

3. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ. ПЛОСКОСТЬ

- 3.1. Взаимное положение прямых
- 3.2. Проекции плоских углов
- 3.3. Изображение плоскости на чертеже
- 3.4. Прямая и точка в плоскости
- 3.5. Главные линии плоскости
- 3.6. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

3.1. Взаимное положение прямых

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение. Они могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на эюре их одноименные проекции пересекаются, и точки пересечения проекций этих прямых лежат на одной линии связи (рис. 3.1).

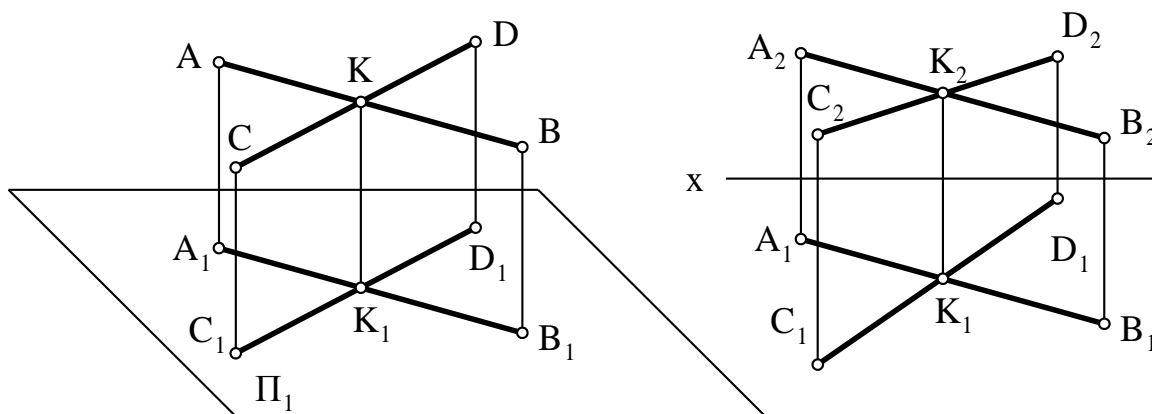


Рис. 3.1

Если прямые в пространстве параллельны, то на эюре их одноименные проекции параллельны. На рис. 3.2 изображены прямые общего положения АВ и CD, их горизонтальные и фронтальные проекции параллельны между собой, можно утверждать, что и в пространстве эти прямые параллельны. Но для профильных прямых этого условия недостаточно. Для определения их взаимного положения необходимо построить профильные проекции прямых. На рис. 3.3 горизонтальные и фронтальные проекции прямых CD и EF параллельны, но эти прямые не параллельны, что следует из взаимного положения их профильных проекций.

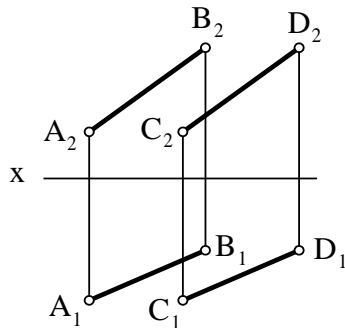


Рис. 3.2

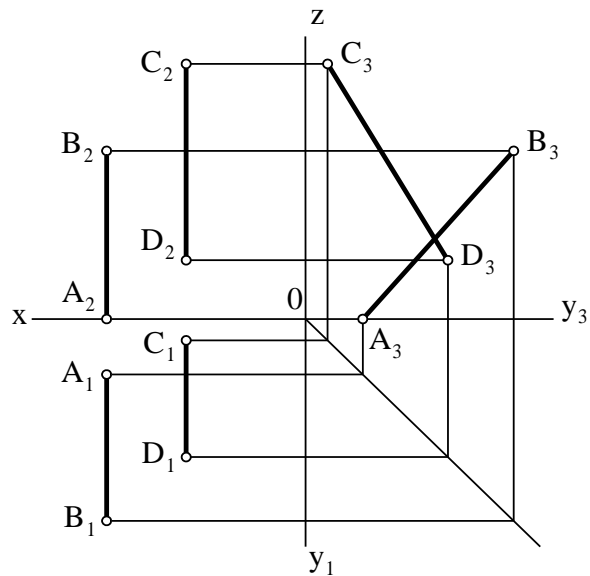


Рис. 3.3

Если прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны между собой, то такие прямые называются скрещивающимися. На эюре точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для прямых (рис. 3.4). Точка пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых является на эюре проекцией двух конкурирующих точек, принадлежащих заданным прямым.

Конкурирующие точки – это точки, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости проекций. На эюре (рис. 3.4) горизонтальные проекции конкурирующих точек 1_1 и 2_1 совпадают, но точка 1 принадлежит прямой АВ, а точка 2 – прямой CD.

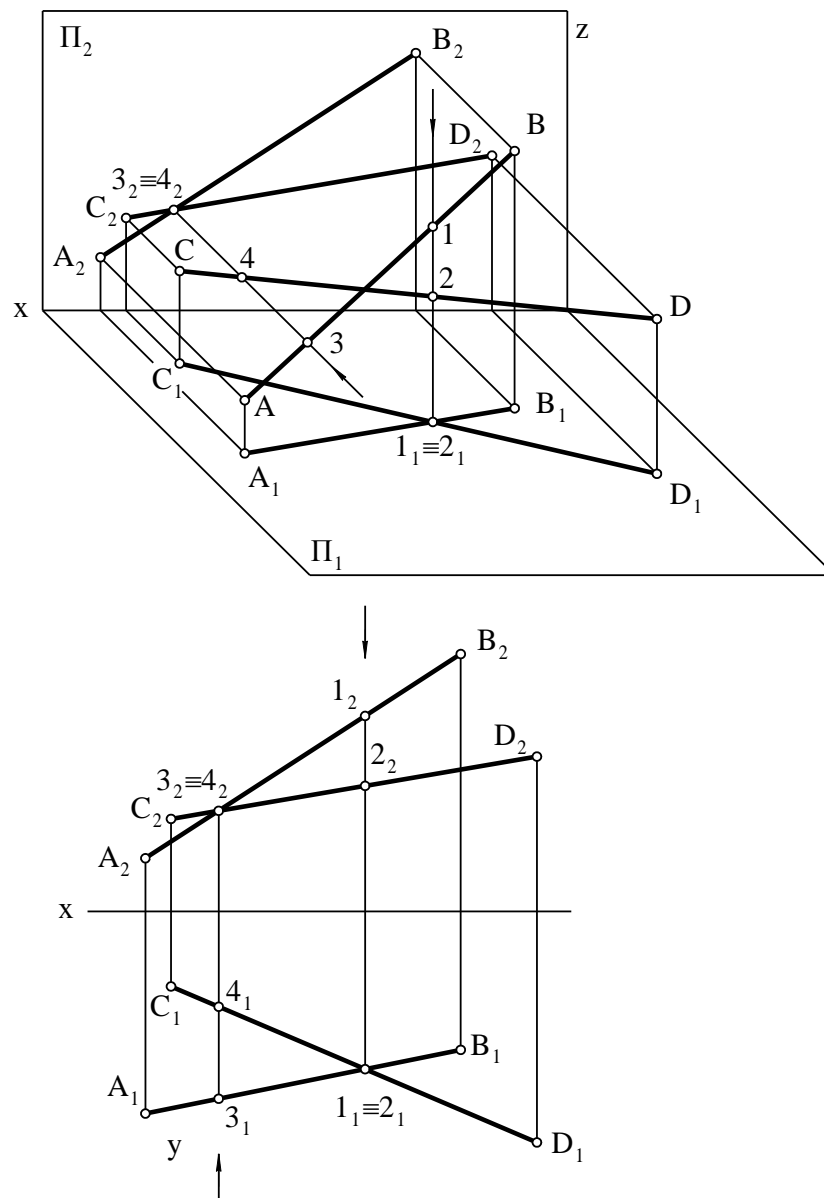


Рис. 3.4

Из чертежа видно, что расстояния от плоскости Π_1 до точек 1 и 2 различны. Фронтальная проекция перпендикуляра, обозначенная стрелкой, позволяет определить, какая из точек расположена ниже. В данном примере точка 2, лежащая на прямой CD, расположена выше, чем точка 1, лежащая на прямой AB. Следовательно, прямая CD проходит под прямой AB.

Точке пересечения фронтальных проекций соответствуют точки 3 и 4, расположенные на прямых AB и CD. Горизонтальная проекция перпендикуляра, отмеченная стрелкой, позволяет определить, какая из этих точек ближе к наблюдателю. Из чертежа видно, что точка 3 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 4. Поэтому прямая AB проходит перед CD.

3.2. Проекция плоских углов

Плоский угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если его стороны параллельны этой плоскости проекций.

Для того чтобы прямой угол проецировался на плоскость в натуральную величину, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна, а другая не перпендикулярна плоскости проекций. Изображенный на рис. 3.5 угол ABC – прямой, так как одна его сторона AB параллельна плоскости проекций Π_1 , на которую он спроецировался в виде прямого угла, т.е. в натуральную величину.

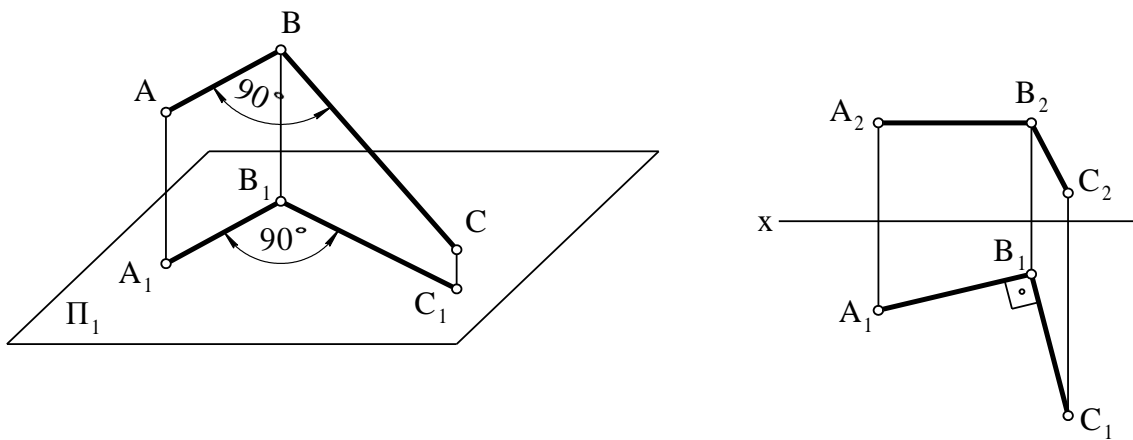


Рис. 3.5

3.3. Изображение плоскости на чертеже

Что такое плоскость? Из геометрии известно, что плоскость представляет собой бесконечную поверхность, которая на всем своем протяжении имеет одинаковое направление. Примером получения плоскости в пространстве может служить параллельное перемещение одной прямой по второй неподвижной прямой. Простейшими плоскостями считаются плоские геометрические фигуры (треугольник, круг и т.п.)

Плоскость на чертеже может быть задана (рис. 3.6):

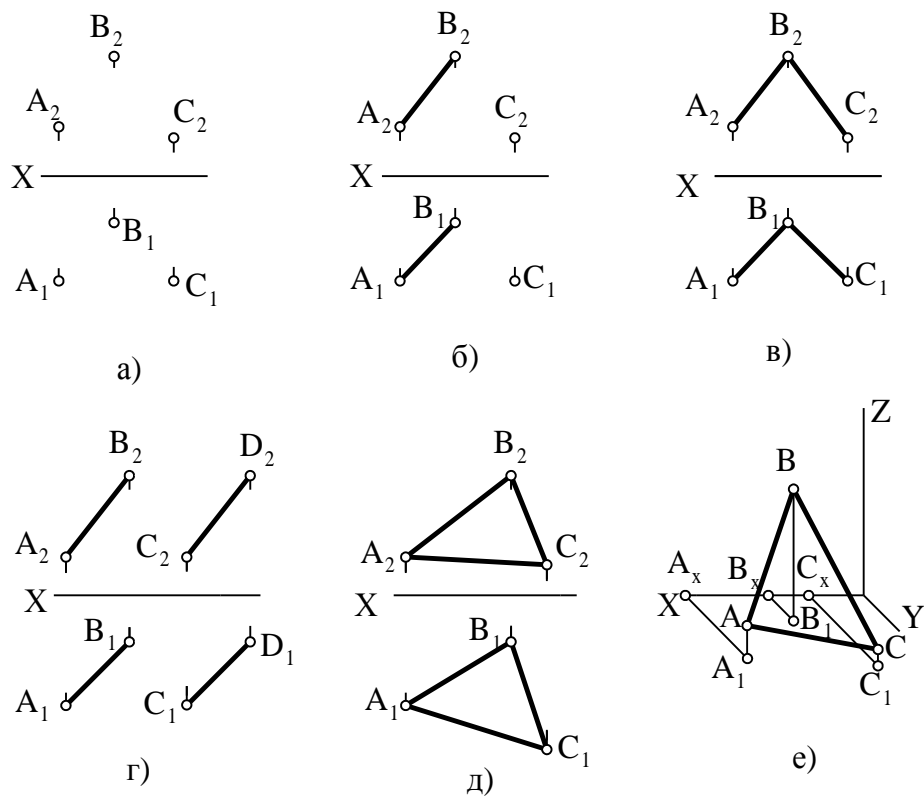


Рис. 3.6

- проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 3.6 а);
- проекциями отрезка прямой и точкой, не лежащей на прямой (рис. 3.6 б);
- проекциями двух пересекающихся отрезков прямых (рис. 3.6 в);
- проекциями двух отрезков параллельных прямых (рис. 3.6 г);
- проекциями плоской фигуры (треугольника) (рис. 3.6 д);

Соединяя проекции точек на первых четырех рисунках можно перейти к изображению в виде треугольника или других плоских фигур.

На рис. 3.6 е изображена в пространстве плоскость, заданная треугольником ABC. Эта же плоскость показана на чертеже (рис. 3.6 д) двумя ее проекциями.

Плоскость на чертеже также может быть задана следами плоскости. Следами плоскости называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций (рис. 3.7 а, б)

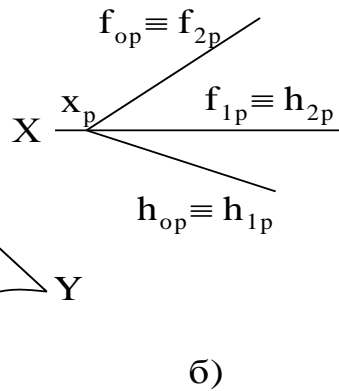
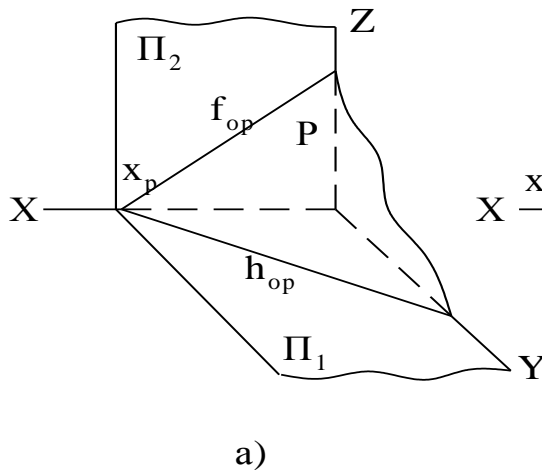


Рис. 3.7

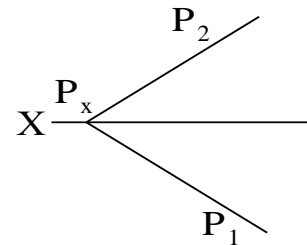


Рис. 3.8

Плоскость P (рис.3.7) образует с плоскостями проекций Π_2 и Π_1 трехгранный угол, величина которого находится в пересечении следов. Две грани этого угла совпадают с плоскостями проекций и находятся между осью X и следами плоскости (h_{op} и f_{op}), а третий угол – между следами h_{op} и f_{op} , который всегда меньше суммы двух других углов. Это значит, что на чертеже угол, заключенный между следами h_{op} и f_{op} (рис. 3.7 б) всегда больше угла заключенного между этими следами в пространстве (рис. 3.7 а).

На рис.3.7 а показаны горизонтальный h_{op} и фронтальный f_{op} следы. Точка пересечения следов, расположенная на оси X , называется точкой схода следов (X_p). Так как след плоскости является прямой, лежащей в плоскости проекций, то горизонтальная проекция фронтального следа f_{1p} будет находиться на оси X . Здесь же будет находиться и фронтальная проекция h_{2p} горизонтального следа плоскости P . Обычно эти проекции следов не используются при решении задач и поэтому их можно не изображать и не обозначать.

Целесообразно следы плоскости обозначить на чертежах по наименованию самих плоскостей проекций (Π_1 , Π_2) или по обозначению их индексов, например, $P_{\pi 1}$ и $P_{\pi 2}$, или же P_1 и P_2 (рис. 3.8). Такое обозначение более удобно при решении задач. Следует иметь в виду, что со следами плоскости совпадают (сливаются) их проекции. Так с горизонтальным следом плоскости Γ_1 совпадает горизонтальная проекция этого следа, а с

фронтальным следом плоскости Γ_2 совпадает фронтальная проекция этого следа.

Построение следов плоскости Γ , заданной двумя пересекающимися прямыми $a \cap b$ ($a_1 \cap b_1$ и $a_2 \cap b_2$) показано на рис. 3.9. Чтобы построить фронтальный след плоскости Γ_2 необходимо найти фронтальные следы N и N' прямых a и b . Здесь же будут находиться и их фронтальные проекции N_2 и N_2' . Соединив данные следы прямой линией, получим фронтальный след плоскости Γ_2 . Определив горизонтальные следы $M \equiv M_1$ и $M' \equiv M'_1$ прямых a и b и соединив их прямой линией получим горизонтальный след плоскости Γ_1 . Из рис. 3.4 видно, для построения следа Γ_1 достаточно найти один след M прямой a и соединить эту точку с точкой схода следов Γ_x .

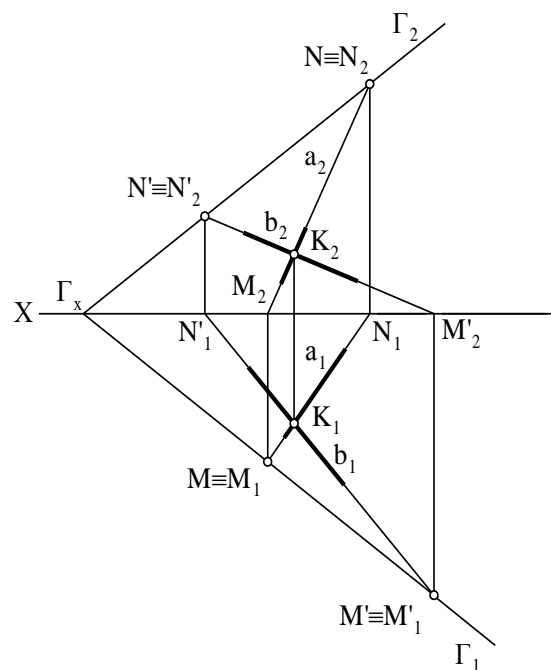


Рис. 3.8

3.4. Прямая и точка в плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, находящиеся в этой плоскости, или если она проходит через одну точку плоскости и параллельна прямой, принадлежащей данной плоскости (рис. 3.9).

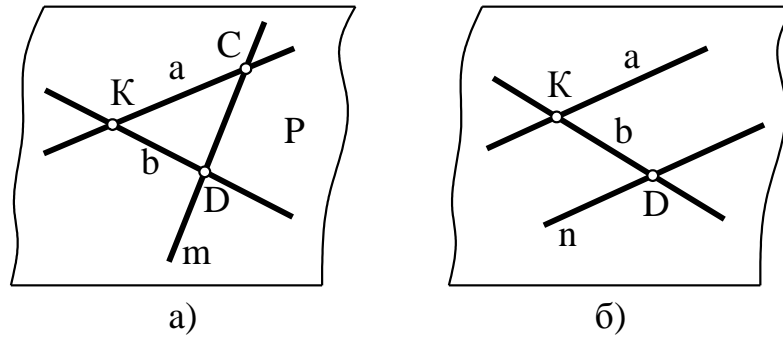


Рис. 3.9

На рис. 3.9 а плоскость P задана двумя пересекающимися прямыми a и b . Чтобы прямая принадлежала этой плоскости необходимо на прямых a и b взять точки, например C и D и через них провести прямую m . На рис. 3.9 б прямая « n » принадлежит плоскости, так как она проходит через точку D , принадлежащую плоскости $a \cap b$ и параллельна прямой a .

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, находящейся в этой плоскости. На рис. 3.10. показано построение проекции точки D на чертеже, заданном треугольником ABC .

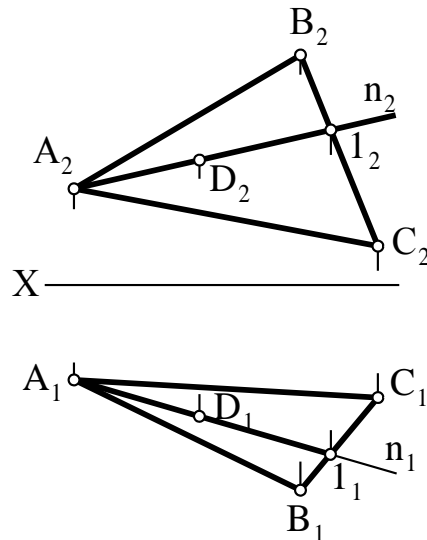


Рис 3.10

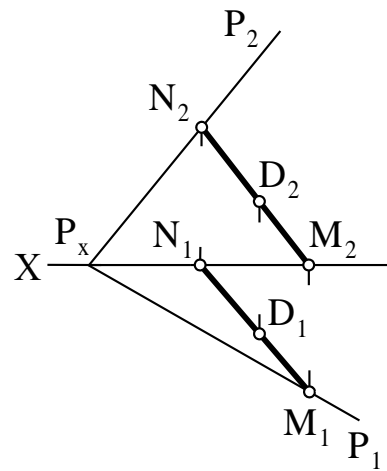


Рис. 3.11

Для решения задачи проводим в плоскости, заданной треугольником ABC , прямую n (n_1 и n_2), проходящую через произвольно выбранные точки A и I (A_1I_1 и A_2I_2) и принадлежащие плоскости треугольника. На прямой n в произвольном месте берем точку D . Фронтальная проекция точки D_2 находится на фронтальной проекции прямой n_2 , а горизонтальная проек-

ция точки D_1 – на горизонтальной проекции прямой n_1 . Точку D можно было взять и на любой из сторон треугольника ABC .

Чтобы построить проекции точки D , принадлежащей плоскости P заданной следами (рис. 3.11), проводим в этой плоскости произвольно фронтальную и горизонтальную проекции прямой MN (M_1N_1 и M_2N_2), принадлежащей плоскости P и на соответствующих проекциях прямой отмечаем проекции точек D_2 и D_1 .

3.5. Главные линии плоскости.

К главным линиям плоскости относятся горизонтали (h), фронтали (f), профильные прямые (p) и линии наибольшего наклона к плоскостям проекций.

Горизонталью h (h_1 и h_2) плоскости называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 3.12). Так как горизонталь плоскости параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1 , то фронтальная ее проекция будет параллельна оси X . Для построения проекций горизонтали проводим через точку A_2 прямую параллельную оси X . Это будет фронтальная проекция горизонтали (h_2). Горизонтальную проекцию горизонтали (h_1) находим по линии связи.

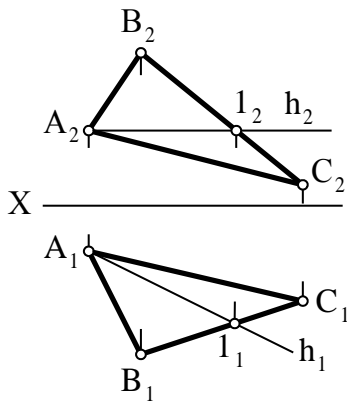


Рис. 3.12

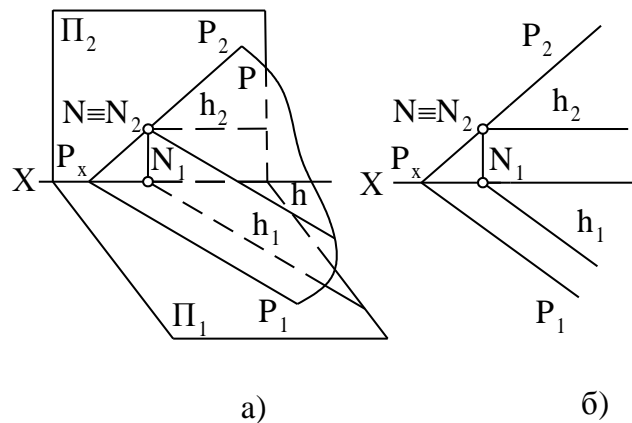


Рис. 3.13

На рис. 3.13. показано наглядное изображение плоскости P (P_1 и P_2) и горизонтали h с ее проекциями h_2 и h_1 . При построении проекций горизонтали на чертеже плоскости, заданной следами P_1 и P_2 (рис. 3.13 а, б), проводим через произвольно выбранную точку N (проекция N_2) на следе P_2

прямую m параллельно оси X . Горизонтальная проекция горизонтали (h_1) пройдет через точку N_1 параллельно горизонтальному следу P_1 .

Фронталью плоскости f (f_1 и f_2) называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали на чертеже параллельна оси X , а фронтальную проекцию фронтали находим при помощи линии связи (рис. 3.14).

На рис. 3.15 а показано наглядное изображение плоскости Γ (Γ_1 и Γ_2) и фронтали f с ее проекциями f_1 и f_2 , а на рис. 3.15 б представлен чертеж плоскости, изображенный следами с ее горизонтальной и фронтальной проекцией фронтали.

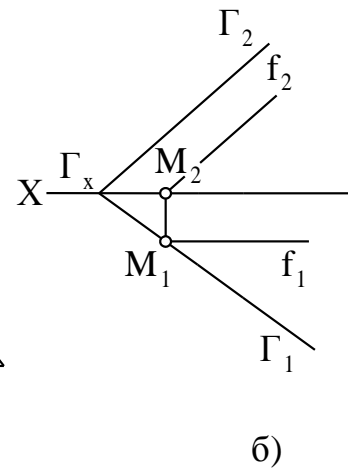
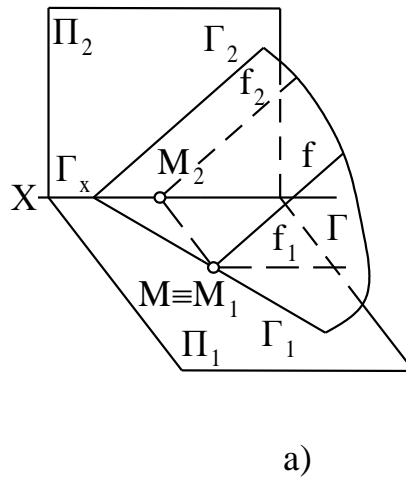
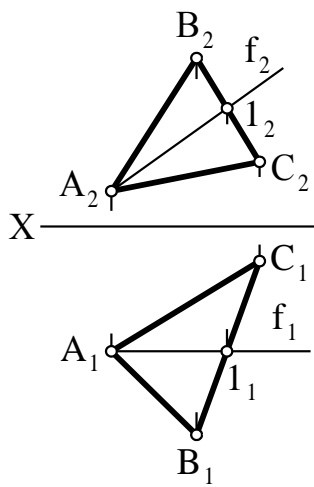


Рис. 3.14

Рис. 3.15

Профильной прямой (p) p (p_1 , p_2 , p_3) называется прямая линия, принадлежащая плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рис. 3.16).

В этом случае фронтальная и горизонтальная проекция профильной прямой p (E_1F_1 и E_2F_2) параллельны Π_3 , а профильная проекция $E_3F_3=EF$, т.е. равняется натуральной величине отрезка EF .

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций (горизонтальной, фронтальной и профильной) называются прямые, принадлежащие этой плоскости и перпендикулярные к фронталям, горизонталям, профильным прямым плоскости, или же к соответствующим следам плоскости. Линию наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций чаще всего называют линией ската.

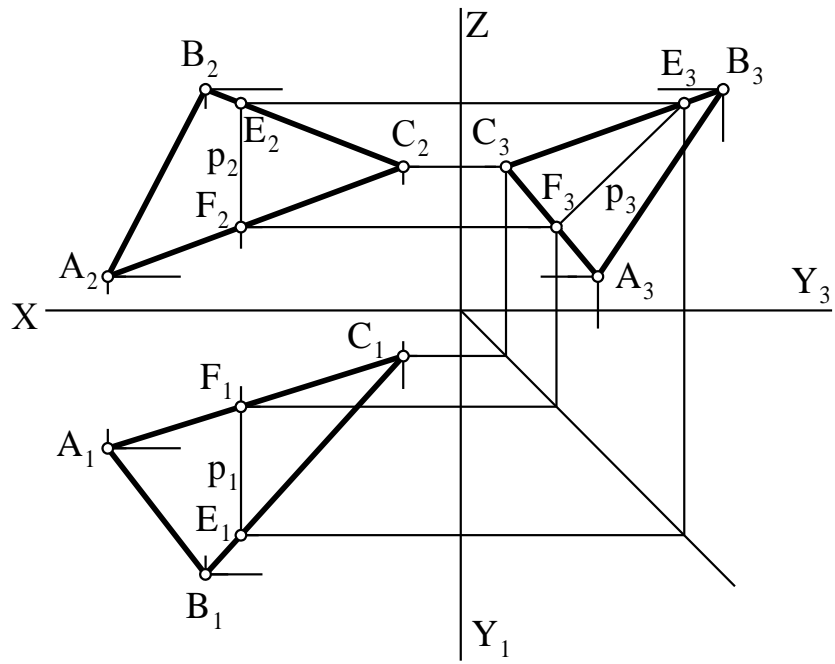


Рис. 3.16

Так, если в точку A плоскости Γ (рис. 3.17 а) поместить шарик, то траектория его движения определится прямой линией AM (A_1M_1, A_2M_2), т.е. линией ската, перпендикулярной к горизонтали h (h_1, h_2), а также к горизонтальному следу Γ_1 плоскости Γ .

Чтобы в плоскости Γ (Γ_1, Γ_2), (рис. 3.17 б) заданной следами, провести линию ската необходимо на этой плоскости взять произвольную точку A (A_1, A_2) и через ее горизонтальную проекцию A_1 точки A провести линию перпендикулярно к горизонтальному следу, что тоже самое и к горизонтальной проекции горизонтали (h_1). Прямой угол между h_1 и M_1N_1' спроецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, так как одна из его сторон, а именно горизонталь, параллельна горизонтальной плоскости проекций, но h_1 параллельна Γ_1 , следовательно угол между Γ_1 и M_1N_1' тоже прямой.

Как видно из рис. 3. 17 а линейный угол AM_1A_1 , заключенный между линией ската AM_1 и ее горизонтальной проекцией M_1A_1 , равняется двугранному углу, образованному плоскостями Γ и Π_1 .

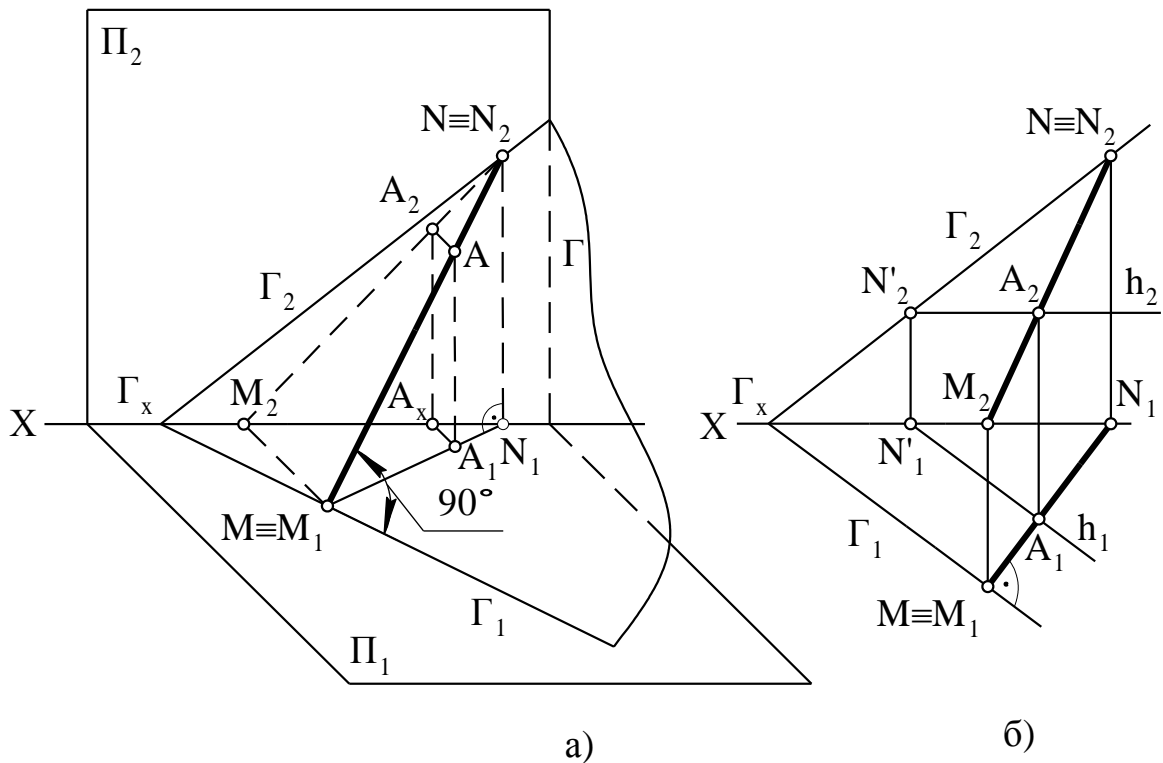


Рис. 3.17

Чтобы определить угол наклона плоскости, заданной треугольником ABC к плоскости проекций Π_1 (рис.3.18), необходимо выполнить следующее: провести в плоскости треугольника ABC горизонталь h (h_1 и h_2), затем из точки B_1 провести горизонтальную проекцию линии ската (B_1K_1) перпендикулярно к горизонтальной проекции горизонтали и по линии связи определить фронтальную проекцию линии ската (B_2K_2). Построив на горизонтальной проекции линии ската B_1K_1 прямоугольный треугольник $B_1K_1V_0$ одним катетом которого является горизонтальная проекция линии ската B_1K_1 , а вторым – превышение (Δz) точки B (B_2) над точкой K (K_2) относительно горизонтальной плоскости проекций, получим угол α , заключенный между горизонтальной проекцией линии ската и ее натуральной величиной. Это и есть угол наклона треугольника ABC к плоскости проекций Π_1 .

Определение угла наклона плоскости к плоскостям проекций Π_2 и Π_3 определяется аналогичным образом. Для этого необходимо провести фронталь в плоскости, а затем линию перпендикулярно к ней, или же профильную прямую и перпендикуляр к ней.

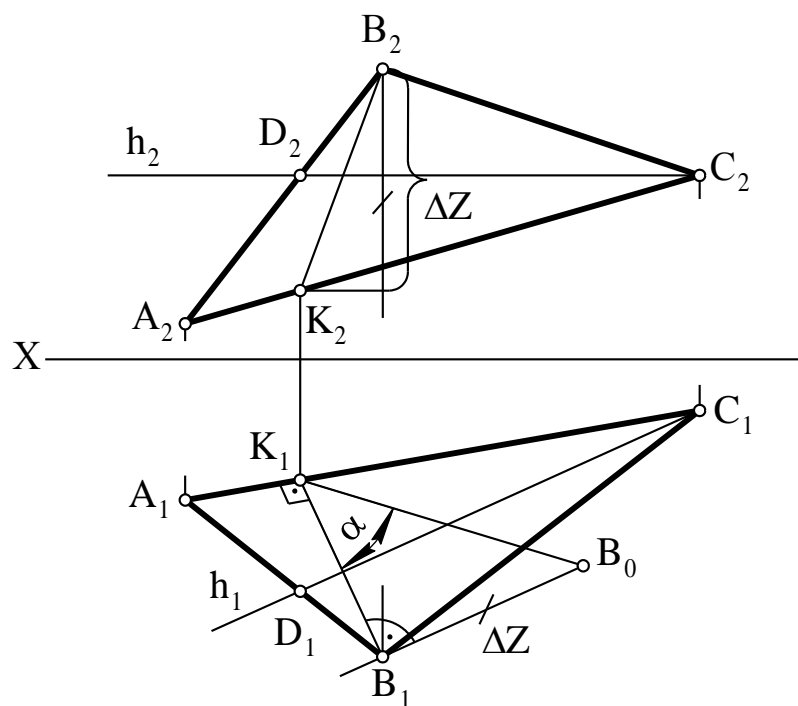


Рис. 3.18

3.6. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость в пространстве может занимать относительно плоскостей проекций Π_1 , Π_2 , Π_3 следующие положения: наклонно ко всем плоскостям проекций – плоскость общего положения (рис. 3.7; 3.8), перпендикулярно к одной из плоскостей проекций – проецирующая плоскость, перпендикулярно одновременно к двум плоскостям проекций, т.е. параллельно к третьей плоскости проекций – плоскость уровня.

Проецирующие плоскости: горизонтально-проецирующая (перпендикулярна к Π_1), фронтально-проецирующая (перпендикулярна к Π_2), профильно-проецирующая (перпендикулярна к Π_3).

В горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 3.19 а, б) фронтальный след Γ_2 расположен перпендикулярно к плоскости проекций Π_1 и к оси OX , а горизонтальный след может быть расположен под любым углом, кроме прямого. Горизонтальный след обладает собирательным свойством, т.е. любая точка, фигура, находящаяся в плоскости Γ всегда проецируется на горизонтальный след Γ_1 , это относится и к точке A (рис. 3.19 а, б), принадлежащей плоскости Γ .

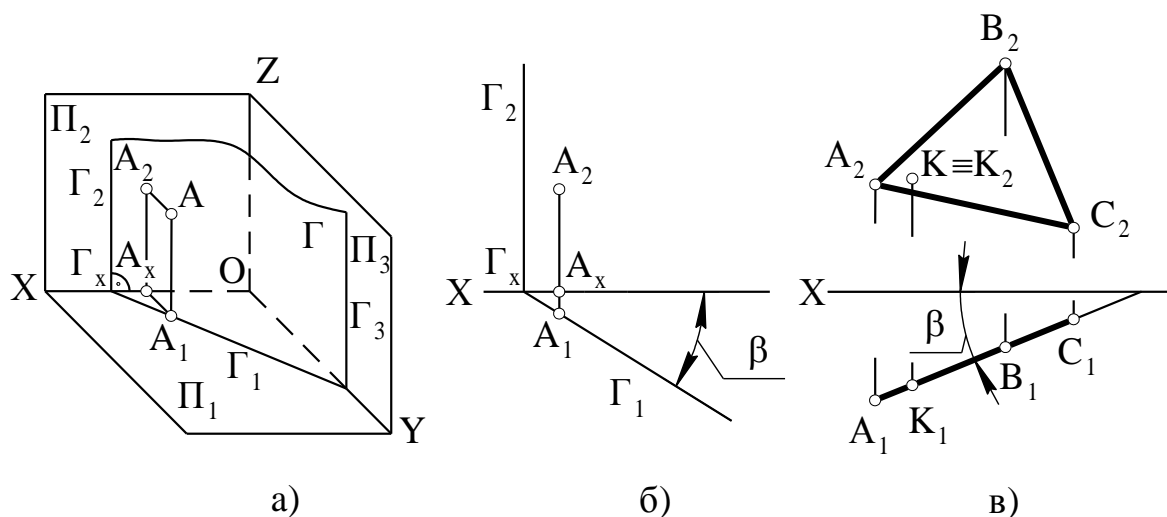


Рис. 3.19

На рис. 3.19 в изображен треугольник ABC , который занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций Π_1 . Точка K принадлежит данному треугольнику. Фронтальная ее проекция K_2 совпадает с K ($K_2 \equiv K$). Горизонтальная проекция K_1 проецируется на горизонтальную проекцию треугольника $A_1B_1C_1$. Угол (β), заключенный между осью X и горизонтальным следом плоскости Γ_1 , а также между горизонтальной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ и осью X есть угол наклона плоскостей Γ и треугольника ABC к фронтальной плоскости проекций.

Фронтально-проецирующие плоскости, изображенные наглядно P (P_2, P_1), следами P_2, P_1 и треугольником $B_1C_1D_1$ и $B_2C_2D_2$, показаны на рис. 3.20 а, б, в.

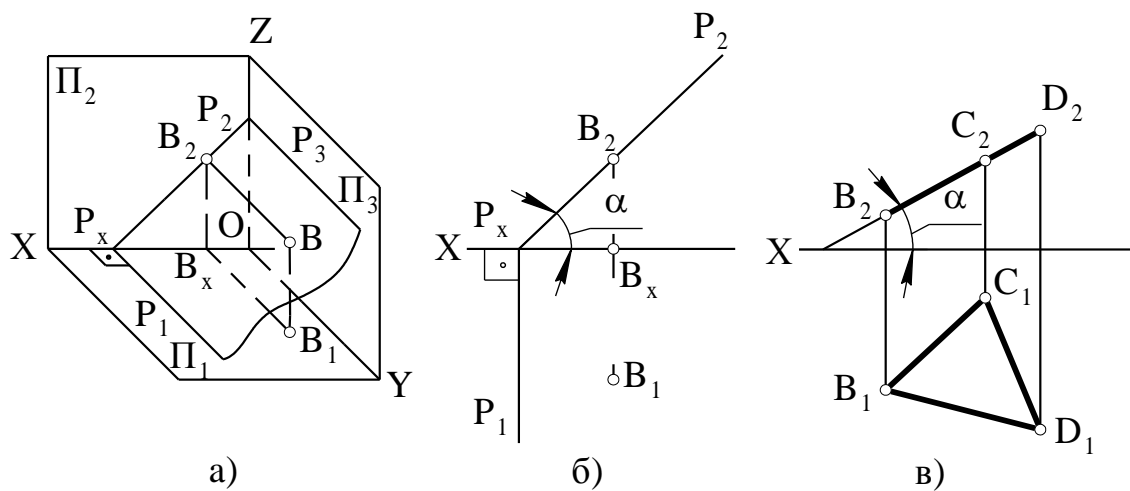


Рис. 3.20

В данном случае (рис. 3.20 а и б) горизонтальный след P_1 , расположен перпендикулярно Π_2 и оси X . Точка B , находящаяся в плоскости P , спроецируется обязательно на фронтальный след P_2 . Треугольник $BСD$ (рис. 3.20 в) занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций Π_2 , поэтому фронтальная его проекция изобразится в виде отрезка прямой $B_2C_2D_2$.

Угол α (рис. 3.20 б, в), заключенный между P_2 и осью X , а также между $B_2C_2D_2$ и осью X , есть угол наклона плоскостей P и $BСD$ к плоскости проекций Π_1 .

Профильно-проецирующая плоскость показана на рис. 3.21. На рис. 3.21 а показано наглядное изображение профильно-проецирующей плоскости Φ , точка A , принадлежащая этой плоскости и ее проекции. Профильная проекция точки A_3 находится на профильном следе Φ_3 . На рис. 3.21 б и рис. 3.21 в изображены профильно-проецирующие плоскости, заданные следами плоскости Φ (Φ_1, Φ_2, Φ_3) и треугольником $СDE$ ($C_1D_1E_1; C_2D_2E_2; C_3D_3E_3$).

Профильно-проецирующая плоскость, проходящая через ось X называется осевой, а если она делит двугранный угол между плоскостями проекций Π_1 и Π_2 пополам, то она еще называется биссекторной.

Плоскости уровня. К ним относятся горизонтальная плоскость – параллельная Π_1 , фронтальная – параллельная Π_2 и профильная – параллельная Π_3 . Эти плоскости уровня перпендикулярны одновременно к двум другим плоскостям проекций. Например, горизонтальная плоскость перпендикулярна одновременно к фронтальной и профильной плоскостям проекций.

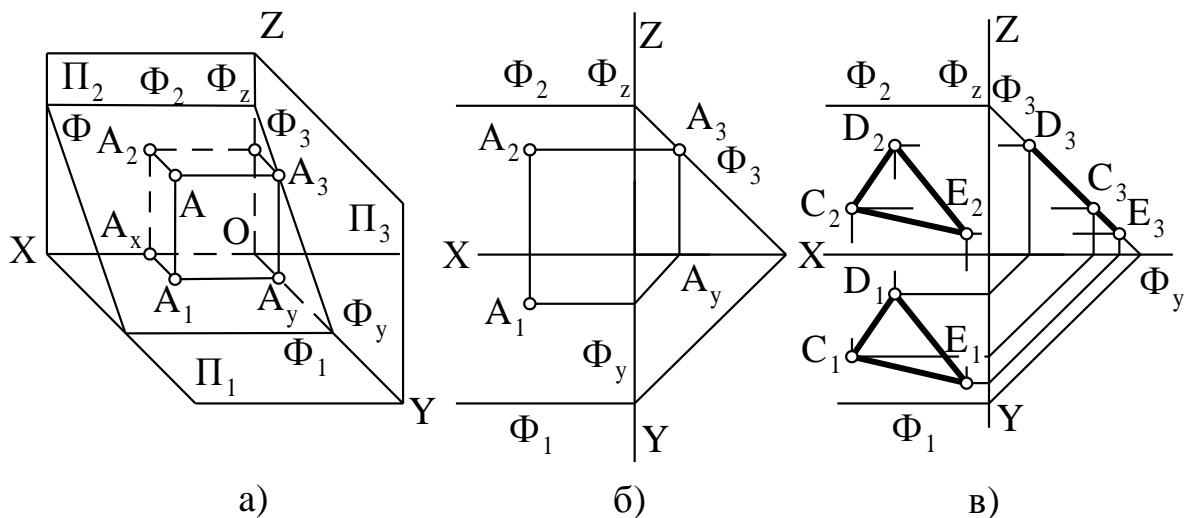


Рис.3.21

На рис. 3.22 а показано наглядное изображение горизонтальной плоскости Γ (Γ_2, Γ_3) в системе плоскостей проекций Π_1, Π_2 и Π_3 , а на рис. 3.22 б – чертеж данной плоскости, изображенный фронтальным и профильным следами (Γ_1 и Γ_3). Показано также как точка A , находящаяся в плоскости Γ , проецируется на плоскости проекций.

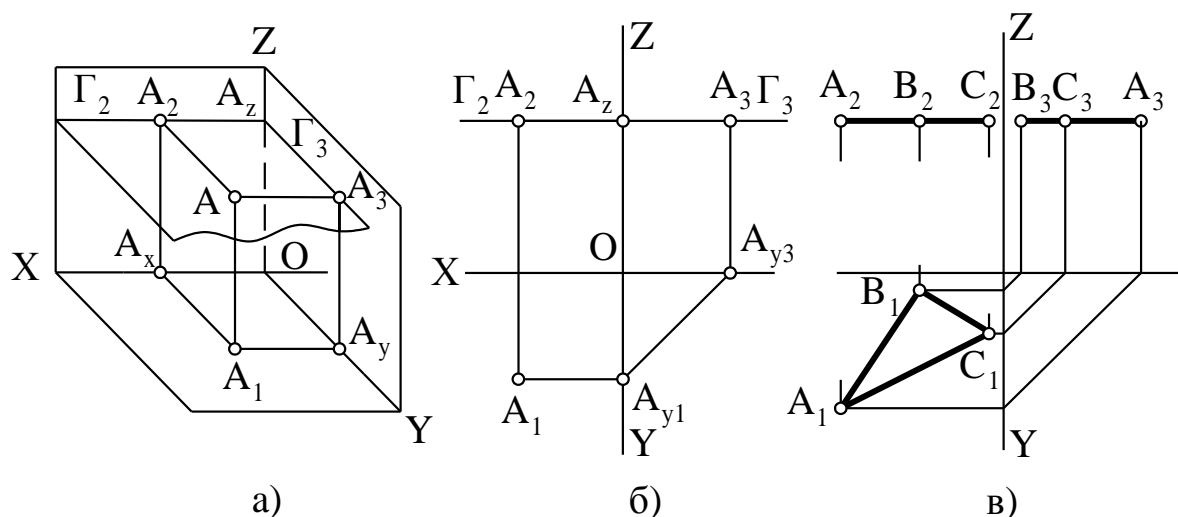


Рис. 3.22

Горизонтальная плоскость, заданная треугольником ABC (рис.3.22 в) изображена проекциями $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. При этом фронтальная и профильная проекции изображаются отрезками прямых линий, а горизонтальная – треугольником, который равняется истинной величине треугольника ABC , т.к. он в пространстве занимает параллельное положение относительно плоскости проекций Π_1 .

На рис. 3.23 а и б изображена фронтальная плоскость Φ , где показаны горизонтальный Φ_1 и профильный Φ_3 следы этой плоскости, а также проекции точки A , принадлежащей этой плоскости. В данном случае горизонтальная и профильная проекции точки A совпадают с соответствующими следами.

Проекции треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ также изображают фронтальную плоскость треугольника ABC . Горизонтальная проекция $A_1B_1C_1$ проходит параллельно оси X , тогда фронтальная проекция $A_2B_2C_2$ проецируется в натуральную величину $A_2B_2C_2=ABC$.

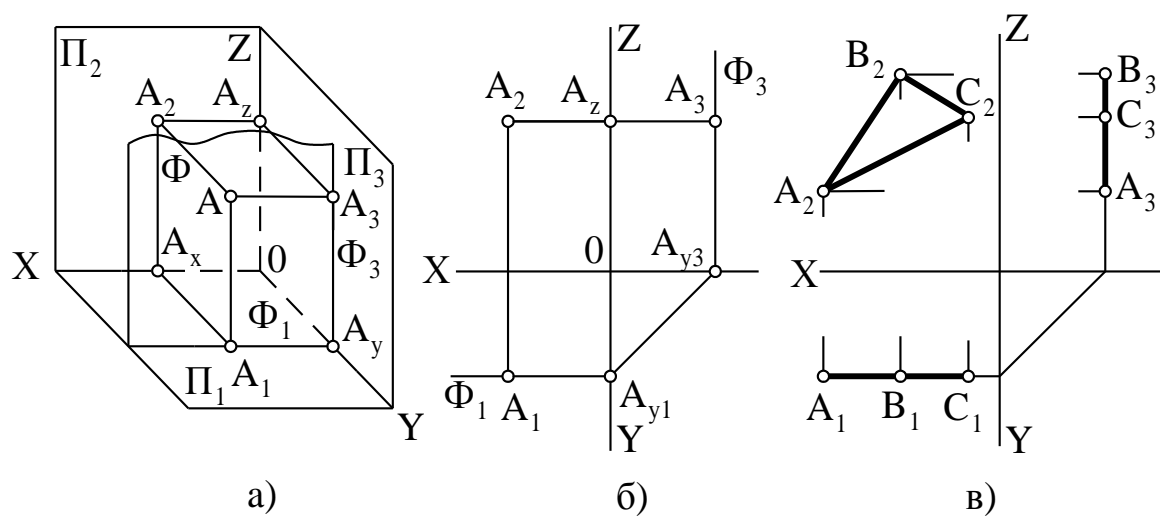


Рис. 3.23