

По аналогии с работой [2] дадим следующее

Определение 2. Система (1) называется \mathcal{G} -равномерно вполне управляемой ($\mathcal{G} \in \mathbb{N}$), если существуют величины $\alpha_i = \alpha_i(\mathcal{G}) > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$W_{\tau+\mathcal{G},\tau} > 0, \quad 0 < \alpha_1 \cdot E \leq W_{\tau+\mathcal{G},\tau}^{-1} \leq \alpha_2 \cdot E,$$

$$0 < \alpha_3 \cdot E \leq X_{\tau+\mathcal{G},\tau}^T \cdot W_{\tau+\mathcal{G},\tau}^{-1} \cdot X_{\tau+\mathcal{G},\tau} \leq \alpha_4 \cdot E.$$

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует число $\mathcal{G} > 0$ такое, что система (1) \mathcal{G} -равномерно вполне управляемая.

Замечание. В определении 2 неравенства понимаются в смысле квадратичных форм.

Теорема. Линейная система с изменяющейся структурой (1) \mathcal{G} -равномерна вполне управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) матрица A_t , $t \in \mathbb{N}_0$, вполне ограничена;
- 2) матрица B_t , $t \in \mathbb{N}_0$, ограничена;
- 3) существует число $l = l(\mathcal{G}) > 0$ такое, что для всяких числа $\tau \in \mathbb{N}_0$ и для вектора $x^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_{\tau+\mathcal{G}}}$ найдется управление u_t , $t = \tau, \dots, \tau + \mathcal{G} - 1$, переводящее решение системы (1) из точки $x_\tau = 0 \in \mathbb{R}^n$ в точку $x_{\tau+\mathcal{G}} = x^{(1)}$, причем для любого $t \in \{\tau, \dots, \tau + \mathcal{G} - 1\}$ выполняется неравенство $\|u_t\| \leq l \cdot \|x^{(1)}\|$.

Заключение. Представленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных динамических систем с изменяющейся структурой.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

1. Гайшун, И.В. Дискретные уравнения с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1544–1549.
2. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
3. Kalman, R.E. Contribution to the theory of optimal control / R.E. Kalman // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102–119.
4. Зайцев, В.А. О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем / В.А. Зайцев, С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – Т. 24, № 4. – С. 53–63.

О СВОЙСТВАХ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

А.А. Козлов, К.Д. Калина, Л.А. Антоненко
Новополоцк, ПГУ

Целью данной работы является введение понятий строго положительно регулярных матриц и строго ρ -положительно регулярных матриц, а также описание свойств таких матриц.

Данная тематика исследований является актуальной, поскольку связана с численным моделированием динамических процессов и с бурно развивающейся сегодня математической теорией управления асимптотическими инвариантами линейных динамических систем.

Материалы и методы. В статье используются методы теории матриц и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (символ T означает операцию транспонирования матрицы или вектора); e_1, e_2, \dots, e_n – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^n $E = [e_1, \dots, e_n]$ – единичная матрица; M_m – пространство вещественных матриц размерности

$m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_m евклидовой нормой в пространствах R^m и R^n [1, с. 357]; $M_n := M_m$.

Определение 1. Для всякого числа $k = \overline{1, n}$ и произвольной матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n$ через $(H)_k \in M_k$ будем обозначать ее *ведущую главную подматрицу порядка k* [1, с. 30], т.е.

$$(H)_1 = h_{11}, \quad (H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \dots, \quad (H)_n = H. \text{ Ведущими главными минорами матрицы } H$$

назовем определители ведущих главных подматриц матрицы H .

Определение 2. Квадратную матрицу $H \in M_n$ будем называть *строго регулярной* [2, с. 97], если при всех $i = \overline{1, n}$ выполняются неравенства $\det(H)_i \neq 0$.

Определение 3. Будем говорить, что квадратная матрица $H \in M_n$ является *строго положительно регулярной*, если при каждом $i = \overline{1, n}$ справедливы соотношения $\det(H)_i > 0$.

Определение 4. Зафиксируем произвольное число $\rho > 0$. Матрицу $H \in M_n$ назовем *строго ρ -положительно регулярной*, если для любого фиксированного числа $\rho > 0$ при каждом $i = \overline{1, n}$ выполняются неравенства $\det(H)_i > \rho$.

Теорема 1. Пусть $U, L \in M_n$ – соответственно *верхне- и нижнетреугольная матрицы с положительными диагональными элементами*. Тогда если матрица $H \in M_n$ является *строго положительно регулярной*, то и матрица LHU также обладает данным свойством.

Теорема 2. Свойство *строго положительной регулярности инвариантно относительно операции транспонирования*.

Замечание 1. Отметим, что свойство *строго положительной регулярности* в общем случае не инвариантно относительно операции взятия обратной матрицы.

Действительно, рассмотрим, напр., матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, являющуюся *строго положительно регулярной*, ввиду очевидных соотношений $\det(A)_1 = 1 > 0$ и $\det(A)_2 = \det A = 3 > 0$.

Обратная к рассматриваемой матрице равна $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Поскольку ее главный угловой минор первого порядка отрицателен, она, очевидно, не является *строго положительно регулярной*.

При этом заметим, что если *строго положительно регулярная матрица* принадлежит множеству ортогональных матриц, то обратная к ней матрица также обладает свойством *строго положительной регулярности*.

Теорема 3. Для любых чисел $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и матрицы $H \in M_n$, удовлетворяющей оценкам $\det H > \alpha$ и $\|H\| \leq \beta$, найдутся такие матрица перестановок $P \in M_n$ и величина $\rho_1 = \rho_1(\rho) > 0$, при которых для всех $i = \overline{1, n}$ выполняются неравенства $|\det(PH)_i| \geq \rho_1$.

Теорема 4. Для всякой матрицы перестановок $P \in M_n$ найдется такая *верхнетреугольная матрица* $U \in M_n$ с единицами на диагонали, при которой для каждого $i = \overline{1, n}$ выполняются неравенства $|\det(UP)_i| \geq 1$.

Теорема 5. Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in M_n$, удовлетворяющей оценке $\det G > \rho > 0$, найдется *верхнетреугольная матрица* $U \in M_n$ с единицами на диагонали, что

произведение UG представляется в виде $UG = H_1 E H_2$, где $H_1, H_2 \in M_n$ – некоторые заданные строго положительно регулярные матрицы, а $E \in M_n$ – матрица, полученная из единичной матрицы заменой некоторого четного количества диагональных элементов на -1 .

Для произвольного числа $\alpha \in [0, 2\pi)$ введем в рассмотрение матрицу

$$J_{kl}(\alpha) := \cos \alpha \cdot e_k e_k^T + \sin \alpha \cdot e_k e_l^T - \sin \alpha \cdot e_l e_k^T + \cos \alpha \cdot e_l e_l^T =$$

$$\begin{matrix} & & k & & l & & \\ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cos \alpha & & \sin \alpha & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & -\sin \alpha & & \cos \alpha & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_n. \quad (1)$$

Возьмем любое число $p \in \mathbb{R}$, $p \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ означают целую часть числа, и рассмотрим

пары $(k_i, l_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \dots < k_p < l_p \leq n$. Обозначим квадратную матрицу

$$J := E + \sum_{i=1}^p \left(J_{k_i l_i} \left(\frac{\pi}{3} \right) - e_{k_i} e_{k_i}^T - e_{l_i} e_{l_i}^T \right) \in M_n.$$

Пусть, кроме того, $\overline{E} := E(k_1, l_1, k_2, l_2, \dots, l_p)$ – квадратная матрица, полученная из единичной матрицы заменой диагональных элементов $e_{k_i k_i}$ и $e_{l_i l_i}$, $i = \overline{1, p}$, числом -1 .

Теорема 6. Для матрицы $J \in M_n$ справедливы равенство $J^3 = \overline{E}$ и оценки $\det(J)_i \geq \frac{1}{2}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 7. Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in M_n$, удовлетворяющей оценке $\det G > \rho > 0$, найдутся такие строго положительно регулярные матрицы $H_i \in M_n$, $i = \overline{1, 6}$, что матрица G представляется в виде $G = \prod_{i=1}^6 H_i$.

По аналогии с матрицей (1) определим следующие матрицы

$$S_{kl}^{(1)} := 3 \cdot e_k e_k^T - 2 \cdot e_k e_l^T + 8 \cdot e_l e_k^T - 5 \cdot e_l e_l^T =$$

$$\begin{matrix} & & k & & l & & \\ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 3 & & -2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 8 & & -5 & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_n,$$

$$S_{kl}^{(1)} := 5 \cdot e_k e_k^T + 2 \cdot e_k e_l^T - 8 \cdot e_l e_k^T - 3 \cdot e_l e_l^T = k \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 5 & & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & -8 & & -3 & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n,$$

Для ранее зафиксированных пар $(k_i, l_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \dots < k_p < l_p \leq n$, обозначим через $S^{(1)} \in M_n$ и $S^{(2)} \in M_n$ матрицы

$$S^{(1)} := E + \sum_{i=1}^p S_{k_i l_i}^{(1)} - \sum_{i=1}^p (e_{k_i} e_{k_i}^T + e_{l_i} e_{l_i}^T) \text{ и } S^{(2)} := E + \sum_{i=1}^p S_{k_i l_i}^{(2)} - \sum_{i=1}^p (e_{k_i} e_{k_i}^T + e_{l_i} e_{l_i}^T).$$

Теорема 8. Матрица $\overline{E} \in M_n$ представляется в виде $\overline{E} = S^{(1)} \cdot S^{(2)}$.

Теорема 9. Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in M_n$, удовлетворяющей оценке $\det G > \rho > 0$, найдутся такие число $\rho_1 = \rho_1(\rho) > 0$ и строго ρ_1 -положительно регулярные матрицы $H_i \in M_n$, $i = \overline{1, 5}$, при которых справедливо разложение $G = \prod_{i=1}^5 H_i$.

Следствие 3. Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in M_n$, удовлетворяющей оценке $|\det G| > \rho > 0$, существуют такие строго регулярные матрицы $H_i \in M_n$, $i = \overline{1, 3}$, что выполняется соотношение $G = H_3 H_2 H_1$.

Заключение. Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы при построении управляющих воздействий, обеспечивающих решения различных задач управляемости асимптотических инвариантов линейных динамических (дискретных и непрерывных) систем. Также установленные утверждения имеют и самостоятельную ценность и значимость, поскольку могут найти свое применение в таких разделах математики как теория матриц, вычислительные методы алгебры. Кроме того, отметим, что полученные результаты были промоделированы на языке Python и получена соответствующая компьютерная программа. Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований на 2020-2025 годы «Конвергенция - 2025».

1. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
2. Тыртышников Е.Е., Методы численного анализа. – Москва, 2006. – 291 с.

НЕЧЕТКАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ

*Е.А. Корчевская, Л.В. Маркова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Большинство входных параметров, характеризующих контур рассматриваемых биологических объектов, по своей природе являются нечеткими. Например: “более вытянутый”, “менее вытянутый”, “более выпуклый”, “менее выпуклый”, “более некруглый”, “менее некруглый” и т.д. Поэтому для идентификации биологических объектов по форме наиболее оптимальный результат может быть достигнут с помощью нечеткой нейронной сети. Модель нейрона нечеткой нейронной сети оперирует не значениями идентификационных параметров, характеризующих объекты, как предложено в работах [1; 2], а значениями функций принадлежности к определенной группе нечетких характеристик.