

## СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ, СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ

УДК 624.011.1.042:539.37

### РАСЧЕТ ИЗГИБАЕМЫХ ДЕРЕВЯННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОДХОДА

**А.И. Гиль, Д.Н. Лазовский**

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,  
г. Новополоцк, Республика Беларусь  
e-mail: a.hil@psu.by, d.lazovski@psu.by

**Д.О. Глухов**

ООО «Софтклуб», г. Минск, Республика Беларусь  
e-mail: dzmitry.hlukhau@outlook.com

*Представлены результаты экспериментально-теоретического исследования изгибаемых деревянных элементов при действии кратковременного статического нагружения. Предложена аппроксимация диаграммы деформирования древесины при сжатии, деформационный подход к расчету параметров напряженно-деформированного состояния изгибаемых деревянных элементов, критерий образования трещин нормального отрыва и критерий разрушения изгибаемого элемента без ограничения предельной сжимаемости древесины. Экспериментально установлена особенность разрушения деревянных элементов при действии изгибающего момента, которое начинается со смятия волокон древесины в сжатой зоне с образованием «пластических шарниров» и последующим последовательным разрывом продольных волокон в растянутой зоне по высоте поперечного сечения. Выполнена верификация предлагаемого деформационного подхода к расчету прочности и деформативности изгибаемых деревянных элементов на собственных исследованиях и других авторов.*

**Ключевые слова:** *изгибаемый деревянный элемент, диаграмма деформирования древесины, гипотеза плоских сечений, деформационный метод расчета, критерий расчета сопротивления изгибу.*

### CALCULATION OF BENT WOODEN ELEMENTS BASED ON THE DEFORMATION APPROACH

**A. Hil, D. Lazovski**

Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Republic of Belarus  
e-mail: a.hil@psu.by, d.lazovski@psu.by

**D. Gluhov**

Softclub LLC, Minsk, Republic of Belarus  
e-mail: dzmitry.hlukhau@outlook.com

*The results of an experimental and theoretical study of bent wooden elements under the action of short-term static loading are presented. An approximation of the diagram of wood deformation under compression, a deformation approach to calculating the parameters of the stress-strain state of bent wooden elements, a criterion for the formation of cracks of normal separation and a criterion for the destruction of the bent element without limiting the maximum com-*

*pressibility of wood are proposed. The peculiarity of the destruction of wooden elements under the action of a bending moment has been experimentally established, which begins with the crumpling of wood fibers in a compressed zone with the formation of "plastic hinges" and the subsequent sequential rupture of longitudinal fibers in a stretched zone along the height of the cross section. Verification of the proposed deformation approach to calculating the strength and deformability of bent wooden elements based on our own research and other authors has been performed.*

**Keywords:** *bendable wooden element, wood deformation diagram, hypothesis of flat sections, deformation calculation method, criterion for calculating bending resistance.*

**Введение.** Древесина применяется при строительстве жилых, общественных зданий, зрелищных сооружений в качестве конструкционного или отделочного материала в силу своих преимуществ в сравнении с другими строительными материалами. Относительно высокая прочность, обрабатываемость, экологичность, стойкость к воздействию агрессивной среды, а также возможность получения равнопрочных соединений с помощью синтетических клеев при увеличении размеров, несмотря на высокую стоимость способствует росту ее применения как строительного материала для несущих конструкций [1]. Прочностные характеристики деревянных элементов оцениваются достаточно сложно, поскольку зависят от многих параметров, включающих влажность и плотность древесины, направление по отношению к расположению продольных волокон и продолжительность силовых воздействий, размеры поперечного сечения конструктивных элементов и наличие различных природных дефектов (сучки, трещины, косослой и др.), снижающих прочность [2; 3].

В последнее время проводится большое количество научных исследований свойств древесины и особенностей ее поведения в несущих конструкциях при внешних воздействиях, как анизотропного нелинейно деформируемого материала при сжатии-растяжении [4–12]. При этом в нормативных документах расчет изгибаемых деревянных элементов производится по методу допускаемых напряжений как упругого материала с обобщенным расчетным сопротивлением древесины при изгибе [13–15]. Уровень параметров напряженно-деформированного состояния деревянных элементов на различных этапах их деформирования под нагрузкой также оценивается исходя из их упругой работы.

С развитием вычислительной техники при расчете строительных конструкций из различных материалов стали широко применяться физически более точные методы расчета, основанные на использовании диаграмм деформирования их материалов под нагрузкой, позволяющие численно моделировать напряженно-деформированное состояние конструкций на любом этапе их нагружения при любых воздействиях.

Одним из таких направлений является деформационный подход метода сечений, основанный на уравнениях равновесия усилий в рассматриваемом поперечном сечении и использовании полных (с нисходящей ветвью) диаграмм деформирования материала при сжатии-растяжении элементарных площадок поперечного сечения элемента, в пределах которой напряжения принимаются постоянными, соответствующими средним относительным деформациям в ней. Не является принципиальным количество различающихся между собой диаграмм деформирования для разных элементарных площадок, что важно для клеевых деревянных элементов из элементов различного класса древесины. Для распределения относительных деформаций по поперечному сечению изгибаемого элемента используется гипотеза плоских сечений.

Важным вопросом для реализации деформационного подхода метода сечений для расчета деревянных элементов является экспериментальное получение диаграмм деформирования древесины при сжатии и растяжении и их аппроксимация [16–17]. Вопросу аппроксимации диаграммы деформирования древесины при сжатии было посвящено большое количество исследований [18–20]. Наиболее часто математическое описание экспериментальных диаграмм деформирования древесины при сжатии принимают в виде полиномов второй и третьей степени и др. [17; 21].

В настоящем исследовании предлагается аппроксимация диаграммы деформирования древесины при кратковременном одноосном сжатии вдоль волокон в виде параболы, моделирующей аналогичную работу других конструкционных строительных материалов [22–24], где зависимость между напряжениями  $\sigma_{c0}$  и относительными деформациями  $\varepsilon_{c0}$  при кратковременном сжатии имеет вид (рисунок 1, а):

$$\frac{\sigma_{c0}}{f_{c0m}} = -\left(\frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta}\right) \quad \text{для } |\varepsilon_{c0}| < |\varepsilon_{c0u}|, \quad (1)$$

где  $\eta = \varepsilon_{c0} / \varepsilon_{c01}$ ;

$k$  – коэффициент пластичности,  $k = E_{c0i} / E_{c01}$ ;

$\varepsilon_{c01}$  – относительные деформации древесины в точке максимального сжимающего напряжения;

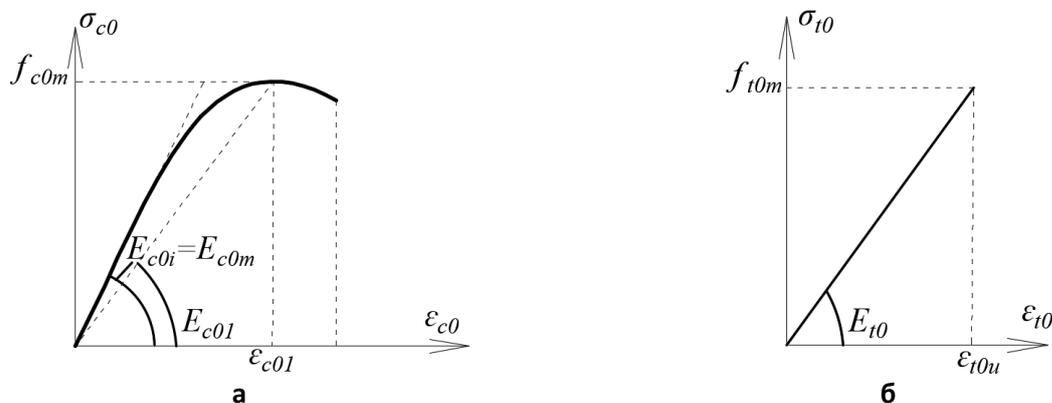
$E_{c01} = \sigma_{c01} / \varepsilon_{c01}$  – модуль деформаций, МПа.

Для аппроксимации диаграммы деформирования древесины при растяжении вдоль волокон используется линейная функция, проходящая через точку предельной прочности древесины при растяжении  $f_{t0m}$  и соответствующие ей предельные относительные деформации  $\varepsilon_{t0m}$  и описывается следующим уравнением (рисунок 1, б):

$$\sigma_{t0} = \varepsilon_{t0} \cdot E_{t0}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{t0}$  – относительные деформации древесины при растяжении вдоль волокон;

$E_{t0}$  – модуль упругости древесины при растяжении вдоль волокон, Н/мм<sup>2</sup>.



**Рисунок 1. – Расчетные диаграммы деформирования древесины при кратковременном одноосном сжатии (а); растяжении (б)**

Возможность использования зависимостей (1) и (2) была верифицирована на фоне результатов испытаний древесины при сжатии и растяжении. Опытные образцы в количестве 5 штук для испытания при сжатии и 5 штук – при растяжении, отобранные из одной партии пиломатериалов одного класса прочности, представляли собой призмы размером 100×100×600 мм и деревянные элементы с уширенными концами с размерами поперечного сечения рабочей части образцов диаметром 7 мм. Торцевые поверхности призм были тщательно подготовлены таким образом, чтобы они были плоскими, параллельными друг другу и строго перпендикулярны к геометрической оси образцов. Опытные образцы для испытания при растяжении по концам шарнирно закреплялись в разрывной машине [25].

Сопротивление и модуль упругости при сжатии и растяжении, а также предельная относительная деформация при разрыве продольных волокон исследуемой древесины в результате обработки опытных данных получены равными соответственно:  $f_{c,0,m}=60$  МПа и  $E_{c,0,m}=15000$  МПа;  $f_{t,0,m}=105$  МПа и  $E_{t,0,m}=17500$  МПа,  $\varepsilon_{t,0,u}=0,006$ .

**Деформационный метод расчета.** В основу деформационного подхода к расчету поперечных сечений изгибаемых деревянных элементов положены следующие предпосылки:

- поперечное сечение деревянного элемента рассматривается как совокупность совместно работающих элементарных площадок, в пределах которых нормальные напряжения принимаются равномерно распределенными, соответствующими относительным деформациям в центре тяжести площадок;
- материал каждой элементарной площадки при действии внутренних усилий от внешних воздействий работает на сжатие-растяжение в соответствии с его диаграммами деформирования;
- распределение относительных деформаций по высоте поперечного сечения деревянного элемента подчиняется гипотезе плоских сечений;
- продольные внутренние усилия в элементарных площадках находятся в равновесии с внутренними усилиями от внешних воздействий на любой стадии работы деревянного элемента, включая предельную.

Для деревянных изгибаемых элементов система уравнений равновесия и совместности деформаций имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sigma_{w,i} A_{w,i} (y_0 - y_{w,i}) - M = 0; \\ \sum_{i=1}^n \sigma_{w,i} A_{w,i} = 0; \\ \varepsilon_{w,i} = \frac{1}{r} (y_0 - y_{w,i}); \\ \sigma_{w,i} = f(\varepsilon_{c0,i}), \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\sigma_{w,i}$ ,  $\varepsilon_{w,i}$  – соответственно нормальные напряжения и относительные деформации в  $i$ -й элементарной площадке деревянного элемента;

$A_{w,i}$ ,  $y_{w,i}$  – соответственно площадь поперечного сечения и расстояние от выбранной оси до центра тяжести  $i$ -й элементарной площадки;

$1/r$  – кривизна изгибаемого элемента в рассматриваемом поперечном сечении;

$y_0$  – расстояние от выбранной оси до центра тяжести рассматриваемого поперечного сечения.

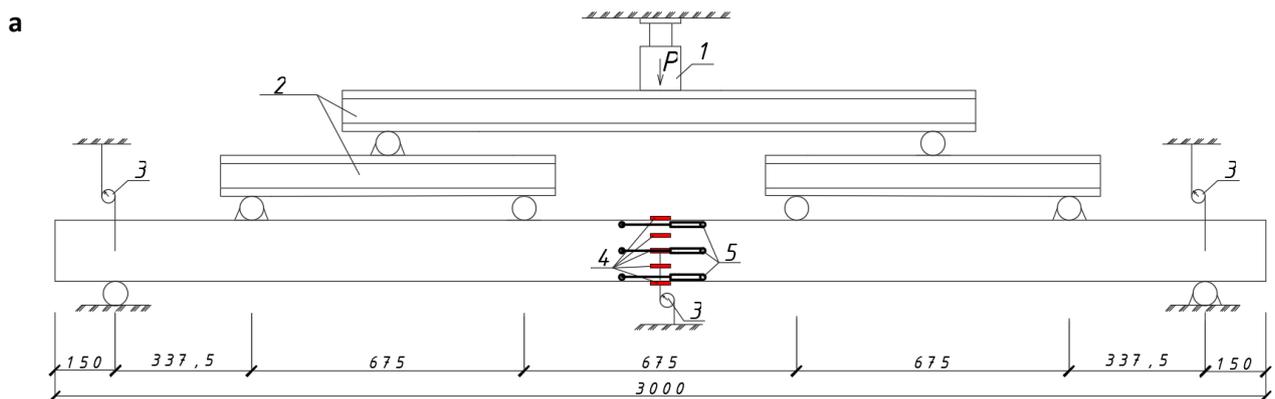
Критерием образования трещины продольного отрыва с разрушением продольных волокон древесины в принятой расчетной модели является достижение относительными деформациями растянутого волокна предельных значений  $\varepsilon_{t,0,u}$ .

Критерием разрушения деревянного элемента будет являться достижения предельного изгибающего момента, при котором перестает выполняться условия равновесия в системе (3). Данный критерий в полной мере позволяет учитывать нелинейную работу древесины при сжатии и перераспределение усилий между поперечными сечениями неразрезных балок.

**Экспериментально-теоретические исследования.** Верификация предложенной методики расчета проводилась на данных собственных экспериментальных исследований.

Экспериментальный образец представлял собой шарнирно опертую деревянную балку с поперечным сечением 100×150 мм длиной 3000 мм (расстояние между опорами 2700 мм). Балка была изготовлена из древесины без пороков (порода – сосна) из того же бруса, из которого отбирались образцы для определения физико-механических характеристик при сжатии и растяжении.

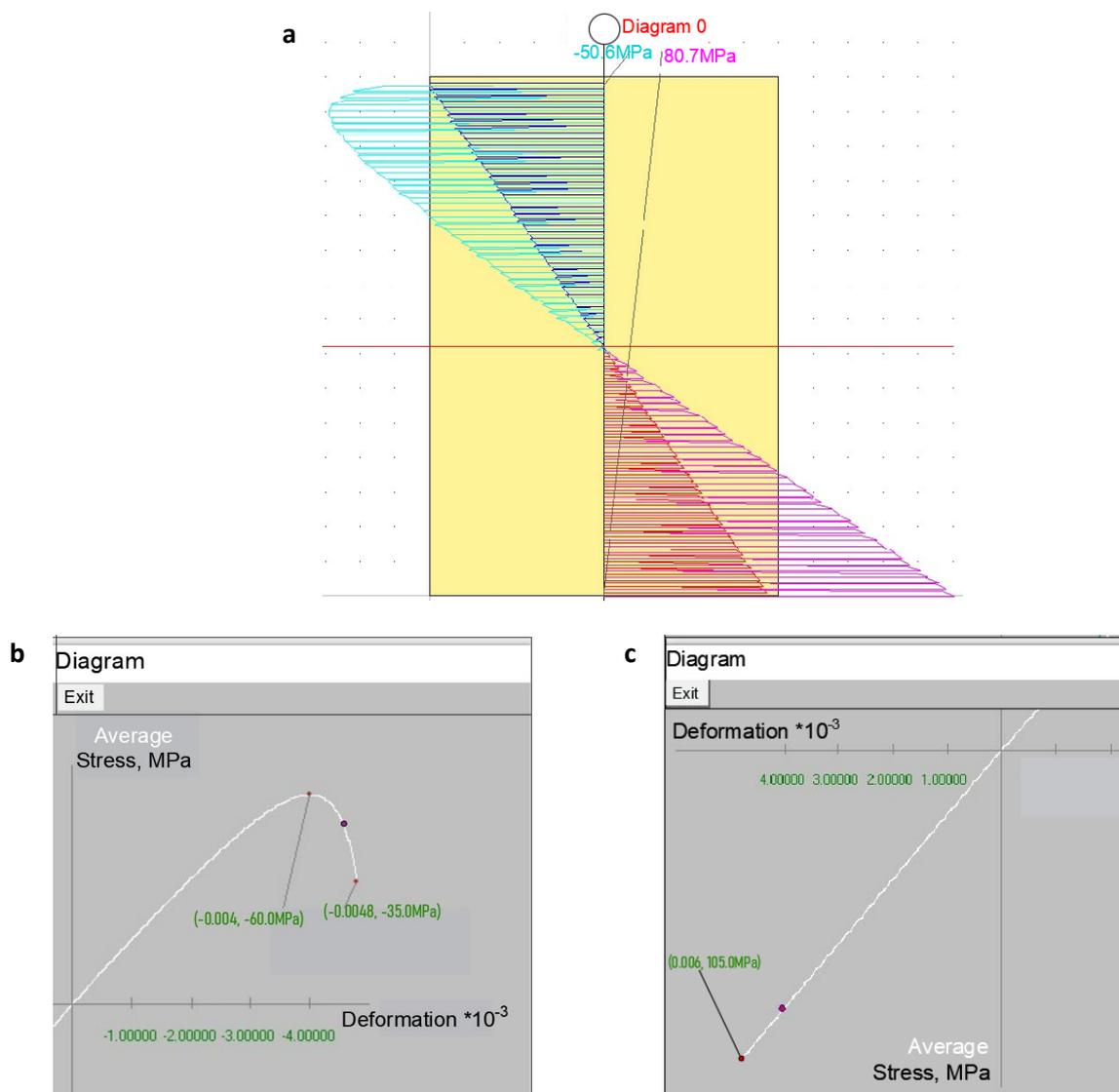
В процессе испытания опытная балка нагружалась четырьмя сосредоточенными силами в соответствии со схемой рисунка 2, а, моделирующей равномерно распределенную нагрузку. Нагружение балки осуществлялась гидравлическим домкратом через систему распределительных траверс этапами не более  $1/20$  предполагаемого предельного усилия с выдержкой на каждом этапе 3 минуты. На последних этапах нагружения, когда начали проявляться деформации ползучести величина нагрузки, соответствующая этапу нагружения, уменьшалась вдвое. В процессе испытания на каждом этапе в середине пролета контролировались относительные деформации в пяти местах по высоте поперечного сечения при помощи тензометрических датчиков базой 45 мм, а также измерителями деформаций с базой измерения 145 мм. Прогиб балки в середине пролета и осадка опор измерялись прогибомерами с точностью 0,01 мм. Общий вид испытания опытной балки приведен на рисунке 2, б.



1 – гидравлический домкрат; 2 – распределительная траверса; 3 – прогибомер;  
4 – тензометрические датчики; 5 – измерители деформаций

Рисунок 2. – Схема расстановки приборов (а) и общий вид испытания опытной балки (б)

Результаты моделирования напряженно-деформированного состояния поперечного сечения опытной деревянной балки в предельном по прочности состоянии при расчетном предельном по предлагаемой методике изгибающем моменте  $M_{u,calc}=29,2$  кНм представлены на рисунке 3.



а – распределение относительных деформаций и напряжений по высоте поперечного сечения (цифры на выносных линиях – нормальные напряжения в МПа; синим и красным цветом показано распределение по высоте поперечного сечения относительных деформаций соответственно в сжатой и растянутой зонах; голубым и розовым – аналогично, нормальных напряжений);  
 б и с – диаграммы деформирования древесины наиболее сжатой и растянутой грани (розовая точка – значения напряжений и деформаций при заданном нагружении)

Рисунок 3. – Напряженно-деформированное состояние в поперечном сечении изгибаемого деревянного элемента по результатам расчета

**Заключение.** Экспериментально установлена возможная схема разрушения изгибаемых деревянных элементов, которое начинается со смятия волокон древесины в сжатой зоне и образованием «пластических шарниров» с последующим последовательным разрывом продольных волокон древесины в растянутой зоне по высоте поперечного сечения.

Результаты проведенного экспериментально-теоретического исследования подтверждают применимость деформационного подхода к расчету сопротивления изгибу деревянных элементов с учетом особенностей их деформирования под нагрузкой, который позволяет учитывать физическую нелинейность деформирования древесины в сжатой зоне и получать параметры напряженно-деформированного состояния элементов произвольной формы поперечного сечения на всех этапах нагружения.

Предлагаемый критерий расчета сопротивления изгибу деревянных элементов в предельной стадии по прочности в виде воспринимаемого максимального усилия, при котором выполняются условия равновесия усилий в поперечном сечении, позволяет учесть перераспределение усилий между продольными волокнами в поперечном сечении древесины на любой стадии нагружения вплоть до разрушения. Результаты расчета прочности и деформаций на основе деформационного подхода изгибаемых железобетонных элементов показывает удовлетворительную сходимость с опытными данными (расхождение не превышает 5%).

Методика расчета изгибаемых деревянных элементов на основе деформационного подхода позволяет решать задачи в области проектирования для вновь возводимых элементов, а также для усиления существующих элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Oudjene M., Khelifa M. Elasto-plastic constitutive law for wood behaviour under compressive loadings // Construction and Building Materials. – 2009. – Vol. 23. – №. 11. – P. 3359-3366.
2. Kharouf N, McClure G, Smith I. Elasto-plastic modelling of wood bolted connections. Comput Struct 2003;81:747–54.
3. Sliker A. Measurement of the smaller Poisson ratios and related compliances for wood. Wood Fiber Sci 1989;21:252–62.
4. Guindos Bretones P. Modelos de elementos finitos tridimensionales para simular el comportamiento de madera con presencia de nudos, empleando la analogía fluido-fibra y validación con fotogrametría de objeto cercano. – 2012. <http://hdl.handle.net/10347/3671>.
5. Reiterer A, Stanzl-Tschegg Stefanie E. Compressive behaviour of softwood under uniaxial loading at different orientations to the grain. Mech Mater 2001; 33:705–15.
6. Sliker A. Orthotropic strains in compression parallel to grain tests. Forest Prod J 1985;35:19–26.
7. Conners TE, Medvecz PJ. Wood as a bimodular material. Wood Fiber Sci 1989;24:413–23.
8. Gibson LJ, Ashby MF. Cellular solids. Cambridge: Cambridge University Press; 1997.
9. Kucera LJ, Bariska M. On the fracture morphology in wood – Part 1: a SEM study of deformations in wood of spruce and aspen upon ultimate axial compression load. Wood Sci Technol 1982;16:2419.
10. Bariska M, Kucera LJ. On the fracture morphology in wood – Part 2: Macroscopical deformations upon ultimate axial compression in wood. Wood Sci Technol 1985;19:19–34.
11. Maiti SK, Gibson LJ, Ashby MF. Deformation and energy absorption diagrams for cellular materials. Acta Metall 1984;32:1963–75.
12. Poulsen JS, Moran PM, Shih CF, Byskov E. Kink band formation and band broadening in larch wood under compressive loading. Mech Mater 1997;26:67–77.
13. Деревянные конструкции. Строительные правила: СП 5.05.01-2021. – Введ. 01.06.2021. – Минск : Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2021. – 115 с.
14. CEN. Eurocode 5 – Design of timber structures – Part 1-1: General – Common rules and rules for buildings. Brussels: CEN; 2004. – 121 p.
15. СП 64.13330.2017 Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-25-80. Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации, Москва, 2017. – 97 с.

16. Dias AMPG, Van de Kuilen JW, Lopes S, Cruz H. A non-linear 3D FEM model to simulate timber-concrete joints. *Adv Eng Softw* 2007;38:522–35.
17. Вареник К.А. Аппроксимация диаграммы деформирования древесины // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. – 2013. – Т. 1. – № 75. – С. 60-64.
18. Лукаш П.А. Расчет пологих оболочек и плит с учетом физической и геометрической нелинейности // Расчет конструкций, работающих в упругопластической стадии: Сб. тр. ЦНИИСК. М.: Госстройиздат, 1961. – Вып.7. – С. 268-320.
19. Леннов В.Г. Экспериментальное исследование древесины сосны на сжатие и растяжение вдоль волокон с учетом длительного воздействия нагрузок // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1958. – № 2. – С. 147-157.
20. Ylinen A. Uber die Bestimmung der zeitbedingten elastischen und Festigkeitseigenschaften des Holzes mit Hilfe eines allgemeinen nichtlinear visko-elastischen reologischen Modelles // Holz als Roh- und Werkstoff. 1965. – V.23, № 5. – S. 193-196.
21. Немировский Ю.В. Расчёт и рациональное проектирование деревянных стержневых элементов / Современные проблемы совершенствования и развития конструкций в строительстве и транспорте: сборник научных трудов III Между-нар. научно-технич. конференции. Самара: Изд-во СамГАСУ, 2005. – С. 247-251.
22. FIB Model Code for Concrete Structures 2010. – Germany. – P. 82.
23. Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий : ТКП EN 1992-1-1-2009. – Введ. 01.01.10. Минск : Минстройархитектуры Респ. Беларусь, 2010. – 112 с.
24. Хаткевич, А. М., Лазовский, Д. Н., & Глухов, Д. О. (2023). Деформационный подход к моделированию напряженно-деформированного состояния сжатых элементов из кирпичной кладки, усиленных под нагрузкой железобетонной обоймой. Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки, (3), 21-27. <https://doi.org/10.52928/2070-1683-2023-35-3-21-27>.
25. Гиль, А.И. Моделирование диаграмм деформирования древесины при одноосном кратковременном сжатии и растяжении / А. И. Гиль, Д. Н. Лазовский // Архитектурно-строительный и дорожно-транспортный комплексы: проблемы, перспективы, инновации [Электронный ресурс] : сб. материалов IX междунар. науч.-практ. конф., приуроченной к 120-летию со дня рождения К.А. Артемьева, Омск, 21 – 22 ноября 2024 г. / СиБАДИ; Редкол.: А. П. Жигadlo (отв. редактор) [и др.]. – Омск : СиБАДИ, 2024. – С. 466-471. – ISBN 978-5-00113-253-0.