

1. ВВОДНАЯ ЛЕКЦИЯ

1.1. Введение. Предмет начертательной геометрии. История развития графических дисциплин.

1.2. Центральное проецирование

1.3. Параллельное проецирование

1.4. Ортогональное проецирование

1.5. Проекция точки

1.1. Введение. Предмет начертательной геометрии. История развития графических дисциплин.

Начертательная геометрия - это наука о методах построения изображений пространственных форм на плоскости.

Начертательная геометрия и ее методы находят применение в различных областях науки и техники: в машиностроении, архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве.

Основным методом проецирования является ортогональное проецирование. Этот метод основан на проецировании пространственного объекта на две взаимно перпендикулярные плоскости лучами, перпендикулярными (ортогональными) к этим плоскостям.

В строительстве и машиностроении применяется также аксонометрическое проецирование. Изображения (чертежи), полученные с помощью такого проецирования, имеют высокую наглядность и простые построения.

При проектировании крупногабаритных инженерных сооружений (строительных площадок, каналов, плотин, откосов железных и автомобильных дорог, насыпей и выемок на кривых и прямых участках пути), при изыскании и трассировании дорог, для определения границ и объемов земляных работ при строительстве этих сооружений, то есть когда длина сооружения намного превышает высоту, применяют метод проекций с числовыми отметками.

В строительстве и архитектуре при изображении проектируемых промышленных и жилых зданий, городских площадей и улиц, железнодорожных вокзалов, интерьеров станций метрополитенов и пассажирских залов, мостов и путепроводов, различных дорог широко используются перспективные проекции.

Эти проекции дают возможность получить наглядные изображения инженерных сооружений, которые наиболее точно передают реальное зрительное восприятие человека.

В начертательной геометрии чертежи являются тем инструментом, с помощью которого осуществляется непосредственное изучение геометри-

ческих форм предмета и выполняется решение пространственных задач. Поэтому к чертежам предъявляют следующие требования:

- 1) чертеж должен быть наглядным, т.е. он должен вызывать пространственное представление об изображаемом предмете;
- 2) чертеж должен быть обратимым, т.е. он должен точно определять форму, размеры и положение изображаемого предмета;
- 3) чертеж должен быть простым для его графического выполнения;
- 4) изображение предмета должно быть удобным для чтения размеров.

Чертежи, выполненные методом проецирования, называются проекционными.

Начертательная геометрия возникла в глубокой древности. Потребность в изображениях пространственных форм на плоскости, развитие изобразительного искусства, техники предопределили появление начертательной геометрии.

Ученые всего мира внесли большой вклад в развитие методов построения изображений пространственных форм на плоскости. Это великий греческий геометр Эвклид (III в до н.э.), римский архитектор Витрувий (I в до н.э.).

Значительные труды по методам изображений были написаны в эпоху Возрождения учеными: итальянскими архитекторами Леоном Батиста Альберти (1404 – 1472 гг.), Леонардо да Винчи (1455 – 1519 гг.), немецким живописцем и архитектором Альбрехтом Дюрером (1471 – 1528 гг.).

Математическую трактовку перспективы дал итальянский ученый Гвидо Убальди (1545 – 1607 гг.), а французский архитектор Жерар Дезарг (1593 – 1662 гг.) в своем труде заложил теоретический фундамент перспективы.

В России практические приемы построения графических изображений были известны еще в давние времена. Рисунки домов, крепостей в различных древних летописях сохранили для нас достаточно совершенные для своего времени примеры изображений.

Работы таких великих русских мастеров, как иконописец Рублев, механик – самоучка И.П.Кулибин, зодчие Д.В.Ухтомский, В.И.Баженов, М.Ф.Казаков и многие другие, являются образцами правильных проекционных изображений.

Таким образом, методы построения графических изображений постоянно развивались в различных странах независимо друг от друга, но только французский инженер и ученый Гаспар Монж (1746 – 1818 гг.) смог сформулировать главные элементы теории построения графических изображений, используя прямоугольное проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости.

В 1798 году Гаспар Монж опубликовал свой главный научный труд «Начертательная геометрия».

В России курс начертательной геометрии впервые стал изучаться в 1810 году. Первым русским профессором начертательной геометрии и крупным ученым в этой области стал Я.А.Севастьянов (1796 – 1849 гг.).

Значительный вклад в развитие начертательной геометрии внесли русские ученые: Н.И.Макаров, В.И.Курдюмов, Н.А.Рынин, А.И.Добряков, Н.Ф.Четверухин и многие другие.

Позднее продолжили свои исследования такие ученые, как В.О. Гордон, С.А. Фролов, А.В. Бубенников, Н.Н. Крылов и др.

1.2. Центральное проецирование

Пусть в пространстве задана плоскость Π_1 , которую будем называть плоскостью проекций.

Выберем какую-либо точку S , не лежащую на плоскости проекций. Эту точку будем называть центром проецирования.

Заданную точку A пространства будем проецировать на плоскость проекций Π_1 . Для этого через точку A из центра проецирования S проведем прямую l . Эта прямая будет называться проецирующей прямой. Затем находим точку пересечения A_1 проецирующей прямой SA с плоскостью проекций Π_1 . Точка A_1 будет называться проекцией точки A (рис 1.1). Аналогично выполним построение проекции B_1 точки B .

Очевидно, что каждой точке пространства будет однозначно соответствовать своя собственная проекция. Однако, на рис 1.2 мы видим, что проекцией точки A и точки C является точка пересечения их общей проецирующей прямой с плоскостью проекций.

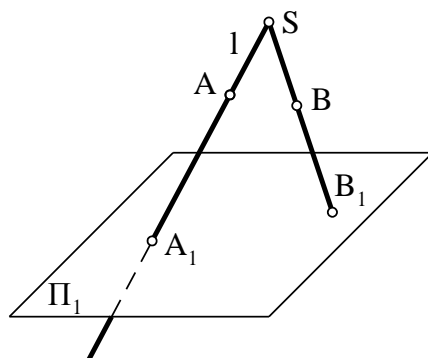


Рис 1.1

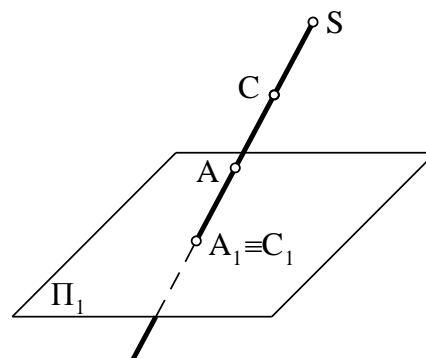


Рис 1.2

Следовательно, такое изображение не является взаимно однозначным, и судить о положении точек A и C в пространстве по одной проекции нельзя. Потому что одним из требований, предъявляемых к чертежам, является точное определение положения пространственного объекта по его изображению, по его проекциям.

1.3. Параллельное проецирование

Если центр проецирования S_∞ удален в бесконечность (рис. 1.3), то проецирующие лучи станут параллельны друг другу. Такое проецирование называется параллельным.

Проецирующие лучи, исходящие из бесконечного далека, могут быть наклонены под любым углом к плоскости проекций.

При заданном аппарате проецирования можно построить параллельную проекцию любой точки пространства. Для этого через заданную точку A проведем проецирующую прямую, параллельную направлению s , и найдем точку A_1 - точку пересечения этой прямой с плоскостью проекций Π_1 .

Через точку A параллельно заданному направлению в пространстве можно провести только одну прямую, следовательно, каждая точка пространства имеет одну и только одну параллельную проекцию.

Точки A и B принадлежат одному и тому же проецирующему лучу, параллельному направлению s (рис.1.4). Поэтому проекции этих точек B_1 и A_1 совпадают. Отсюда следует, по одной заданной проекции положение в пространстве точек B и A определить невозможно.

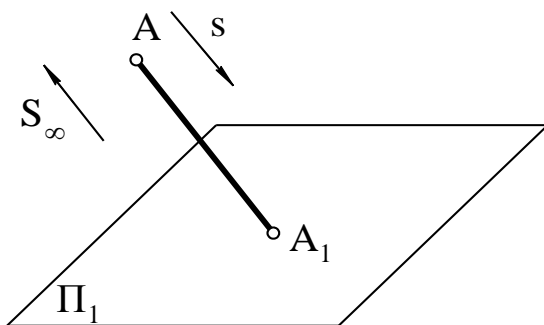


Рис. 1.3

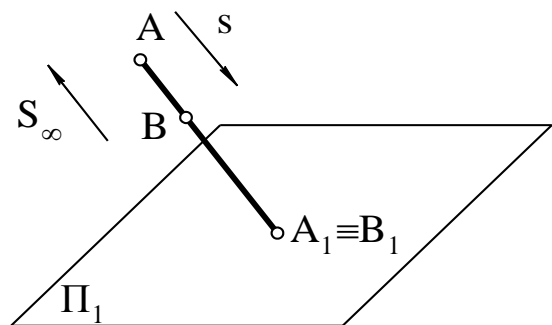


Рис. 1.4.

1.4. Ортогональное (прямоугольное) проецирование

Ортогональное (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного проецирования, при котором направление проецирования s выбирается перпендикулярным плоскости проекций Π_1 , т.е. $s \perp \Pi_1$ (рис 1.5).

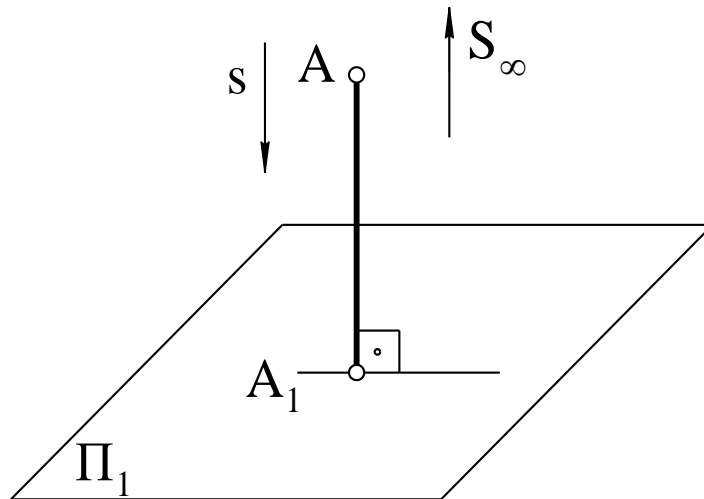


Рис. 1.5

Такое проецирование является наиболее простым и удобным из всех других существующих видов проецирования. Оно обеспечивает простоту определения проекций геометрических объектов, а также позволяет сохранить на проекциях их форму и размеры.

Прямоугольное проецирование имеет те же недостатки, что и центральное и параллельное проецирование: одна прямоугольная проекция не дает возможности определить положение геометрического объекта в пространстве.

Для того чтобы получить так называемый «обратимый чертеж», который позволит определить любые геометрические параметры объекта, надо иметь хотя бы две связанные между собой прямоугольные проекции.

1.5. Проекция точки

Проецирование будем вести на три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.6):

Π_1 - горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 - фронтальная плоскость проекций;

Π_3 - профильная плоскость проекций.

Линии пересечения этих плоскостей называют осями проекций (координатными):

OX - ось абсцисс;

OY - ось ординат;

OZ - ось аппликат,

и рассматривают как систему прямоугольных декартовых координат с центром O .

Для получения прямоугольных проекций точки A необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций. Основания перпендикуляров и будут являться проекциями данной точки:

A_1 - горизонтальная проекция точки;

A_2 - фронтальная проекция точки;

A_3 - профильная проекция точки.

Для получения более удобного чертежа необходимо совместить плоскости проекций Π_1 и Π_3 вместе с изображением на них данной точки A с плоскостью проекций Π_2 поворотом их вокруг осей OX и OZ в направлении, указанном стрелкой (рис. 1.6). Такой совмещенный чертеж называется эпюром (от франц. epure – очищенный) (рис. 1.7).

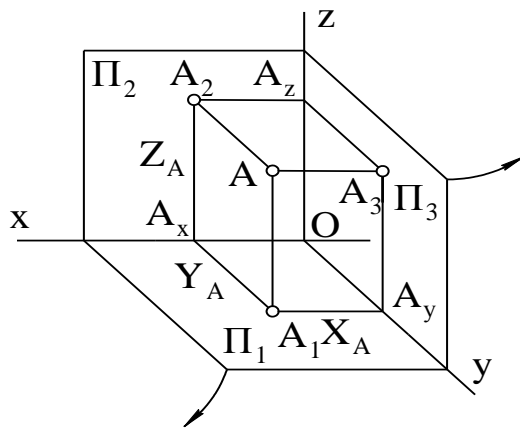


Рис. 1.6

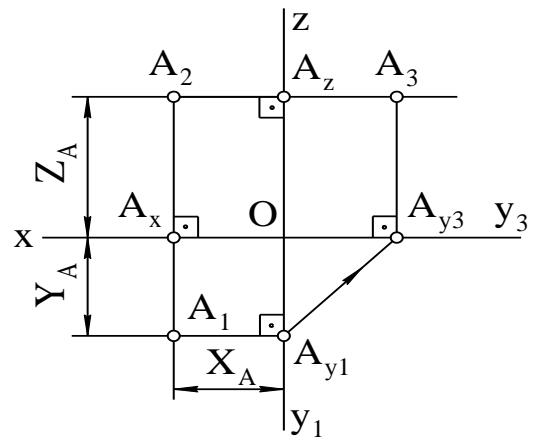


Рис. 1.7

Из чертежа видно, что горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси OX , а фронтальная и профильная проекции - на одном перпендикуляре к оси OZ .

Прямая, которая соединяет на чертеже две проекции одной и той же точки, называется линией связи.

A_2A_1 - всегда перпендикулярна оси OX ;

A_2A_3 - всегда перпендикулярна оси OZ .

Расстояния от заданной точки A до плоскостей проекций определяются ее координатами:

$|AA_3|$ - абсцисса точки A ;

$|AA_2|$ - ордината точки A ;

$|AA_1|$ - аппликата точки A .

Каждая проекция точки определяется двумя координатами: $A_1(x, y)$; $A_2(x, z)$; $A_3(y, z)$, а две любые проекции определяются тремя координатами, следовательно для задания точки достаточно двух проекций.

Если все три координаты точки отличны от нуля, точка находится в пространстве (рис. 1.6 и рис. 1.7).

Если одна из координат равна нулю, точка находится в плоскости проекций, например, точка B лежит в плоскости Π_1 , поэтому координата $z=0$ (рис. 1.8).

Если точка лежит на оси, то нулю равны две ее координаты (точка C лежит на оси OZ , рис. 1.8). Координаты x_c и y_c равны 0.

Если все три координаты равны нулю, точка совпадает с началом координат.

По двум известным проекциям всегда можно построить третью (рис. 1.9).

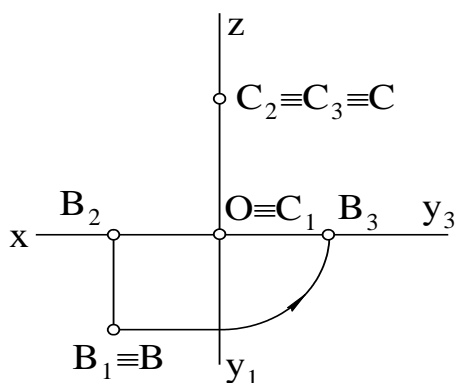


Рис. 1.8

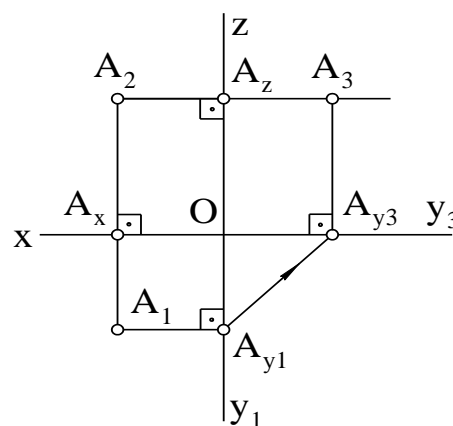


Рис. 1.9

Например, чтобы построить профильную проекцию A_3 точки A по данным горизонтальной A_1 и фронтальной A_2 , проекциям необходимо:

- 1) из точки A_1 провести прямую, перпендикулярную OY , до пересечения с ней в точке A_{y1} ;
- 2) из точки A_{y1} провести прямую под углом 45° к оси проекций OY_1 до пересечения с осью OY_3 ;
- 3) из полученной точки A_{y3} , восстановить перпендикуляр к оси OY_3 ;
- 4) из фронтальной проекции A_2 провести прямую, перпендикулярную к оси OZ , и продолжить ее до пересечения с построенной ранее прямой из точки A_{y3} . На пересечении этих прямых находится искомая проекция A_3 точки A . Проекцию A_3 можно найти так, как показано на рис. 1.10, т.е. отложить от точки A_z отрезок, равный координате Y .

На рис. 1.11 построена горизонтальная проекция A_1 точки A , если известны фронтальная и профильная проекции точки A с помощью постоянной прямой чертежа. Ее проводят под углом 45° к вертикальной или горизонтальной линии связи (рис. 1.10 и рис. 1.11).

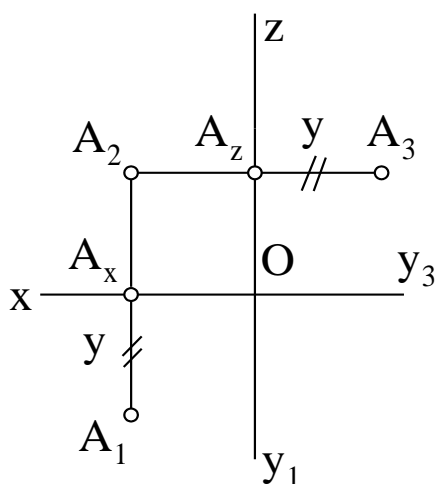


Рис. 1.10

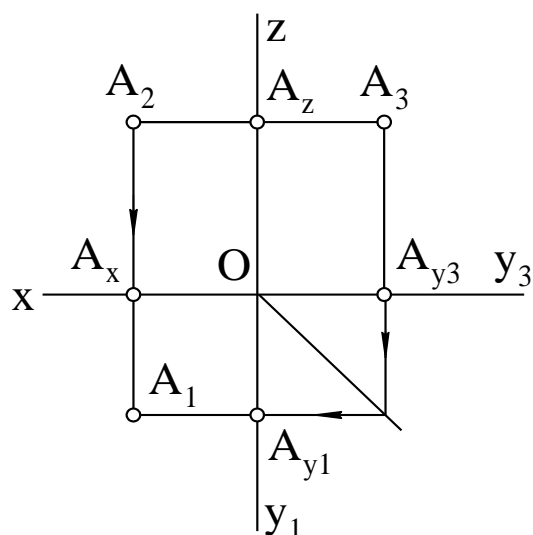


Рис. 1.11

Часто для решения задач бывает достаточно иметь на чертеже только две прямоугольные проекции предмета. В этом случае для получения чертежа берут две взаимно перпендикулярные плоскости проекций - горизонтальную Π_1 и фронтальную Π_2 . Такой метод был изложен Г. Монжем, поэтому иногда называется методом Монжа.

Пересекаясь между собой, плоскости Π_1 и Π_2 делят пространство на четыре части, которые называются четвертями. Их нумеруют в порядке, указанном на рис. 1.12.

Ось проекций делит каждую из плоскостей проекций на две полу-плоскости - полы: плоскость проекций Π_1 – на переднюю и заднюю полы, плоскость Π_2 – на верхнюю и нижнюю полы. Фронтальная проекция точки A , находящейся в первой четверти, окажется над осью OX , горизонтальная – под осью OX (рис. 1.13).

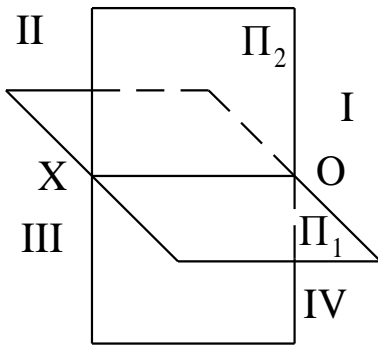


Рис. 1.12

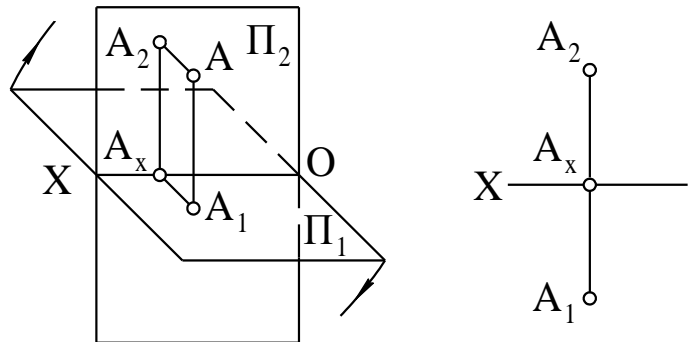


Рис. 1.13

При переходе от пространственного изображения к эпюру, т.е. при совмещении горизонтальной плоскости с фронтальной передняя пола плоскости Π_1 будет перемещаться на 90° вокруг оси OX вниз, а задняя – вверх. Поэтому фронтальная и горизонтальная проекции точки, находящейся во второй четверти, окажутся над осью OX (рис. 1.14).

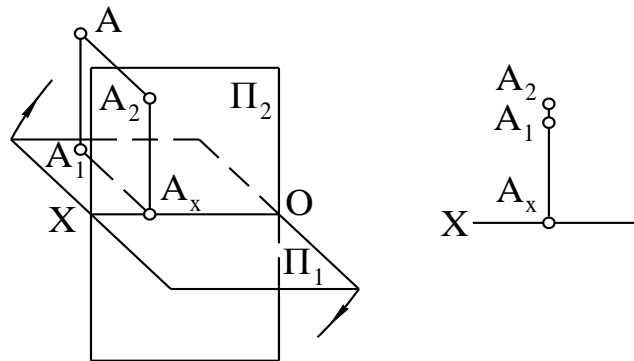


Рис. 1.14

Фронтальная проекция точки, находящейся в третьей четверти, окажется под осью OX , а горизонтальная – над осью OX (рис. 1.15), фронтальная и горизонтальная проекции точки, находящейся в четвертой четверти, - под осью OX (рис. 1.16).

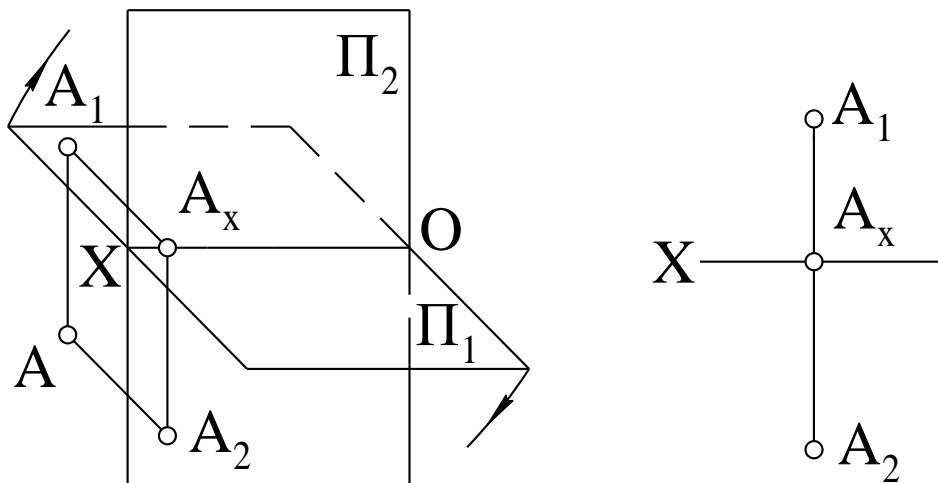


Рис. 1.15

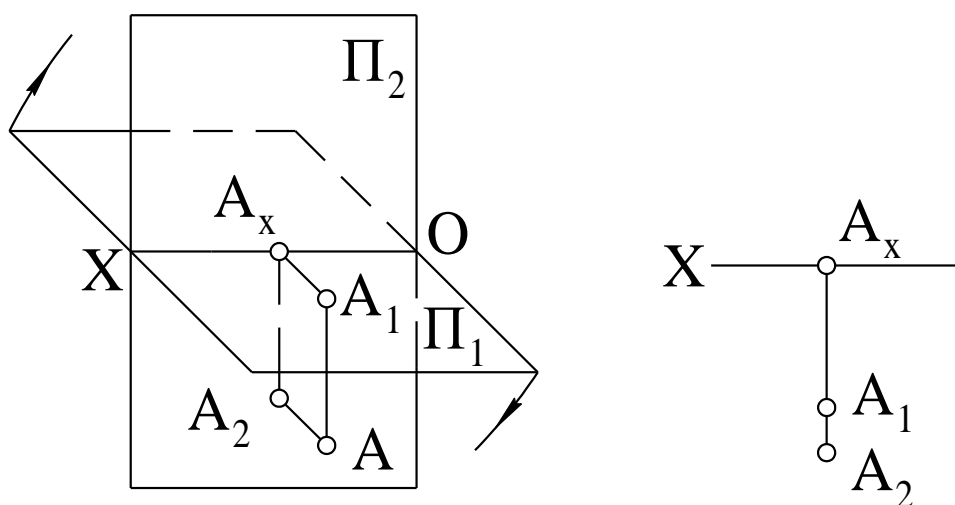


Рис. 1.16

Три плоскости проекций делят пространство на восемь октантов. Нумерация октантов дана на рис. 1.17.

Совмещая плоскости проекций также, как было показано ранее, можно получить чертеж точки, расположенной в любом из восьми октантов (рис. 1.18).

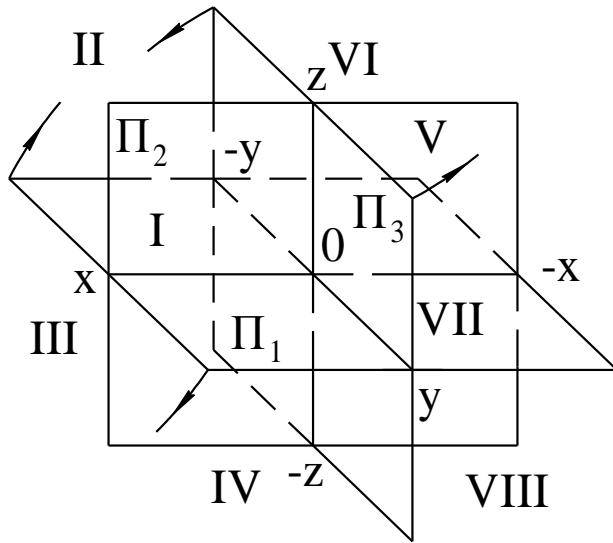


Рис. 1.17

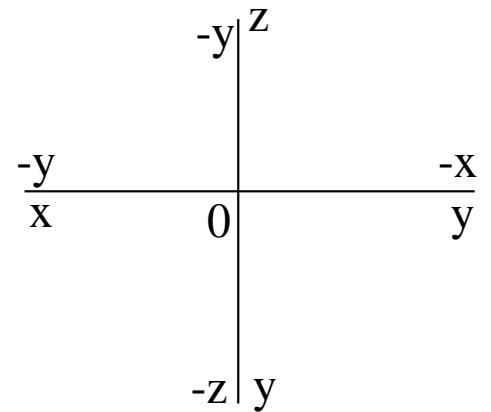


Рис. 1.18

Считают, что наблюдатель, рассматривающий предмет, находится в I октанте.

Приняв для отсчета координат точки систему, показанную на рис. 1.17, составляют таблицу знаков координат во всех восьми октантах (табл.1).

Табл. 1

Октант		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Знаки координат	x	+	+	+	+	-	-	-	-
	y	+	-	-	+	+	-	-	+
	z	+	+	-	-	+	+	-	-

Любая точка пространства A, заданная координатами, будет обозначаться: A (x, y, z).

Пусть задана точка A (6, 4, 5). Эта запись означает, что положение точки A в пространстве определяется координатами $x = 6$, $y = 4$, $z = 5$.

Построение изображения самой точки и ее проекций на пространственной модели осуществляют следующим образом: на осях координат от точки O откладывают отрезки, соответственно равные 6, 4, 5 единицам длины (рис. 1.19). На этих отрезках (OA_x , OA_y , OA_z), как на ребрах, строят параллелепипед. Вершина его, противоположная началу координат, определяет положение заданной точки A. Из рис. 1.19 видно, что для

определения положения точки A достаточно построить только три ребра параллелепипеда, например OA_x , A_xA_1 и A_1A .

Эпюр точки представлен на рис. 1.20

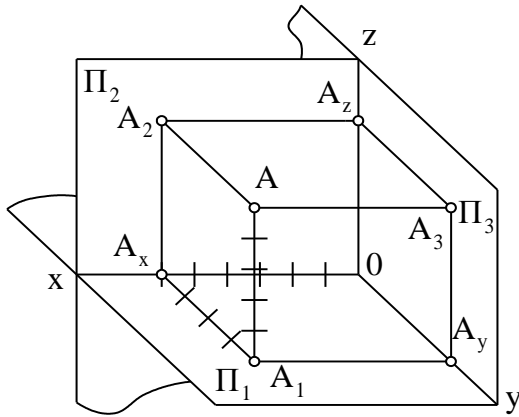


Рис.1. 19

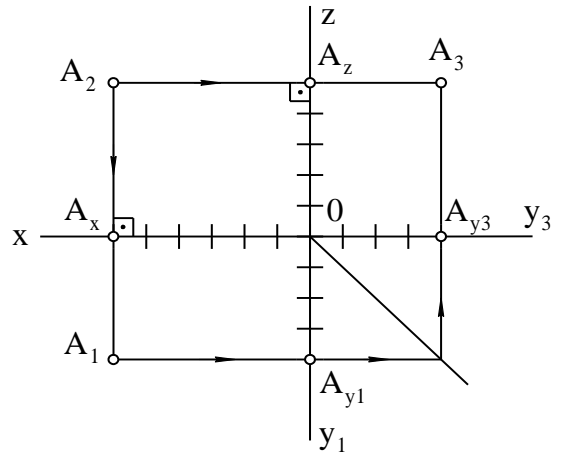


Рис. 1.20

На рис.1.21-1.23 представлены наглядные изображения и эпюры точек, которые расположены во II, III, IV октантах.

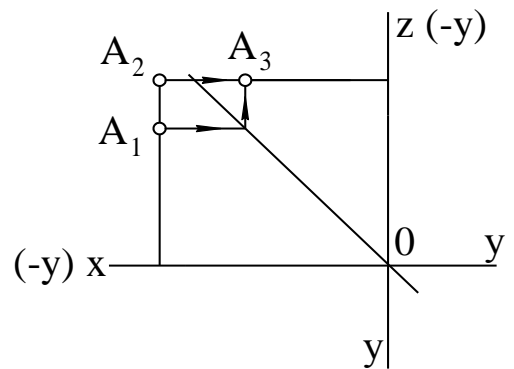
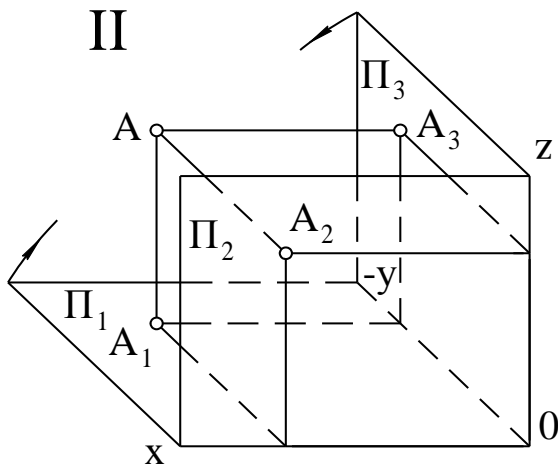


Рис. 1.21

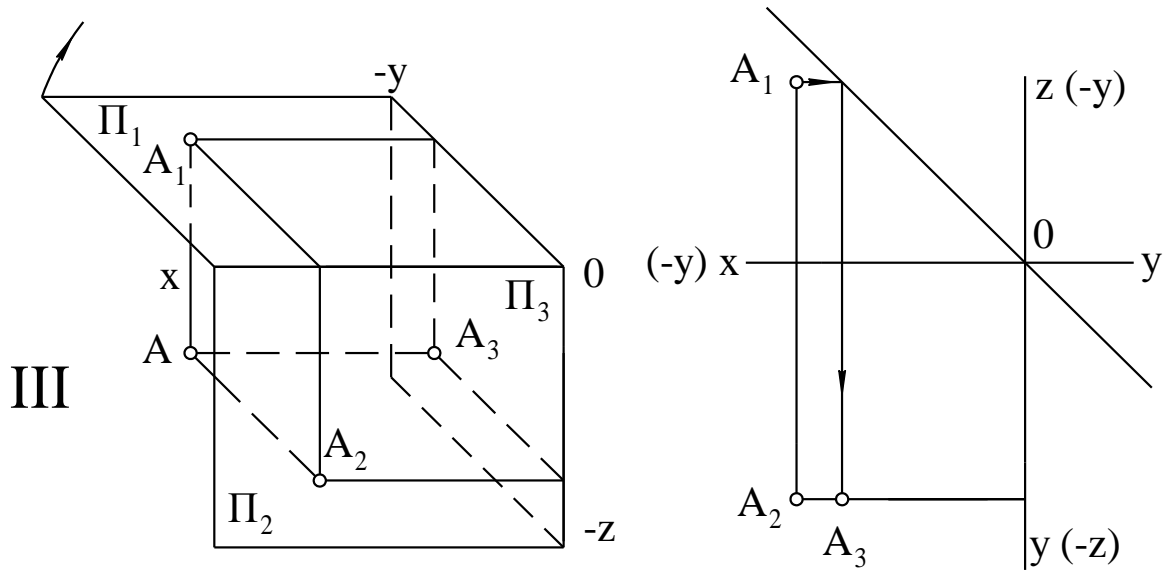


Рис. 1.22

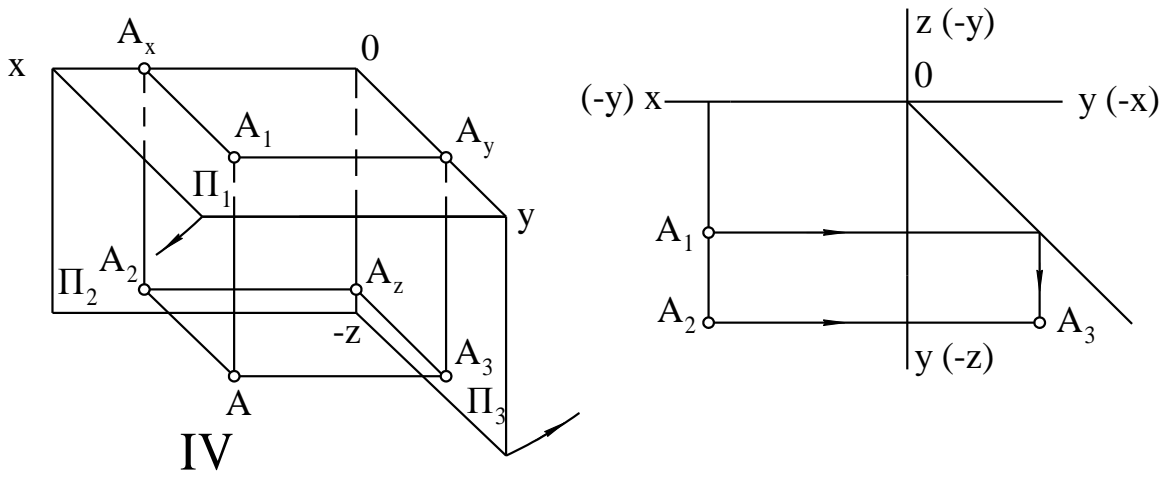


Рис. 1.23