# О СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ

*А.А. Козлов*[1], *Т.А. Александрович*[2]
[1]*Новополоцк, ПГУ*
[2]*Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Одним из активно развивающихся разделов теории динамических систем на сегодняшний день является теория управления асимптотическими характеристиками линейных динамических (дискретных и непрерывных) систем [1].

Целью данной работы является получение критерия равномерной полной управляемости линейной дискретной динамической системы переменной размерности фазового пространства.

**Материалы и методы.** В данной работе объектом исследования являются линейные управляемые дискретные системы с изменяющейся структурой; субъектом исследования – свойство равномерной полной управляемости таких систем. В статье применяются методы матричного анализа, теории дискретных динамических систем, а также теории управления линейными динамическими системами.

**Результаты и их обсуждение.** Пусть $n_0,\dots,n_t,\dots$ и $r_0,\dots,r_t,\dots$ – последовательности натуральных чисел. Рассмотрим уравнение вида

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t,\ t = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

в котором $\{A_t\}$ и $\{B_t\}$, $t = 0,1,\dots$ – последовательности действительных матриц размерностей соответственно $n_{t+1}\times n_t$ и $n_{t+1}\times r_t$, последовательность $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ в каждый момент времени $t$ принимает значения в пространстве $\mathbb{R}^{r_t}$ и играет роль входного (управляющего) воздействия. Уравнение вида (1) называют *линейным управляемым уравнением* (*или системой*) *с изменяющейся структурой* [1].

**Определение 1.** Матричную функцию $A_t \in M_{n_{t+1}n_t}$, $t = 0,1,\dots$ будем называть *вполне ограниченной,* если при любом $t\in\mathbb{N}_0$ и $n_t \ge n_{t+1}$ ($n_{t+1} > n_t$) матрица $A_t^T A_t$ ($A_t A_t^T$) невырожденная и найдется такое число $a > 0$, что при всех $\tau\in\mathbb{N}\cup\{0\} =: \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup\|A_\tau\| + \sup_{n_\tau \ge n_{\tau+1}} \|(A_\tau A_\tau^T)^{-1}\| + \sup_{n_\tau < n_{\tau+1}} \|(A_\tau^T A_\tau)^{-1}\| \le a \tag{2}$$

(здесь и далее символ $T$ означает операцию транспонирования матриц, а скобки $\|\ \|$ – операторную (спектральную) норму матрицы либо евклидову норму вектора).

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений с изменяющейся структурой

$$x_{t+1} = A_t x_t,\quad t\in\mathbb{N}_0,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольное число $\tau\in\mathbb{N}_0$. Пусть $E$ - единичная $(n_\tau\times n_\tau)$ – матрица. Для любого числа $t\in\mathbb{N}_0, t\ge\tau,$ определим $(n_t\times n_\tau)$ – матрицу

$$X_{t,\tau} = \begin{cases} A_{t-1}\cdot\ldots\cdot A_\tau, & при\ t>\tau,\\ E & при\ t=\tau,\end{cases}$$

являющуюся решением задачи Коши матричной дискретной динамической системы $X_{t+1} = A_t X_t$ с начальным условием $X_\tau = I$. Эта матрица удовлетворяет [1] равенству $X_{t,\tau}X_{\tau,s} = X_{t,s}$. для всяких $t\ge\tau\ge s$; $t,\tau,s\in\mathbb{N}_0$. Она называется *матрицей Коши* системы (3).

При всяком $t>\tau$ введем также в рассмотрение квадратную $(n_t\times n_t)$ -матрицу

$$W_{t,\tau} = \sum_{s=\tau}^{t-1} X_{t,s+1}B_s B_s^T X_{t,s+1}^T,$$

которую будем называть *матрицей управляемости* или *матрицей Калмана*.

По аналогии с работой [2] дадим следующее

**Определение 2.** Система (1) называется $\vartheta$ *-равномерно вполне управляемой* $(\vartheta \in \mathbb{N})$, если существуют величины $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0,\ i = \overline{1,4}$, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$W_{\tau+\vartheta,\tau} > 0,\ \ 0 < \alpha_1 \cdot E \le W^{-1}_{\tau+\vartheta,\tau} \le \alpha_2 \cdot E,$$

$$0 < \alpha_3 \cdot E \le X^T_{\tau+\vartheta,\tau} \cdot W^{-1}_{\tau+\vartheta,\tau} \cdot \mathrm{X}_{\tau+\vartheta,\tau} \le \alpha_4 \cdot E.$$

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует число $\vartheta > 0$ такое, что система (1) $\vartheta$ -равномерно вполне управляемая.

**Замечание.** В определении 2 неравенства понимаются в смысле квадратичных форм.

**Теорема.** *Линейная система с изменяющейся структурой* (*1*) $\vartheta$ *-равномерна вполне управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *матрица* $A_t,\ t \in \mathbb{N}_0$, *вполне ограничена;*

*2) матрица* $B_t,\ t \in \mathbb{N}_0$, *ограничена;*

*3) существует число* $l = l(\vartheta) > 0$ *такое, что для всяких числа* $\tau \in \mathbb{N}_0$ *и для вектора* $x^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_{\tau+\vartheta}}$ *найдется управление* $u_t,\ t = \tau,\dots,\tau+\vartheta-1$, *переводящее решение системы* (*1*) *из точки* $x_\tau = 0 \in \mathbb{R}^{n_\tau}$ *в точку* $x_{\tau+\vartheta} = x^{(1)}$, *причем для любого* $t \in \{\tau,\dots,\tau+\vartheta-1\}$ *выполняется неравенство* $\| u_t \| \le l \cdot \| x^{(1)} \|$.

**Заключение.** Представленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных динамических систем с изменяющейся структурой.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

1. Гайшун, И.В. *Дискретные уравнения с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость* / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1544–1549.

2. Квакернаак, Х. *Линейные оптимальные системы управления* / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.

3. Kalman, R.E. *Contribution to the theory of optimal control* / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102-119.

4. Зайцев, В.А. *О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем* / В.А. Зайцев, С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – Т. 24, № 4. – С. 53–63.

## О СВОЙСТВАХ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

*А.А. Козлов, К.Д. Калита, Л.А. Антоненко*
*Новополоцк, ПГУ*

Целью данной работы является введение понятий строго положительно регулярных матриц и строго $\rho$ -положительно регулярных матриц, а также описание свойств таких матриц.

Данная тематика исследований является актуальной, поскольку связана с численным моделированием динамических процессов и с бурно развивающейся сегодня математической теорией управления асимптотическими инвариантами линейных динамических систем.

**Материалы и методы.** В статье используются методы теории матриц и линейной алгебры.

**Результаты и их обсуждение.** Пусть $\mathrm{R}^n$ – $n$ -мерное евклидово векторное пространство с нормой $\| x \| = \sqrt{x^T x}$ (символ $T$ означает операцию транспонирования матрицы или вектора); $e_1, e_2, \dots, e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathrm{R}^n$ $E = [e_1, \dots, e_n]$ – единичная матрица; $\mathrm{M}_{mn}$ – пространство вещественных матриц размерности