

4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ. ДВЕ ПЛОСКОСТИ

- 4.1. Прямая линия, параллельная плоскости
- 4.2. Прямая линия, пересекающаяся с плоскостью частного положения
- 4.3. Пересечение плоскости частного положения с плоскостью общего положения
- 4.4. Проведение плоскостей частного положения через прямую линию
- 4.5. Пересечение прямой с плоскостью общего положения
- 4.6. Взаимно параллельные плоскости
- 4.7. Пересечение двух плоскостей общего положения

4.1. Прямая линия, параллельная плоскости

Прямая линия относительно плоскости пространства может занимать следующие положения: находиться в плоскости, быть параллельной плоскости и пересекаться с плоскостью.

Из геометрии известно, что прямая линия параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, находящейся в этой плоскости. Пусть требуется через точку D (D_1, D_2) провести прямую, параллельную плоскости, заданной треугольником ABC ($A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$) (рис. 4.1).

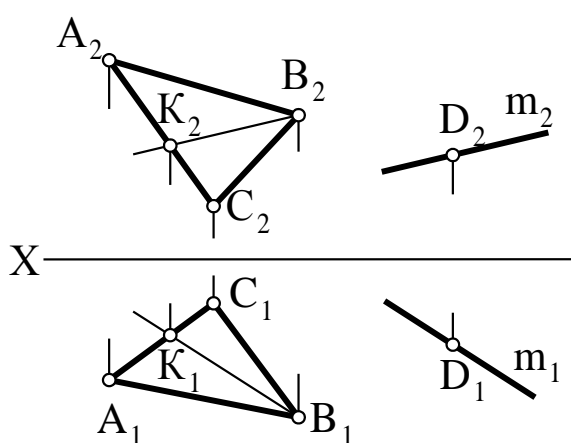


Рис. 4.1

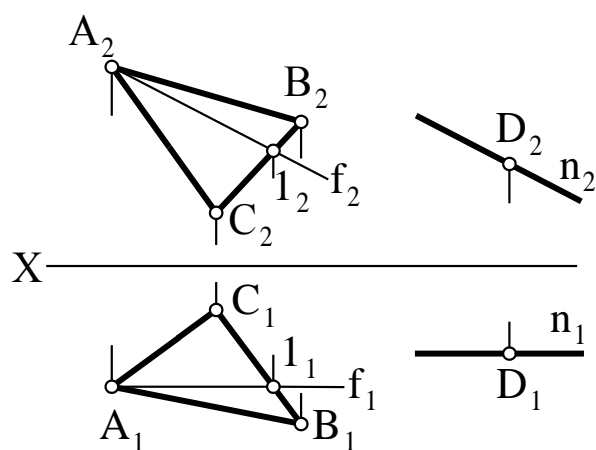


Рис. 4.2

В треугольнике ABC проводим произвольно отрезок BK (B_2K_2 и B_1K_1), а через точку D (D_1, D_2) проводим прямую m , параллельную данному отрезку, т.е. $m_2 \parallel K_2B_2$, а $m_1 \parallel K_1B_1$. Через данную точку D можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных плоскости треугольника ABC , в том числе и параллельных сторонам треугольника.

Если была бы поставлена задача провести через точку D прямую, параллельную треугольнику ABC и фронтальной плоскости проекций, то в данном случае можно провести только одну прямую параллельную и треугольнику и Π_2 . Для этого в треугольнике проводим фронталь f (f_1, f_2), а через точку D (D_1, D_2) прямую n (n_1, n_2), соответственно параллельные n_1 и f_1, n_2 и f_2 (рис. 4.2).

В случае проведения прямой, параллельной плоскости P , заданной следами, также необходимо в плоскости P провести произвольно прямую или горизонталь (фронталь), а затем провести проекции прямой, проходящей через точку D (D_2, D_1), параллельные соответствующим проекциям прямых, взятых в плоскости P (рис. 4.3).

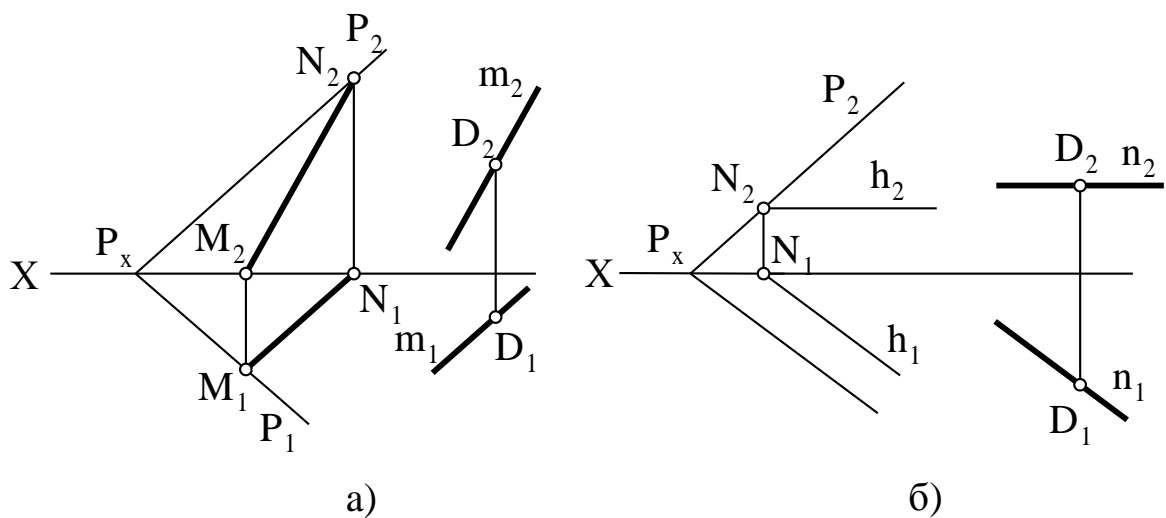


Рис. 4.3

На рис. 4.3 а в плоскости P проведен отрезок прямой MN (M_1N_1, M_2N_2) произвольно, а через точку D – прямая m (m_1, m_2), одноименные проекции которой параллельны проекциям отрезков, взятых в плоскости, т.е. $m_1 \parallel M_1N_1, m_2 \parallel M_2N_2$.

На рис. 4.3 б в плоскости P проведена горизонталь h (h_1, h_2), а через D_1 прямая n_1 параллельная h_1 и через D_2 проведена прямая n_2 параллельная h_2 .

4.2. Прямая линия, пересекающаяся с плоскостью частного положения

Точку пересечения (встречи) прямой линии с плоскостью частного положения определяют непосредственно из чертежа, без дополнительных построений. Так как известно, что их следы обладают собирательным свойством, и любая точка, находящаяся в плоскости, обязательно проецируется на один из следов плоскости, вторая проекция точки находится по линии связи. Подробно это рассмотрим на примере пересечения отрезка АВ с горизонтально-проецирующей плоскостью Γ (рис. 4.4).

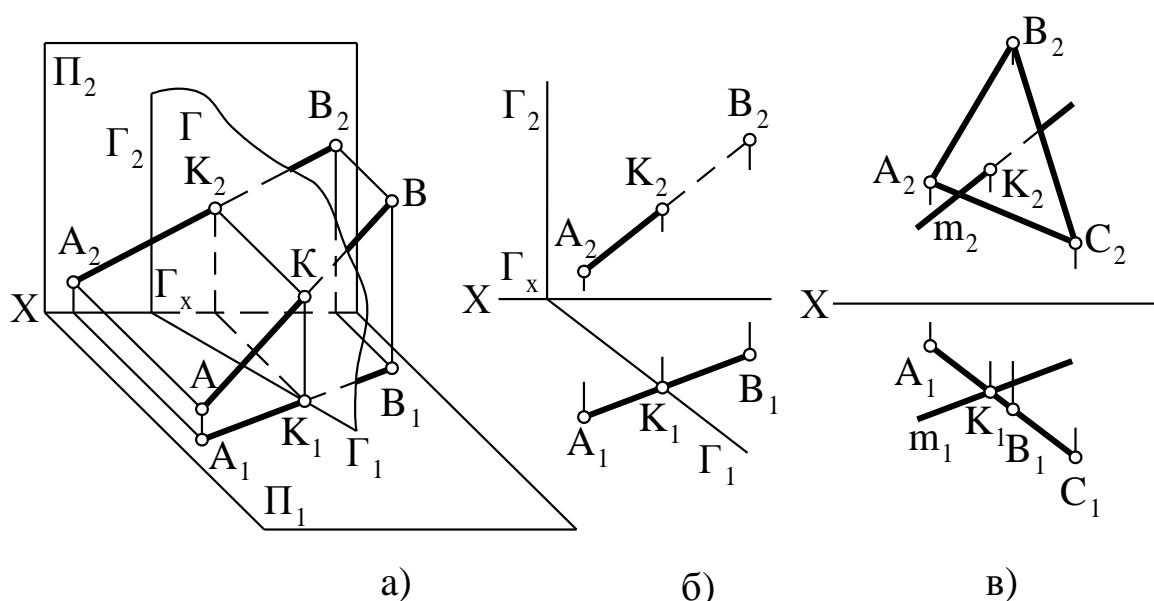


Рис. 4.4

Отрезок АВ пересекается с плоскостью Γ (Γ_1, Γ_2) в точке К, горизонтальная ее проекция K_1 находится на следе Γ_1 , как точка, принадлежащая этой плоскости. Фронтальная проекция K_2 определяется по линии связи (рис. 4.4 а и б). Часть отрезка КВ (K_2B_2) на фронтальной плоскости проекций, а именно, за точкой пересечения К закрыта плоскостью, поэтому она изображается штриховой линией.

На рис. 4.4 в приведен пример определения точки пересечения прямой m (m_1, m_2) с горизонтально-проецирующей плоскостью, заданной треугольником АВС ($A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$).

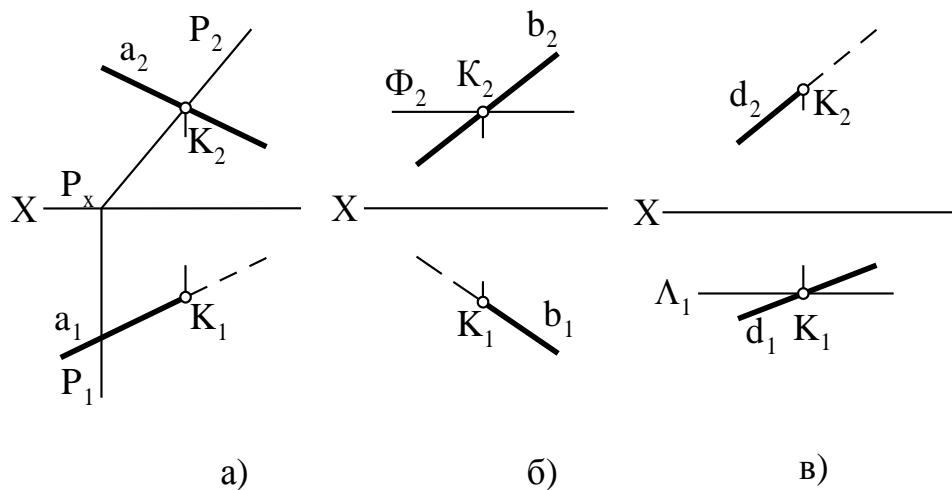


Рис. 4.5

На рис. 4.5 а приведен пример нахождения точки пересечения прямой a с фронтально-проецирующей плоскостью Γ . Фронтальная проекция K_2 находится на пересечении фронтальной проекции прямой a_2 с фронтальным следом Γ_2 . K_1 – определена по линии связи. Определение проекций точек пересечения прямой b с горизонтальной плоскостью Φ (Φ_2) и прямой d с фронтальной плоскостью Λ (Λ_1) показано на рис. 4.9 б и 4.9 в.

4.3. Пересечение плоскости частного положения с плоскостью общего положения

Рассмотрим построение линии пересечения плоскости общего положения Γ и проецирующей P , заданных следами (рис. 4. б).

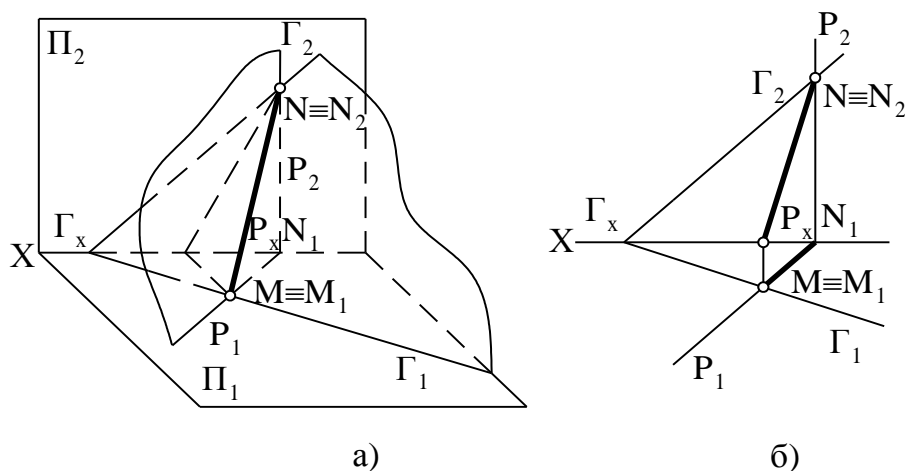


Рис. 4.6

Из наглядного изображения (рис. 4.6 а) видно, что на пересечении горизонтальных следов плоскостей Γ и P (Γ_1 и P_1) находится горизонтальный след линии пересечения этих плоскостей M и его горизонтальная проекция M_1 . На пересечении фронтальных следов Γ_2 и P_2 находится фронтальный след линии пересечения N и его проекция N_2 . Соединив одноименные проекции точек M и N , получим фронтальную и горизонтальную проекции линии пересечения M_2N_2 и M_1N_1 , причем последняя совпадает с горизонтальным следом плоскости P_1 . Это же решение показано на чертеже (рис. 4.6 б).

Пример построения линии пересечения горизонтально-проецирующей плоскости Γ , заданной следами, и плоскости общего положения, заданной треугольником, приведен на рис. 4.7.

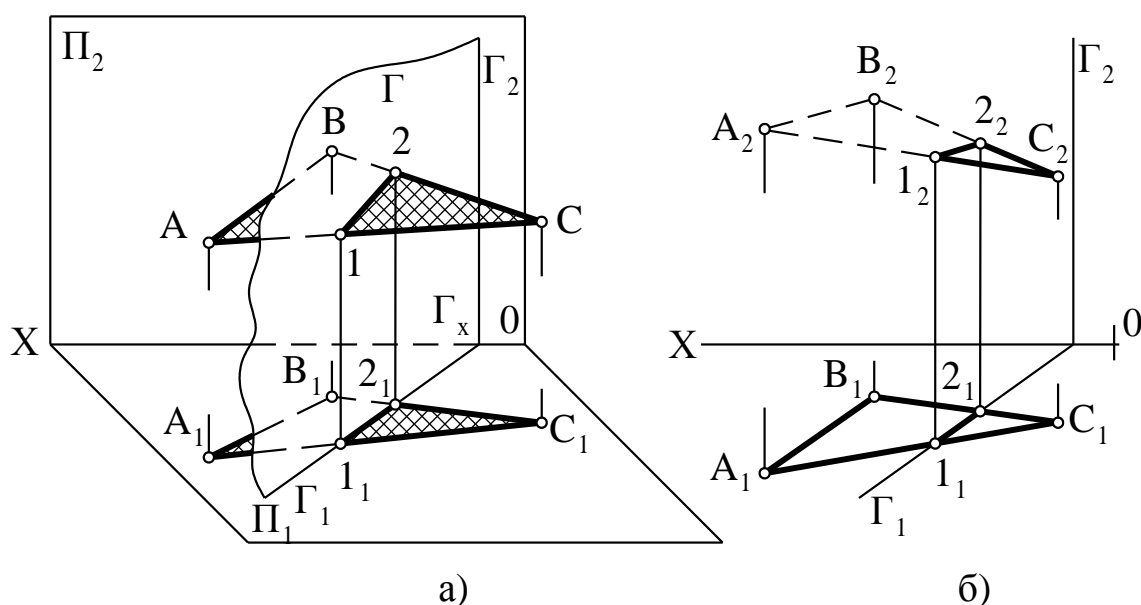


Рис. 4.7

На рис. 4.7 а показано наглядное изображение двух плоскостей с линией пересечения 12 , на рис. 4.7 б это показано на чертеже. Горизонтальная проекция линии пересечения 1_12_1 в таких случаях находится всегда на горизонтальном следе.

Построение линии пересечения плоскости общего положения P и плоскости уровня, в частности горизонтальной плоскости Γ , показано на рис. 4.8.

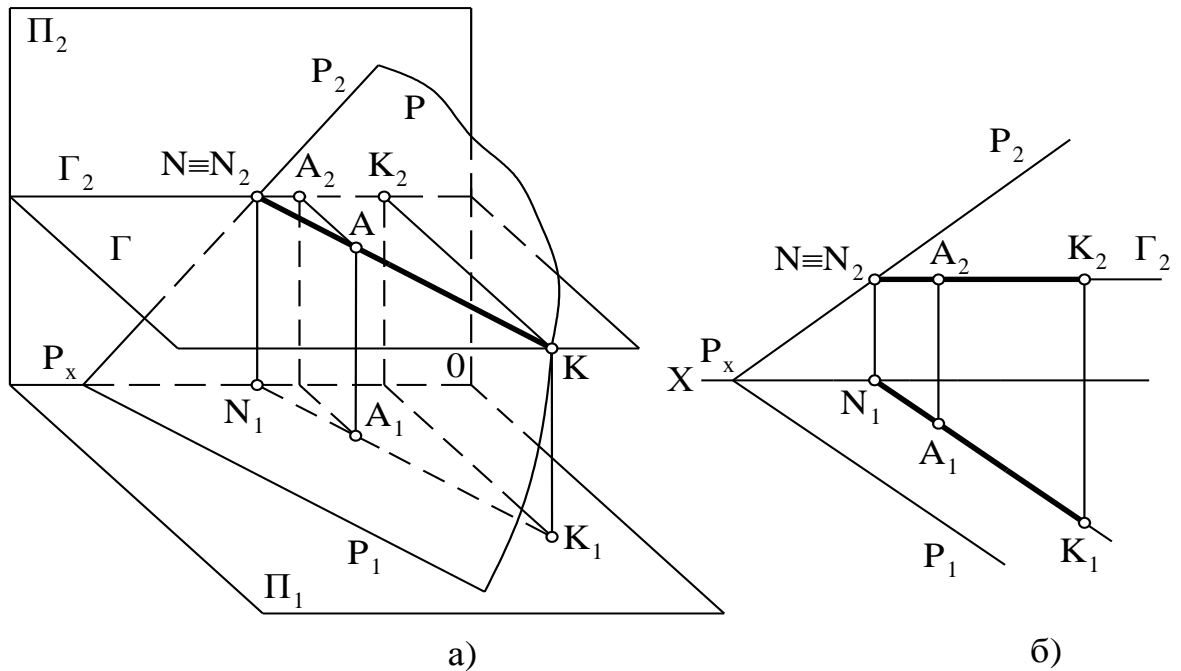


Рис. 4.8

Так как плоскость Γ (Γ_2) и плоскость проекций Π_1 параллельны между собой, а общей пересекающей их плоскостью является плоскость P (P_1, P_2), то линия пересечения плоскости P и Π_1 есть горизонтальный след P_1 , а плоскостей Γ и P - отрезок прямой линии NK (рис. 4.8 а). Они должны быть параллельны между собой, исходя из выше изложенного, т.к. две параллельные плоскости одновременно пересекаются третьей плоскостью P . Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальным следом Γ_2 плоскости Γ и проходит параллельно оси X , горизонтальная проекция линии пересечения проходит параллельно горизонтальному следу P_1 , к тому же отрезок NK является горизонталью. На рис. 4.8 б приведен чертеж пересечения плоскости общего положения P (P_1, P_2) и горизонтальной плоскости Γ (Γ_2).

4.4. Проведение плоскостей частного положения через прямую линию

Для решения задач на определение точек пересечения прямой с различными плоскостями необходимо проводить дополнительные построения, такие например, как проведение через прямую проецирующих плос-

костей или плоскостей уровня. Через прямую общего положения можно провести любую проецирующую плоскость (рис. 4.9, 4.10), а через прямые параллельные плоскостям проекций можно провести как проецирующие плоскости, так и плоскости уровня (рис. 4.10).

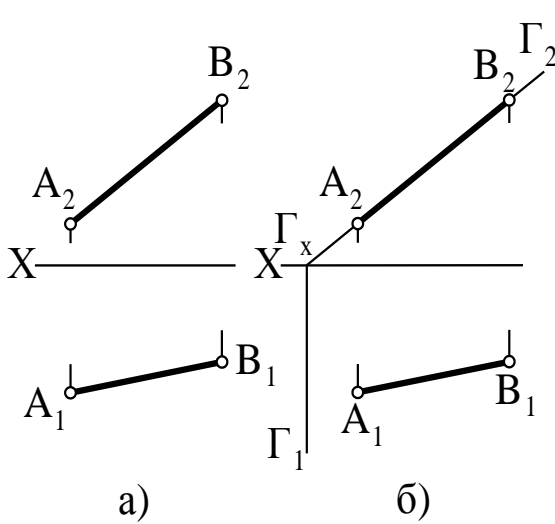


Рис. 4.9

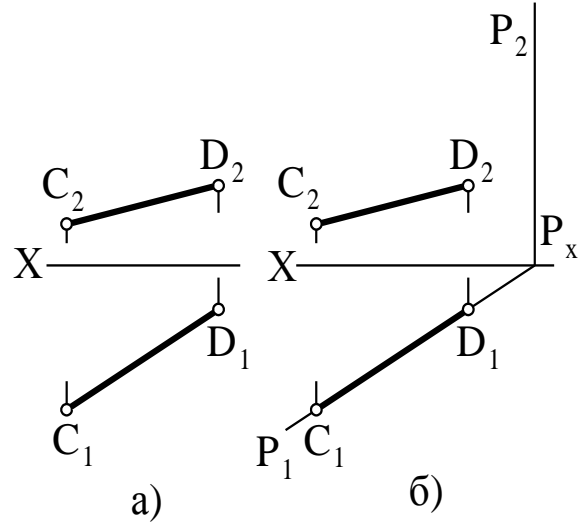


Рис. 4.10

На рис. 4.9 а изображен отрезок прямой АВ общего положения, а на рис. 4.9 б через этот отрезок проведена фронтально-проецирующая плоскость Γ (Γ_1, Γ_2). Через отрезок CD (рис. 4.10 а) проведена горизонтально-проецирующая плоскость P (P_1, P_2), что изображено на рис. 4.10 б.

Ниже показаны примеры проведения горизонтальной плоскости Φ , след Φ_2 (рис. 4.11) и фронтальной Γ - след T_1 (рис. 4.12) через соответствующие отрезки прямых EF (E_1F_1, E_2F_2) и KM (K_1M_1, K_2M_2).

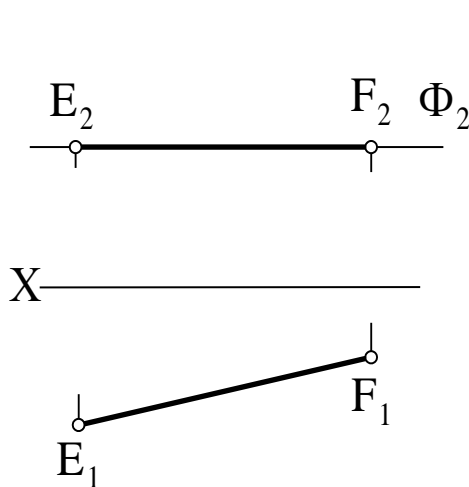


Рис. 4.11

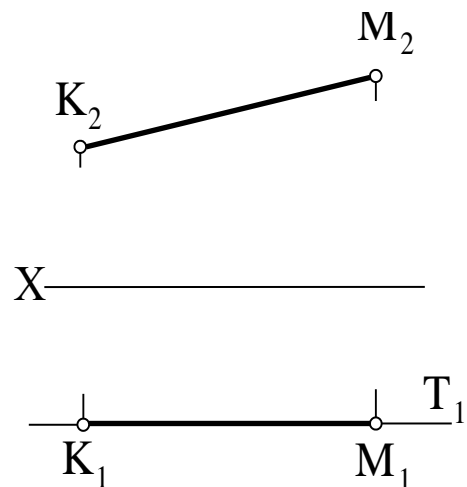
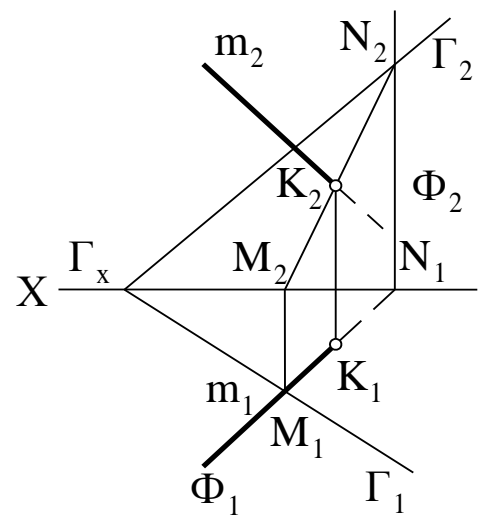
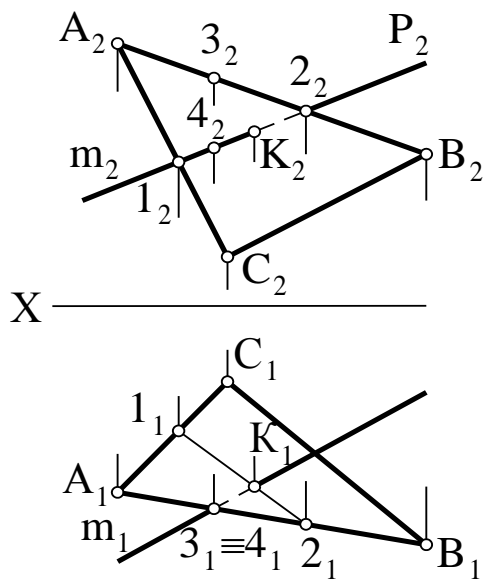


Рис. 4.12



4.5. Пересечение прямой с плоскостью общего положения.

Рассмотрим порядок определения точки пересечения прямой p с плоскостью, заданной треугольником ABC (рис. 4.13) и заданный следами Γ (Γ_1, Γ_2) (рис. 4.14).

Чтобы определить точку пересечения прямой m с плоскостью, заданной треугольником ABC необходимо выполнить следующее:

- провести через прямую m фронтально-проецирующую плоскость P (P_2);
- определить линию пересечения плоскости P и треугольника ABC $1, 2$ ($1_2 2_2$ и $1_1 2_1$);
- определить точку пересечения прямой m (m_1, m_2) с треугольником ABC . Эта точка находится на линии пересечения двух плоскостей P и треугольника ABC $1, 2$ ($1_1 2_1$ и $1_2 2_2$). Сначала определяем горизонтальную проекцию K_1 , а затем фронтальную – K_2 . В заключение необходимо определить видимость прямой m , считая треугольник ABC непрозрачным. Для этого рассмотрим конкурирующие точки $3, 4$, лежащие на одном перпендикуляре к Π_1 . Так как точка 3_2 , принадлежащая $A_2 B_2$ расположена выше точки 4_2 , принадлежащей прямой m_2 , то на Π_1 проекция прямой m (m_1) до точки пересечения K_1 в пределах треугольника будет невидимой. Аналогично определяется видимость прямой m и на Π_2 .

Рис. 4.13

Рис. 4.14

При определении точки пересечения прямой m с плоскостью, заданной следами P_2 и P_1 , необходимо также прямую m заключить в горизонтально-проецирующую плоскость Φ (Φ_2 и Φ_1) и найти их линию пересечения MN (M_2N_2 и M_1N_1). Фронтальная проекция точки пересечения прямой K_2 будет находится на фронтальной проекции линии пересечения M_2N_2 , горизонтальная проекция K_1 – находится при помощи линии связи.

4.6. Взаимно параллельные плоскости

Две плоскости в пространстве могут занимать два различных положения: параллельны между собой или пересекаться.

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Рассмотрим параллельность плоскостей на примере. Пусть требуется через точку K (K_1, K_2) построить плоскость $(a \cap b)$ ($a_1 \cap b_1$ и $a_2 \cap b_2$) параллельную плоскости, заданной треугольником DEF ($D_1E_1F_1$ и $D_2E_2F_2$) (рис. 4.15).

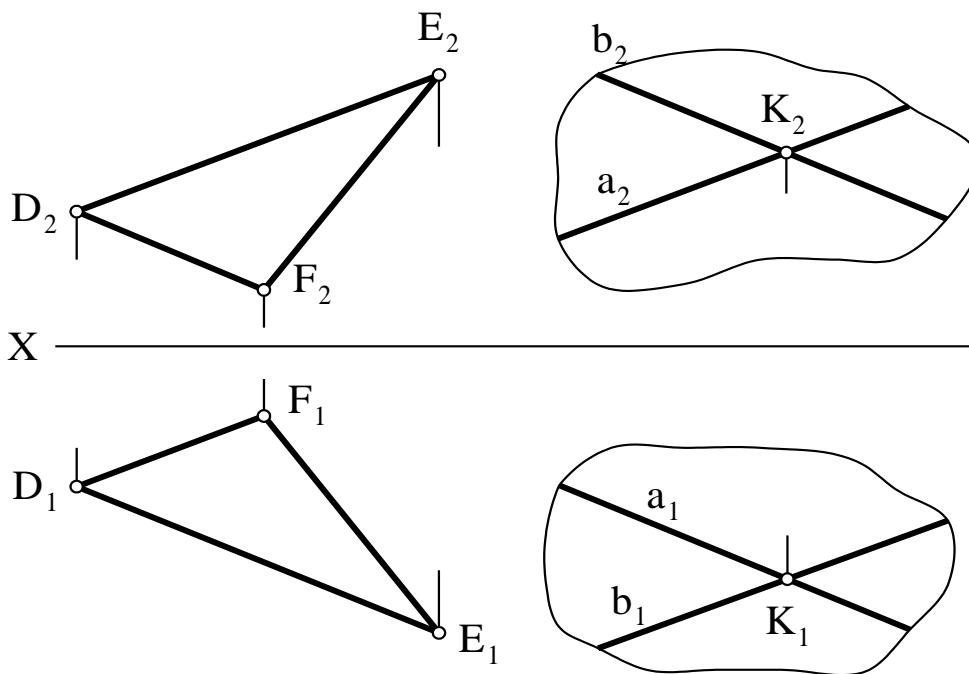


Рис. 4.15

Через точку K проводим прямые $a \parallel DE$ и $b \parallel DF$. Это значит, что горизонтальная проекция a , должна быть параллельна D_1E_1 , а фронтальная проекция a_2 должна быть параллельна D_2E_2 . Что же касается прямой b , то горизонтальная проекция $b_1 \parallel D_1F_1$, а $b_2 \parallel D_2F_2$. Построенная плоскость ($a \cap b$) параллельна плоскости (DEF) так как пересекающиеся прямые a и b соответственно параллельны двум пересекающимся сторонам DE и DF треугольника DEF .

Если плоскости заданы следами, то признаком параллельности данных плоскостей является параллельность одноименных следов P_1 и Γ_1 , P_2 и Γ_2 (рис. 4.16 а и б).

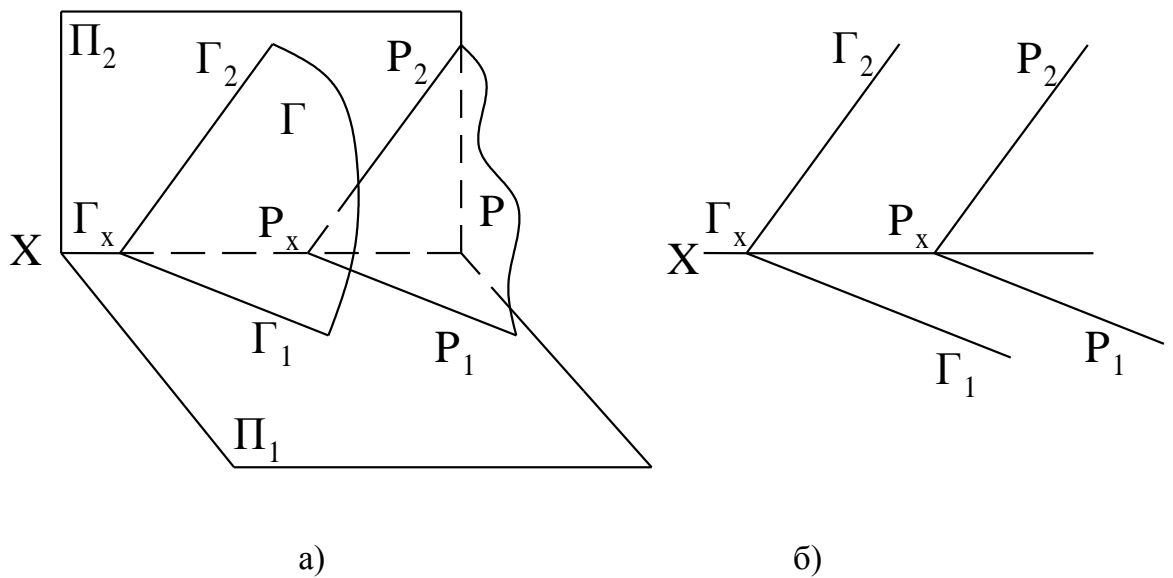


Рис. 4.16

Рассмотрим пример построения параллельной плоскости, проходящей через заданную точку. Пусть требуется через точку K провести плоскость P (P_1, P_2), заданную следами и параллельно плоскости Γ (Γ_1, Γ_2) также заданной следами (рис. 4.17).

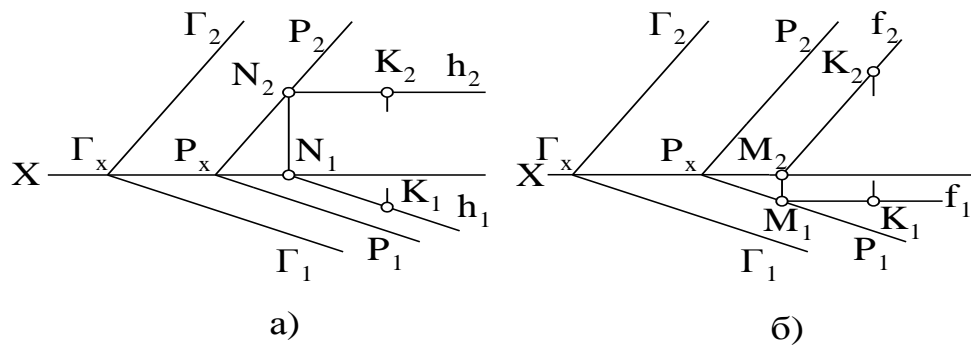


Рис. 4.17

Для решения задачи через точку K проводим в первом случае (рис. 4.17 а) горизонталь h (h_1, h_2), т.е. h_1 проводим параллельно следу плоскости Γ_1 , а h_2 - параллельно оси X и находим фронтальный след этой горизонтали N (N_1 и N_2). Через N_2 проводим фронтальный след плоскости P_2 параллельно Γ_2 , а через точку схода следов Γ_x проводим Γ_1 параллельно P_1 . Во втором случае (рис. 4.17 б), чтобы построить плоскость P параллельную плоскости Γ применена фронталь f (f_1, f_2). Ход решения виден из чертежа. Это относится ко всем видам плоскостей за исключением профильно-проецирующих плоскостей. Чтобы определить параллельны ли такие плоскости при параллельности одноименных следов, например, горизонтальных и фронтальных (рис. 4.18 а, б), необходимо построить профильные следы данных плоскостей. Если они параллельны, то и плоскости параллельны, а если пересекаются, то и плоскости – пересекаются (рис. 4.18). В данном случае профильные проекции следов пересекаются $P_3 \cap \Gamma_3$, следовательно плоскости также пересекаются. Проекциями линии пересечения KL служат отрезки K_1L_1, K_2L_2 и $K_3 \equiv L_3$.

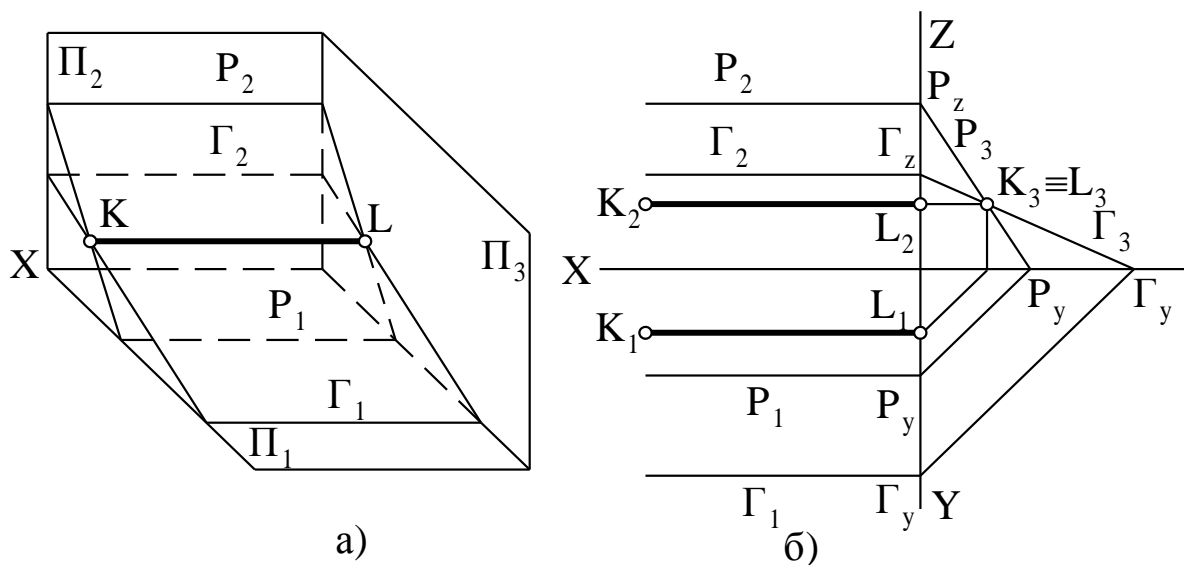


Рис. 4.18

Следует отметить, что плоскости также пересекаются, если хотя бы одна пара одноименных следов пересекается. На рис. 4.19 а показаны две горизонтально-проецирующие плоскости T (T_1 и T_2) и Φ (Φ_1 и Φ_2), у которых фронтальные следы Φ_2 и T_2 параллельны, а горизонтальные пересекаются. Такие плоскости пересекаются по линии AB . На рис. 4.19 б показана

фронтальная проекция линии пересечения A_2B_2 . Горизонтальная проекция этой линии проецируется в точку $A_1 \equiv B_1$, т.к. расположена перпендикулярно к плоскости проекций Π_1 .

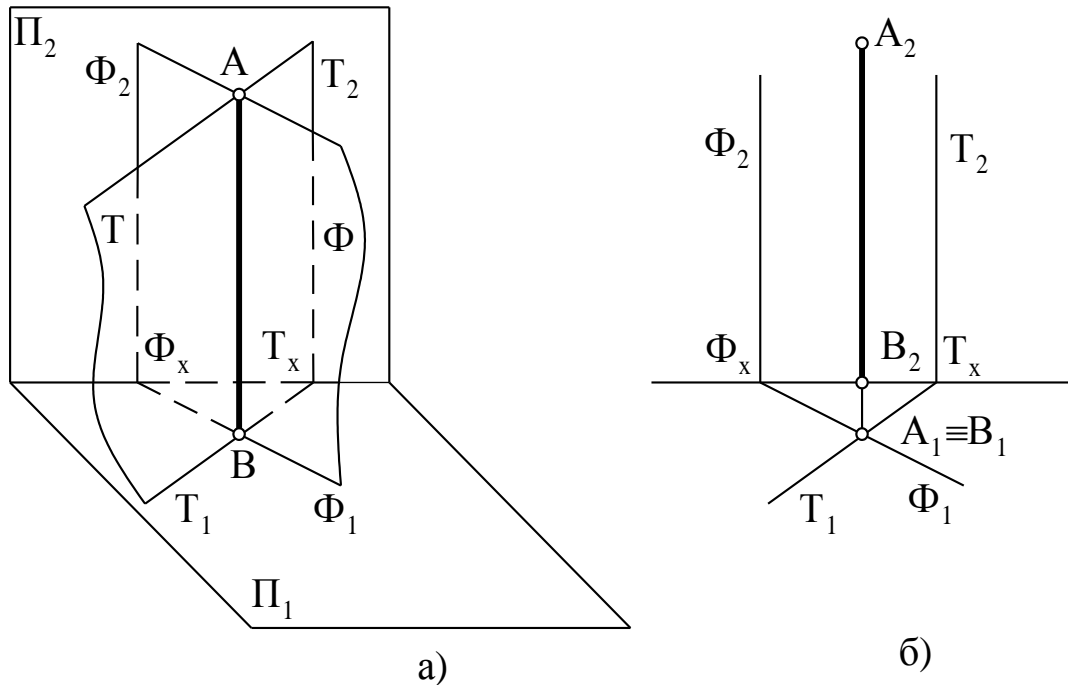


Рис. 4.19

4.7. Пересечение двух плоскостей общего положения.

Линия пересечения двух плоскостей – это прямая, принадлежащая как одной, так и другой плоскости. Но положение любой прямой в пространстве определяется положением ее двух точек. Поэтому для построения линии пересечения двух плоскостей надо найти две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям.

Рассмотрим построение линии пересечения двух плоскостей Γ и P , заданных следами (рис. 4.20 а – наглядное изображение, рис. 4.20 б - чертеж).

На наглядном изображении (рис. 4.20 а) показана линия пересечения этих плоскостей – MN . Она проходит через точку N , в которой пересекаются фронтальные следы Γ_2 и P_2 и точку M , в которой пересекаются горизонтальные следы Γ_1 P_1 .

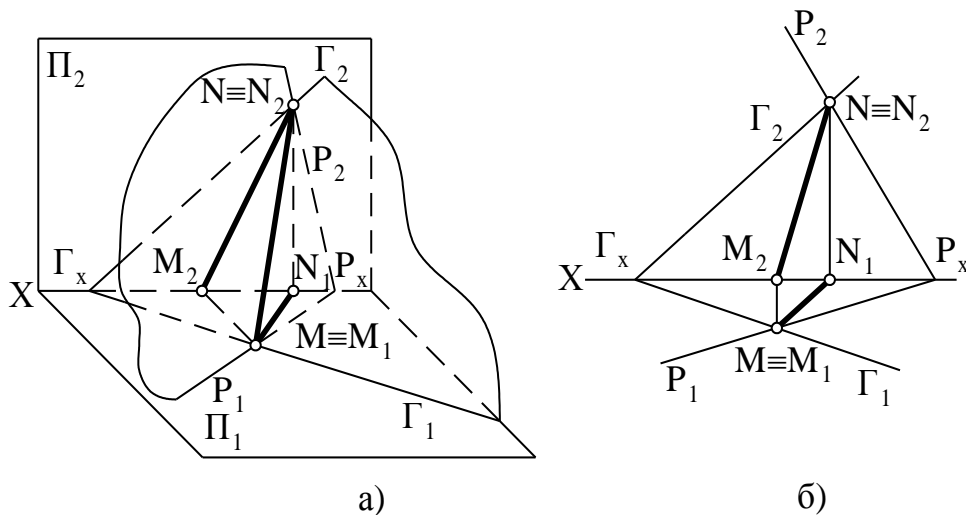


Рис. 4.20

Точка N является фронтальным следом линии пересечения плоскостей, а точка M – горизонтальным следом линии пересечения. Одновременно в этих точках находятся и соответствующие проекции этих следов N_2 и M_1 . Так как точка N_2 , находится во фронтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция N_1 будет находится на оси X . Аналогично и с точкой M (M_1 и M_2). Соединяя прямыми линиями одноименные проекции точек M_1 с N_1 и M_2 с N_2 , получим проекции прямой MN - линии пересечения плоскостей Γ и P (рис. 4.20 б).

При построении линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных непрозрачными треугольниками ABC и DEF (рис. 4.21), воспользуемся способом построения точек пересечения прямой линии с плоскостью общего положения, т.е. в качестве прямых линий примем две стороны DE и FE треугольника DEF , и определим точки пересечения их с плоскостью, заданной треугольником ABC .

Для нахождения точки пересечения стороны DE треугольника DEF проводим через DE фронтально-проецирующую плоскость Γ (показан след Γ_2). Эта плоскость пересекает треугольник ABC по линии 12 (1_22_2 , 1_12_1). На пересечении горизонтальной проекции стороны D_1E_1 и горизонтальной проекции линии пересечения 1_12_1 находится горизонтальная проекция точки пересечения K_1 стороны DE с треугольником ABC . Фронтальная проекция K_2 этой точки определена при помощи линии связи.

Точка пересечения стороны EF (E_1F_1 , E_2F_2) треугольника DEF с плоскостью, заданной треугольником ABC , определяется аналогичным образом. Для этого через EF приводим фронтально-проецирующую плоскость P (P_2).

Видимость треугольников определена при помощи конкурирующих точек. Чтобы определить видимость в точке 5,6 (пересечение проекций сторон D_1E_1 и A_1B_1), эти точки обозначим на фронтальных проекциях этих сторон D_2E_2 и A_2B_2 . Так как проекция точки 5_2 находится выше проекции точки 6_2 , то на Π_1 A_1B_1 будет видимой, а D_1E_1 от точки $5_1 \equiv 6_1$ до горизонтальной проекции точки пересечения K_1 с треугольником ABC будет невидимой. Аналогично определяется видимость сторон FE (F_1E_1) и AB (A_1B_1) на Π_1 .

Чтобы определить видимость сторон треугольника на Π_2 нужно рассмотреть конкурирующие точки относительно плоскости Π_1 .

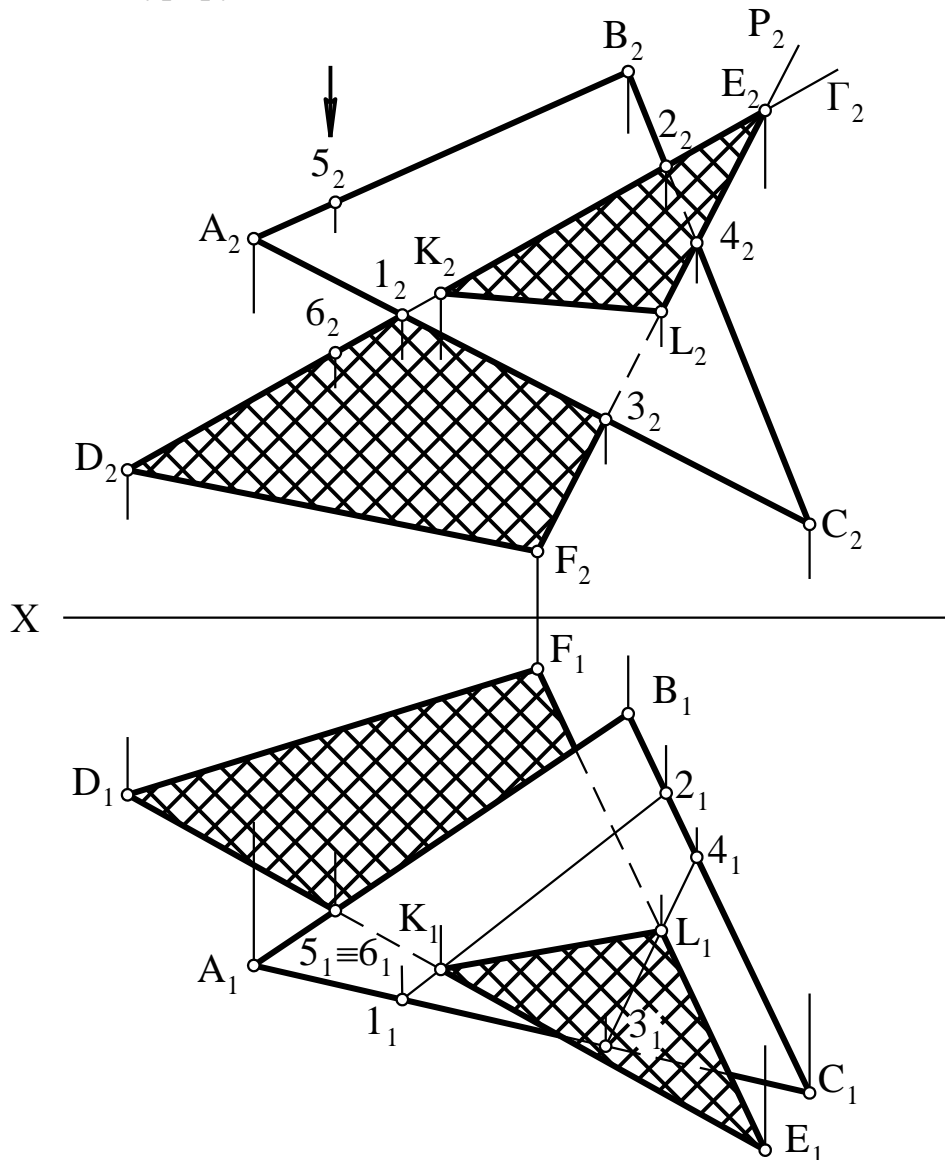


Рис. 4.21