УДК 624.04

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

канд. техн. наук, доц. Л.С. ТУРИЩЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается аналитическое решение задачи оптимального проектирования произвольной пространственной статически определимой фермы, которая считается линейно-деформируемой системой. Задача решается с учетом ограничений для переменных целевой функции по несущей способности и по жесткости. Считается, что конструкционный материал стержней фермы одинаково сопротивляется растяжению-сжатию. Получена замкнутая формула для определения площадей поперечных стержней фермы, при которых вес фермы принимает минимальное значение.

Важным критерием проектирования инженерной конструкции является её материалоемкость. В инженерной практике решение задачи о минимизации расхода конструкционного материала, как правило, осуществляется численно методами математического программирования и возможно только для каждой конструкции в отдельности. Численное решение задач оптимального проектирования для различных конструкций частного вида рассматривалось рядом авторов. Перечень работ, посвященных численному определению таких задач, приведен в [1; 2].

Рассматривается аналитическое решение задачи отыскания минимального веса произвольной пространственной статически определимой фермы, которая считается линейно-деформируемой системой. Ферма включает в себя s прямолинейных стержней, соединяющих n узлов, в том числе m внутренних узлов и n-m опорных узлов. Число опорных стержней удовлетворяет соотношению

$$s_0 = 3n - s .$$

Внешняя нагрузка, действующая на ферму, представляет собой систему сосредоточенных сил, приложенных к внутренним узлам, и описывается вектором

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_i \\ \vdots \\ \mathbf{P}_m \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{pmatrix}$ – вектор нагрузки в произвольном узле i (i = 1, …, m). Элементами этого вектора являются проекции сосредоточенной силы, приложенной к произвольному узлу, на координатные оси.

Обозначим длину k-го стержня l_k, а площадь его поперечного сечения A_k. Тогда при заданных конструкционных материалах стержней и их длинах вес произвольной фермы будет являться функцией, зависящей от площадей поперечных сечений:

$$Q(A_1,...,A_s) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k l_k A_k , \tag{1}$$

где γ_k – удельный вес конструкционного материала k-го стержня фермы. Выражение (1) определяет целевую функцию рассматриваемой фермы, переменными которой являются A_k (k = 1, …, s).

Ограничения для переменных целевой функции (1) вытекают из двух предельных состояний, которым должны удовлетворять параметры напряженно-деформированного состояния проектируемой фермы – внутренние усилия и перемещения.

Согласно первому предельному состоянию должна быть обеспечена несущая способность конструкции. Отсюда следует, что продольное усилие в произвольном растянутом стержне фермы должно удовлетворять условию вида

$$\frac{N_i}{A_i} \le R_i ,$$

а в произвольном сжатом стержне – условию вида

$$\frac{N_j}{\varphi_j A_j} \le R_j .$$

Здесь R_i – расчетное сопротивление материала i-го стержня при растяжении; R_j – расчетное сопротивление материала j-го стержня при сжатии; φ_j – коэффициент продольного изгиба j-го сжатого стержня.

Будем считать, что конструкционный материал произвольного стержня фермы одинаково сопротивляется растяжению-сжатию. Кроме того, учитывая шарнирное соединение стержней в узлах, положим коэффициент продольного изгиба для всех сжатых стержней равным 1. Тогда искомые площади поперечных сечений A_k (k = 1, …, s) должны удовлетворять ограничениям первого вида:

$$\frac{|N_k|}{A_k} \le R_k . \tag{2}$$

Согласно второму предельному состоянию должна быть обеспечена нормальная эксплуатация конструкции, что прежде всего связано с недопущением возникновения в конструкции чрезмерных перемещений. Условие соблюдения такого предельного состояния имеет вид

$$\Delta \le [\Delta], \tag{3}$$

где Δ – величина наибольшего перемещения, возникающего в конструкции от внешних воздействий; $[\Delta]$ – предельная величина перемещения, установленная нормами и гарантирующая нормальную эксплуатацию конструкции.

Согласно формуле Максвелла – Мора перемещения, возникающие в ферме при узловой схеме нагружения, описываются следующим выражением:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k N_k l_k}{E_k A_k} . \tag{4}$$

Тогда искомые площади поперечных сечений A_k (k = 1, …, s) должны удовлетворять ограничению второго вида:

$$\sum_{k=1}^{s} c_k l_k \frac{1}{A_k} \le [\Delta], \tag{5}$$

где $c_k = \frac{n_k N_k}{E_k}$ – некоторая константа, характеризующая произвольный k-тый стержень.

Задача отыскания минимума целевой функции (1) с учетом ограничений (2), (5) является задачей нелинейного программирования, так как указанные ограничения зависят от обратных величин переменных целевой функции. При ее решении возможны два случая.

В первом случае минимум целевой функции (1) достигается при значениях переменных, при которых впервые выполняются ограничения (2)

$$A_k = \frac{|N_k|}{R_k} \tag{6}$$

и одновременно выполняются ограничения (5).

Во втором случае при значениях переменных (6) ограничения (5) не выполняются и, следовательно, минимум целевой функции не достигается. Минимум целевой функции в этом случае обычно отыскивается численно одним из методов математического программирования, например методом динамического программирования. Алгоритм численного решения задачи этим методом изложен в [3].

Для аналитического решения задачи во втором случае введем новые переменные целевой функции:

$$a_k = \frac{1}{A_k} . \tag{7}$$

Тогда задача отыскания минимального веса фермы может быть сформулирована следующим образом.

Требуется минимизировать целевую функцию

$$Q(a_1,...,a_s) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k l_k a_k^{-1} , \tag{8}$$

при соблюдении условия

$$\sum_{j=1}^{s} c_j l_j a_j = [\Delta] \tag{9}$$

и

$$a_j < \frac{R_j}{|N_j|} . \tag{10}$$

Условие (9) получено из ограничения (5) и соответствует значениям переменных целевой функции (8), при которых ограничение (5) выполняется впервые.

Для отыскания минимума функции (8) применим метод множителей Лагранжа. Для этого запишем условие (9) в виде

$$\sum_{j=1}^{s} c_j l_j a_j - [\Delta] = 0$$

и преобразуем целевую функцию (8) к эквивалентному расширенному виду:

$$F(a_1, ..., a_s, \lambda) = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k l_k a_k^{-1} + \lambda\left(\sum_{j=1}^{s} c_j l_j a_j - [\Delta]\right), \tag{11}$$

где λ – множитель Лагранжа.

Запишем условия существования экстремума для функции (11):

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = -\gamma_k l_k \frac{1}{a_k^2} + \lambda c_k l_k = 0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{s} c_j l_j a_j - [\Delta] = 0. \tag{13}$$

Найдем из (12)

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\gamma_k}{c_k}}, \tag{14}$$

а из (13) с учетом (14) получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{[\Delta]}{\sum_{j=1}^{s} l_j \sqrt{c_j}}. \tag{15}$$

Тогда формула для определения площадей поперечных сечений A_k (k = 1, …, s) стержней фермы, при которых целевая функция (8) принимает минимальное значение, имеет вид

$$A_k = \sqrt{\frac{c_k}{\gamma_k}} \frac{\sum_{j=1}^{s} l_j \sqrt{c_j}}{[\Delta]}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев, И.Д. Проблемы оптимального проектирования конструкций / И.Д. Сергеев, А.И. Богатырев. – Л.: Стройиздат, 1971.
2. Мажид, К.И. Оптимальное проектирование конструкций / К.И. Мажид. – М.: Высш. шк., 1979 .
3. Почтман, Ю.М. Динамическое программирование в задачах строительной механики / Ю.М. Почтман, В.А. Бараненко. – М. Стройиздат, 1975.

Поступила 29.06.2012

OPTIMAL DESIGN OF HINGE-BAR SYSTEMS

L. TOURISCHEV

The article deals with an analytical solution to the problem of optimal design of an arbitrary spatial statically determinate truss, which is considered to be a linearly deformable system. The problem is solved subject to the restrictions for the variables of the objective function of the bearing capacity and rigidity. It is believed that the constructional material of farm rods is equally resistant to tension-compression. A closed formula for determining the area of the transverse farm rods, where the weight of the farm takes its minimum value, has been obtained.