормой $\|x\|=\sqrt{x^Tx}$ для всякого вектора $x\in\mathrm{R}^n$ (символ ^{T} означает операцию транспонирования); M_{mn} – пространство вещественных $(m\times n)$-матриц со спектральной (операторной) нормой

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|,$$

т.е. нормой, индуцируемой евклидовыми нормами в пространствах R^m и R^n; $M_n:=M_{nn}$.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathrm{R}^n,\quad t\geq 0. \tag{1}$$

Интегральная ограниченность [6, с. 252] матрицы $A(\cdot)$ означает, что найдется такая величина $a>0,$ при которой для любого числа $t\geq 0$ выполняется неравенство $\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|\,d\tau\leq a<\infty.$

Определение 1 [6, с. 247]. *Преобразованием Ляпунова называется линейное преобразование*

$$z=L(t)x,$$

$(n\times n)$*-матрица* $L(t)$ *которого для всякого* $t\geq 0$ *обратима, абсолютно непрерывна и удовлетворяет условию*

$$\|L(t)\|+\|L^{-1}(t)\|+\sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|\dot{L}(\tau)\|d\tau<+\infty.$$

Определение 2 [5, с. 60]. *Асимптотическим инвариантом* $i(A)$ *системы* (1) *называется такое свойство или величина, которое сохраняется под действием преобразования Ляпунова.*

Примерами асимптотических инвариантов могут служить [5, с. 29–80] полная совокупность характеристических показателей Ляпунова, нижние показатели Перрона, свойства асимптотической устойчивости, приводимости и диагонализируемости системы (1) и многие другие.

Наряду с системой (1) рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\quad x\in\mathrm{R}^n,\quad u\in\mathrm{R}^m,\quad t\geq 0, \tag{2}$$

в которой матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ принадлежат (так же, как и в (1)) классу локально интегрируемых по Лебегу и интегрально ограниченных матричных функций. Замкнув эту систему при помощи линейной по фазовой переменной обратной связью

$$u=U(t)x, \tag{3}$$

где $U(t)$ – некоторая измеримая и ограниченная матричная функция, получим однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Определение 3 [5, с. 182]. *Задачей глобального управления асимптотическим инвариантом* $i(A+BU)$ *системы* (4) *называется задача о нахождении такого измеримого и ограниченного управления* (3), *что система* (4), *замкнутая этим управлением, будет иметь наперед заданное значение этого инварианта.*

Например, рассматривая в данной задаче в качестве асимптотического инварианта полный спектр показателей Ляпунова системы (4), получим задачу глобального управления полной совокупностью характеристических показателей Ляпунова этой системы.

Е.Л. Тонковым было предложено решать задачи управления асимптотическими инвариантами системы (4) в предположении *равномерной полной управляемости* соответствующей ей системы (2).

Определение 4 [7]. *Система* (2) *называется равномерно вполне управляемой, если существуют такие числа* $\sigma > 0$ *и* $\gamma > 0$, *что для всякого начального момента времени* $t_0 \geq 0$ *и вектора начального состояния* $x_0 \in \mathrm{R}^n$ *найдется измеримое и ограниченное управление* $u:[t_0, t_0+\sigma] \to \mathrm{R}^m$, *при каждом* $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ *удовлетворяющее неравенству* $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$ *и решающее задачу управления в нуль ее начального состояния* $x(t_0) = x_0$ *на этом отрезке.*

Такой подход для систем (4) оказался достаточно эффективным и привел к получению многочисленных результатов (см., напр., [5]). Оказалось, что свойство равномерной полной управляемости системы (5) является достаточным условием для решения большинства задач теории управления асимптотическими инвариантами систем (4), т.е. при условии отсутствия наблюдателя.

Рассмотрим теперь линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, x \in \mathrm{R}^n, u \in \mathrm{R}^m, t \geq 0, \tag{5}$$

с наблюдателем

$$y = C^T(t)x, y \in \mathrm{R}^r, t \geq 0, \tag{6}$$

матрицы $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, и $C(\cdot)$ которой локально интегрируемы по Лебегу и интегрально ограничены на положительной полуоси.

По словам классиков теории управления асимптотическими инвариантами линейных систем С.Н. Поповой и Е.К. Макарова, «введение наблюдателя в управляемую систему, не вызывающее принципиальных затруднений при решении задач оптимального управления на конечных отрезках времени, заметно усложнило управление асимптотическими инвариантами, например, характеристическими показателями Ляпунова, отвечающими за асимптотическую устойчивость системы. В этой связи адекватная постановка соответствующих задач требовала разработки новых методов управления асимптотическими инвариантами для таких систем» [5, с. 101].

На сегодняшний день разработаны, по-видимому, два основных способа решения задач управления асимптотическими инвариантами систем с наблюдателем. Первый метод, созданный Р. Калманом для стационарных управляемых систем (5), (6) (см., напр. [8, с. 274]), а затем обобщенный В.А. Зайцевым [9] на нестационарные управляемые системы, заключается в построении для системы (5), (6) так называемого *асимптотического идентификатора* (*системы асимптотической оценки состояния*) [8, с. 274] и предполагает интегрируемость с квадратом матриц $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$. Другой метод, предложенный С.Н. Поповой и Е.Л. Тонковым, состоит в применении понятия, распространяющего представления о равномерной полной управляемости на системы с наблюдателем – *свойства равномерной согласованности* системы (5), (6).

Определение 5 [1; 5, с. 102]. *Система* (5) *называется равномерно согласованной, если найдутся числа* $\sigma > 0$ *и* $l > 0$ *такие, что для любого* $t_0 \geq 0$ *и матрицы* $G \in M_n$ *существует измеримое и ограниченное управление* $U_G : [t_0, t_0+\sigma] \to M_{mr}$, *удовлетворяющее неравенству* $\|U_G\| \leq l \|G\|$ *и обеспечивающее разрешимость относительно* $Z(\cdot)$ *задачи управления*

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)U_G(t)C^T(t)X(t, t_0),$$
$$Z(t_0) = 0, \quad Z(t_0+\sigma) = G,$$

в которой $X(t, t_0)$ – *матрица Коши однородной системы* (1), *т.е. системы* (5) *с нулевым управлением*.

По поводу представленного свойства С.Н. Поповой было отмечено, что «детальное изучение свойств согласованных систем – необходимый фундамент для построения теории управления асимптотическими инвариантами линейных систем с наблюдателем, поскольку неконтролируемое искажение информации о состоянии системы несогласованным наблюдателем может полностью лишить всех возможностей для управления как ее показателями Ляпунова, так и другими асимптотическими характеристиками» [5, с. 101].

Метод исследования систем (5), (6) на наличие у них свойства равномерной согласованности, который предложен С.Н. Поповой и Е.Л. Тонковым, заключается в построении для этой системы так называемой *матрицы согласования* [1; 5, с. 102–103],

$$\Gamma(\sigma,\tau)=\{\Gamma_{ij}(\sigma,\tau)\}_{i,j=1}^{n},\quad \Gamma_{ij}(\sigma,\tau)=\{\gamma_{ijps}(\sigma,\tau)\}_{p,s=1}^{n},$$

$$\gamma_{ijps}(\sigma,\tau)=\int_{\tau}^{\tau+\sigma} e_i^T X(\tau,t)B(t)(X(\tau,t)B(t))^T e_j e_p^T X^T(t,\tau)C(t)(X^T(t,\tau)C(t))^T e_s dt,$$

условием существования которой (так же, как и применимости в целом метода В.А. Зайцева [9]) является интегрируемость с квадратом матриц $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$. В связи с этим в существующих на сегодняшний день работах [1–5] по управлению асимптотическими инвариантами, базирующихся на свойстве равномерной согласованности, коэффициенты рассматриваемых систем (5) с наблюдателем (6) принадлежат классу локально интегрируемых ***с квадратом*** функций. Отказ же от последнего условия делает фактически невозможным изучение на основе свойства равномерной согласованности вопросов управления асимптотическими инвариантами систем с наблюдателем, коэффициенты которых содержатся в более широких функциональных классах.

В данной статье рассмотрены линейные управляемые уравнения с локально интегрируемыми *(**без интегрируемости с квадратом**)* и интегрально ограниченными на положительной полуоси коэффициентами и наблюдателем. Для такого множества нестационарных уравнений по аналогии с работами [1–4] дано понятие равномерной согласованности, а также установлено достаточное условие равномерной согласованности таких уравнений.

Материал и методы. Рассмотрим линейное нестационарное управляемое уравнение

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)u,\quad x\in\mathrm{R},\quad u\in\mathrm{R},\quad t\geq 0, \tag{7}$$

с наблюдателем

$$y=c(t)x,\quad y\in\mathrm{R}, \tag{8}$$

и локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными функциями $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$.

Замыкая систему (7) при помощи линейной по фазовой переменной обратной связи

$$u=\upsilon(t)y,$$

где $\upsilon(t)$ – некоторая измеримая и ограниченная при всех $t\geq 0$ вещественная функция, получим однородное уравнение

$$\dot{x}=(a(t)+b(t)\upsilon(t)c(t))x,\quad x\in\mathrm{R},\quad t\geq 0, \tag{9}$$

коэффициенты которого также локально интегрируемы и интегрально ограничены. Управление u будем считать *допустимым*, если оно является измеримой и ограниченной на положительной полуоси скалярной функцией со значениями в R.

Легко видеть, что решение однородного уравнения

$$\dot{x}=a(t)x,\quad t\geq 0,$$

соответствующего уравнению (7), с начальным условием $x(t_0)=x_0$ имеет вид

$$x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau\right)\cdot x_0=:\tilde{x}(t_0,t)\cdot x_0.$$

В соответствии с ***определением 5*** для $n=1$, т.е когда система (5) является уравнением (7), сформулируем

Определение 6. *Уравнение* (7) *будем называть согласованным на отрезке* $[t_0,t_0+\sigma]$, *если существует величина* $\alpha>0$ *такая, что для всякого числа* $h\in\mathrm{R}$ *найдется допустимое управление* $\upsilon(t)$, *удовлетворяющее оценке*

$$\sup_{t\in[t_0,\,t_0+\sigma]}|\upsilon(t)|\leq\alpha\cdot|h| \tag{10}$$

и обеспечивающее разрешимость задачи управления

$$\dot{x}=a(t)x+b(t)\upsilon(t)c(t)\tilde{x}(t,t_0), \tag{11}$$

$$x(t_0)=0,\quad x(t_0+\sigma)=h, \tag{12}$$

и равномерно согласованным, если найдется такое $\sigma>0$, *что уравнение* (7) *согласовано на отрезке* $[t_0,t_0+\sigma]$ *при любом* $t_0\geq 0$.

Теорема. *Если найдутся такие величины* $\sigma>0$ *и* $\beta>0$, *при которых для всякого числа* $t_0\geq 0$ *выполняется оценка*

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|b(\tau)c(\tau)|\,d\tau\geq\beta, \tag{13}$$

то уравнение (7) *является равномерно согласованным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное число $t_0\geq 0$. Тогда решение $x=x(t)$ уравнения (7) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ и любой измеримой и ограниченной скалярной функцией $\upsilon=\upsilon(t)$, $t\geq 0$, имеет вид

$$x(t) = \tilde{x}(t,t_0)\cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{x}(t,\tau)b(\tau)\upsilon(\tau)c(\tau)\tilde{x}(\tau,t_0)d\tau. \qquad (14)$$

В силу определения функции $\tilde{x}(t,\tau),\ t,s \geq 0,$ для любых $t,\tau,t_0 \geq 0$ справедливы равенства

$$\tilde{x}(t,\tau)\tilde{x}(\tau,t_0) = \exp(\int_t^{\tau} a(\tau)d\tau)\cdot\exp(\int_{\tau}^{t_0} a(\tau)d\tau) = \exp(\int_t^{t_0} a(\tau)d\tau) = \tilde{x}(t,t_0).$$

Отсюда и из формулы (14) следует соотношение

$$x(t) = \tilde{x}(t,t_0)(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)\upsilon(t)c(t)dt). \qquad (15)$$

Зафиксируем произвольное число $h \in \mathrm{R}$ и рассмотрим на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ задачу управления (11), (12). Предположим, что выполняются условия данной теоремы. Тогда, пользуясь неравенством (13), найдем решение задачи управления (11), (12). Управление $\upsilon = \upsilon(t)$ на отрезке $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ определим следующим образом:

$$\upsilon(t) = \operatorname{sign}\big(b(t)\big)\cdot\operatorname{sign}\big(c(t)\big)\cdot\tilde{x}(t_0,t_0+\sigma)\cdot h\cdot(\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,b(t)c(t)\,|\,dt)^{-1}. \qquad (16)$$

В силу условия (13) интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, отличен от нуля, и поэтому функция $\upsilon = \upsilon(t)$ существует при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma].$ Поскольку же функции-множители, входящие в правую часть управления $\upsilon,$ являются измеримыми и ограниченными для всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ вещественными функциями, то выбранное управление является допустимым.

Покажем теперь, что взятое управление обеспечивает разрешимость задачи управления (11), (12). Из соотношений (15), первого равенства в формуле (12) с учетом выбранной функции $\upsilon = \upsilon(t),\ t \in [t_0, t_0+\sigma],$ для решения $x(t)$ уравнения (11) в точке $t_0+\sigma$ установим цепочку равенств

$$x(t_0+\sigma) = \tilde{x}(t_0+\sigma, t_0)\times$$
$$\times 0 + \int_{t_0}^{t_0+\sigma}(b(t)\cdot c(t)\cdot(\operatorname{sign}\big(b(t)\big)\cdot\operatorname{sign}\big(c(t)\big)\cdot\tilde{x}(t_0,t_0+\sigma)\cdot h)dt\cdot(\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,b(t)c(t)\,|\,dt)^{-1}) =$$
$$= \tilde{x}(t_0+\sigma,t_0)\cdot\tilde{x}(t_0,t_0+\sigma)\cdot(\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,b(t)c(t)\,|dt\cdot(\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,b(t)c(t)\,|\,dt)^{-1})\cdot h = h.$$

Следовательно, выбранное управление (16) является решением задачи управления (11), (12). Найдем теперь оценку на такое управление. На основании формулы (13), верных при всяком $t \geq 0$ очевидных соотношений $|\operatorname{sign}\big(b(t)\big)| \leq 1$ и $|\operatorname{sign}\big(c(t)\big)| \leq 1,$ с учетом неравенства $|\,\tilde{x}(t,s)\,| \leq \exp(a),\ t,s \in [t_0, t_0+\sigma],$ где $a := \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+\sigma}|\,a(\tau)\,|\,d\tau,$ вытекающего из определения функции $\tilde{x}(t,s)$ и интегральной ограниченности функции $a(t),\ t \geq 0,$ имеют место следующие соотношения:

$$\sup_{t\in[t_0,\,t_0+\sigma]}|\,\upsilon(t)\,| = \sup_{t\in[t_0,\,t_0+\sigma]}|\operatorname{sign}\big(b(t)\big)\cdot\operatorname{sign}\big(c(t)\big)\cdot\tilde{x}(t_0,t_0+\sigma)\cdot h\cdot(\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,b(t)c(t)\,|\,dt)^{-1}\,| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[t_0,\,t_0+\sigma]}|\,(1\cdot 1\cdot\exp(a)\cdot h)\cdot\beta^{-1}\,| = (\exp(a)/\beta)\cdot|\,h\,|.$$

Положив $\alpha := \exp(a)/\beta,$ установим, что выбранное управление удовлетворяет неравенству (10), и поэтому уравнение (7) является согласованным. Теорема доказана.

Приведем примеры согласованных и несогласованных уравнений.

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение с наблюдателем

$$\dot{x} = b(t)u, \quad x \in \mathrm{R}, \quad u \in \mathrm{R}, \quad t \geq 0,$$
$$y = b(t-1)x$$

и функцией $b(t),\ t \geq 0,$ имеющей вид

$$b(t) = 1, \quad t \in [2k, 2k+1], \quad b(t) = 0, \quad t \in [2k+1, 2k+2], \quad k \in \square.$$

Это уравнение не является согласованным ни на каком отрезке $[t_0, t_0+\sigma],$ поскольку при всяком $\sigma > 0$ и $t_0 \geq 0$ выполняется равенство

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,b(t)b(t-1)\,|\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\sigma}|\,1\cdot 0\,|\,dt = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Представленное уравнение не является согласованным ни на каком отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ и согласно методу, предложенному С.Н. Поповой и Е.Л. Тонковым [1; 5, с. 110].

П р и м е р 2. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ уравнение

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{t}}u, \quad t \in [0, 1], \qquad (17)$$

с наблюдателем

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}x. \tag{18}$$

В силу доказанной нами теоремы это уравнение является согласованным на рассматриваемом отрезке, поскольку справедливы соотношения

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right| dt = 6\cdot(\sqrt[6]{1}-\sqrt[6]{0})=6.$$

З а м е ч а н и е 2. Доказательство согласованности уравнения (17), (18) на отрезке $[0,1]$ методом, предложенным С.Н. Поповой и Е.Л. Тонковым, невозможно, ввиду невозможности построения для такого уравнения матрицы согласования (функция, являющаяся произведением $b(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ и $c(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ не интегрируема с квадратом на отрезке $[0,1]$) – инструмента для определения наличия или отсутствия свойства согласованности (см. по этому поводу теорему 6.1 монографии [5] или статью [1]).

Заключение. Полученные в данной работе утверждения позволяют изучать наличие свойства равномерной согласованности у линейных управляемых уравнений с наблюдателем и разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами, а также допускают свое распространение на линейные управляемые быстро изменяющиеся системы с наблюдателем малых размерностей. Необходимость и важность таких результатов обусловлена тем, что свойство равномерной согласованности является одним из основных инструментов при решении задач глобального управления асимптотическими инвариантами линейных управляемых систем с наблюдателем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф16М-005).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Попова, С.Н. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I / С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1687–1696.
2. Попова, С.Н. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II / С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 11. – С. 1949–1957.
3. Попова, С.Н. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III / С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 2. – С. 228–238.
4. Попова, С.Н. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем / С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 4. – С. 723–724.
5. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.
6. Былов, Б.Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий. – М., 1966. – 576 с.
7. Тонков, Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной реккурентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
8. Андреев, Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
9. Зайцев, В.А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем / В.А. Зайцев // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 432–442.

R E F E R E N C E S

1. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over Lyapunov exponents of coherence systems. I // Differerencal'nye Uravneniya, 1994, Vol. 30, № 10, pp. 1687–1696 (in Russian).
2. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over Lyapunov exponents of coherence systems. II // Differerencal'nye Uravneniya, 1994, Vol. 30, № 11, pp. 1949–1957 (in Russian).
3. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over Lyapunov exponents of coherence systems. III // Differerencal'nye Uravneniya, 1995, Vol. 31, № 4, pp. 228–238 (in Russian).
4. Popova S.N., Tonkov E.L. On problem of uniform coherency of linear systems // Differerencal'nye Uravneniya, 1995, Vol. 31, № 4, pp. 723–724 (in Russian).
5. Makarov E.K., Popova S.N. Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems). – Minsk: Belarus. navuka, 2012. – 407 p.
6. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability). – Moscow: Nauka, 1966. – 576 p.
7. Tonkov E.L. A criterion for uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system // Differerencal'nye Uravneniya, 1979, Vol. 15, № 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
8. Andreev Yu. N. Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob'ektami (Control over finite-dimentional linear objects). – Moscow: Nauka, 1976. – 424 p.
9. Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility and stabilization of non-stationary systems with the observer // Differerencal'nye Uravneniya, 2010, Vol. 46, № 3, pp. 432–442 (in Russian).

Поступила в редакцию 26.04.2017

Адрес для корреспонденции: e-mail: kozlovaa@tut.by – Козлов А.А.

УДК 512.532.5:512.64