

## СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

УДК 624.014

### РАБОТА ТОНКОСТЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СТЕСНЕННОМ КРУЧЕНИИ

канд. техн. наук, доц. **В.Н. КИСЕЛЕВ**,  
канд. техн. наук, доц. **Ю.В. ПОПКОВ**, **В.И. АТРАХИМОВИЧ**  
(Полоцкий государственный университет)

*Рассматривается метод расчёта тонкостенного призматического стержня открытого (замкнутого) профиля на кручение. Стержень произвольного поперечного сечения расчленяется на конечное число элементарных полос и анализируется работа каждой полосы на действие сдвигающих сил, приложенных по кромкам полос. Приводится зависимость между неизвестными сдвигающими силами и равнодействующими секториальных касательных напряжений, а также определяются другие параметры напряжённо-деформированного состояния тонкостенного стержня. Результаты исследования необходимы для построения строгого решения работы тонкостенных полос, нагруженных на своих кромках, и перехода к рассмотрению местных напряжений в стержнях.*

Проанализируем соображения, изложенные в [1 – 8], для случая, когда стержень испытывает кручение.

Рассмотрим призматический стержень произвольного поперечного сечения, испытывающий стесненное кручение по схеме, показанной на рисунке 1, а. Общий крутящий момент  $M_x$  в каждом поперечном сечении воспринимается частично в результате касательных напряжений чистого кручения:

$$\overline{M}_x = GJ_d \frac{d\theta}{dx}, \quad (1)$$

а остальная его часть

$$M_\omega = M_x - \overline{M}_x \quad (2)$$

вызывает секториальные касательные напряжения  $\tau_\omega$ , приводящие в каждой полосе с пронумерованными  $(i, j)$  кромками к равнодействующим  $K_{ij}$  (рис. 1, б). Очевидно, что если  $a_{ij}$  – расстояние от серединных плоскостей полос до центра изгиба (ц. и.) поперечного сечения, то

$$M_\omega = \sum K_i a_{ij}. \quad (3)$$

Отделяя произвольную полосу (например, полосу 1 – 2 на рисунке 1) от стержня, рассмотрим её работу на изгиб по схеме, представленной на рисунке 1, в: на кромке полосы в месте разреза действуют сдвигающие силы

$$q_{ij}(x) = \tau_{\omega_{ij}} \cdot 2t_{ij} = \frac{M_\omega}{J_\omega} S_{\omega_{ij}}, \quad (4)$$

где  $J_\omega$  – секториальный момент инерции стержня;  $S_{\omega_{ij}}$  – секториальный статический момент отсеченной полосы (первые индексы указывают кромку разреза).

Касательные секториальные напряжения в полосе

$$\tau_\omega = \frac{M_\omega}{J_\omega} S_{\omega_{ij}}^{omc}, \quad (5)$$

поэтому их равнодействующая

$$K_{ij}(x) = 2 \cdot t_{ij} \frac{M_\omega}{J_\omega} \int_j^i S_\omega^{omc} ds, \quad (6)$$

где пределы интегрирования указывают лишь его направление.

Между сдвигающими силами  $q_{ij}(x)$  и равнодействующими  $K_{ij}(x)$  секториальных касательных напряжений в полосах нетрудно установить соответствие в форме

$$K_{ij}(x) = q_{ij}(x) \frac{h_{ij}}{A_{ij}}, \tag{7}$$

где

$$A_{ij}(x) = \frac{S_{\omega_{ij}}}{\int_j S_{\omega}^{omc} ds} h_{ij}. \tag{8}$$

Так, например, для швеллера (рис. 1, з) имеем

$$S_{\omega_{12}} = 4t_n h_n h_c (a_z - h_n);$$

$$\int_j S_{\omega}^{omc} ds = \int_0^{2h_n} S_{\omega}^{omc} dz = 4t_n h_n^2 h_c \left( a_z - \frac{4}{3} h_n \right).$$

Следовательно

$$A_{12} = \frac{3(h_n - a_z)}{4h_n - 3a_z}, \tag{9}$$

где  $a_z$  – расстояние от срединной плоскости стенки до центра изгиба.

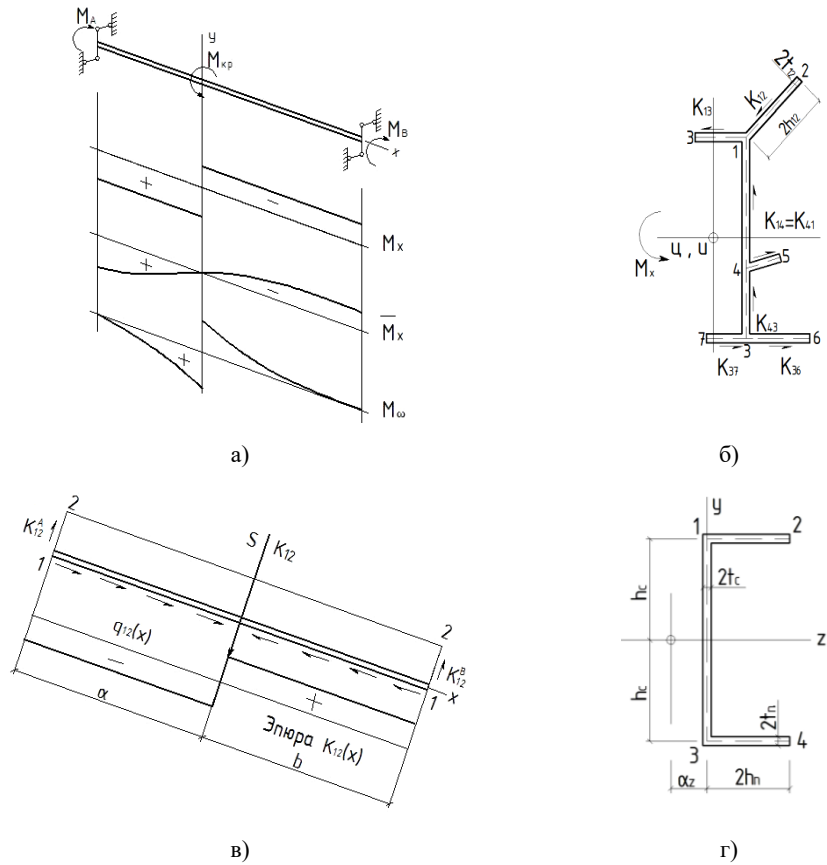


Рис. 1. Тонкостенный металлический стержень произвольного поперечного сечения

Для двутавра, который представляет собой, можно сказать, вырожденный швеллер, имеем  $a_z = 0$  и  $A = 3/4$ .

Теперь нетрудно показать, что нормальное напряжение в отдельной полосе

$$\sigma_x = \frac{1}{F} \int_a^x [q_{ij}(x) - q_{ji}(x)] dx - \frac{(s - h_{ij})}{J_{ij}} \left\{ h_{ij} \int_{-a}^x [q_{ij}(x) + q_{ji}(x)] dx + \int_{-a}^x K_{ij}(x) dx \right\}, \quad (10)$$

а также касательное напряжение  $\tau_{xs}$ , получаемое из (10) по формуле (11), представляющее собой не что иное как секториальные напряжения:

$$\tau_{xs} = \frac{Q_s \cdot S^{omc}}{J \cdot \delta} - \int_{s_j}^s \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} ds - \int_{s_j}^s \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} ds. \quad (11)$$

Например, для швеллера (см. рис. 1, з) при его загрузке по схеме, представленной на рисунке 1, а, будем иметь в верхнем поясе

$$\sigma_x = \frac{i}{F} \int_{-a}^x q_{12}(x) dx \frac{(z - h_n)}{J_n} \left[ h_n \int_{-a}^x q_{12}(x) dx + \int_{-a}^x K_{12}(x) dx \right],$$

где  $F_n$  и  $J_n$  – площадь и момент инерции (в своей плоскости) пояса соответственно.

На основании формул (4) и (7) с учётом того, что изгибно-крутящий момент

$$M_\omega = \frac{dB_\omega}{dx},$$

где  $B_\omega$  – бимомент, найдем

$$\sigma_x = \frac{B_\omega}{J_\omega} \left[ \frac{1}{F_n} + \frac{(h_n - z)}{J_n} \left( 1 - \frac{1}{A_{12}} \right) \right] \cdot S_{\omega 12}.$$

Учитывая теперь, что  $J_n = 4/(F_n h_n^2)$ ,  $S_{\omega 12} = F_n h_c (a_z - h_n)$  и что в пределах пояса секториальная площадь  $\omega = h_c (a_c - z)$ , получим окончательно

$$\sigma_x = \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega.$$

Из выражения (11) найдем для пояса

$$\tau_{xz} = - \int_{2h_n}^0 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = \frac{M_\omega S_\omega^{omc}}{2J_\omega t_n}.$$

В заключение, не развивая далее затронутых здесь положений, подведем итоги:

1) выражение (7) и все сопутствующие ему выкладки могут быть выполнены без привлечения специфических для теории В.З. Власова [2] понятий (бимомент и его производная, секториальные характеристики). С этих позиций можно построить теорию тонкостенных призматических стержней открытого профиля, которая основывается на представлениях обычной теории сопротивления материалов с привлечением гипотезы игнорирования жесткостей полос стержня на изгиб их из своих плоскостей и гипотезы плоских сечений в пределах каждой отдельной полосы. В приводимом случае эти гипотезы равноценны по результату двум гипотезам В.З. Власова, в то же время они, возможно, более привычны для обычного инженерного мышления;

2) напряжения в тонкостенных стержнях открытого профиля, в том числе и при стесненном кручении, можно рассчитывать расчленением их на отдельные полосы, которые рассматриваются под воздействием внутренних перерезывающих сил  $K(x)$  и усилий взаимодействия  $q(x)$  на кромках в местах разреза, причем между этими усилиями существует зависимость (7). При этом нет необходимости записы-

вать напряжения через секториальные характеристики. Это можно сделать обычными методами сопротивления материалов, рассматривая каждую полосу как самостоятельный брус;

3) полученные изложенным выше способом результаты совпадут с результатами теории тонкостенных стержней В.З. Власова, а при дополнительном учете местного воздействия усилий взаимодействия  $q(x)$  этот подход даст сразу напряжения, описываемые двумя последними членами выражений для  $\tau_x$  и  $\tau_{xs}$  в формулах (12):

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega + \sigma_x^I;$$

$$\sigma_S = \sigma_S^I; \quad (12)$$

$$\tau_{xs} = \frac{Q_y S_z^{omc}}{J_z \delta} + \frac{Q_z S_y^{omc}}{J_y \delta} + \frac{M_\omega S_\omega^y}{J_\omega \delta} + \tau_{xs}^I,$$

для  $\sigma_s$  такой подход даст его полное значение, т.е. в этом случае формулы (13):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z + \sigma_x^I; \\ \tau_{xs} &= \frac{Q_y S_z^{omc}}{J_z \delta} + \frac{Q_z S_y^{omc}}{J_y \delta} + \tau_{xs}^I. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, в рассмотренном методе расчета возможны два подхода:

- 1) принятие в качестве исходной (элементарной) теории сопротивления материалов и оперирование с формулами (13) при учете (11);
- 2) принятие в качестве исходной теории В.З. Власова и использование формул (12).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев, В.Н. Расчет тонкостенных металлических стержней / В.Н. Киселев, Ю.В. Попков, В.А. Фетисов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2010. – № 12. – С. 57 – 63.
2. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М.: Стройиздат, 1940. – 278 с.
3. Папкович, П.Ф. Теория упругости / П.Ф. Папкович. – М.-Л., 1939. – 376 с.
4. Броуде, Б.М. Распределение сосредоточенного давления в стальных балках / Б.М. Броуде. – М.-Л., 1950. – 583 с.
5. Горев, В.В. Металлические конструкции: в 3 т. / В.В. Горев. – М.: Высш. шк., 1999. – Т. 2. – 528 с.
6. Металлические конструкции: справ. проектировщика: в 3 т. / под ред. В.В. Кузнецова. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – Т. 2. – 576 с.
7. Нормы проектирования. Стальные конструкции: СНиП II-23-81\*. – М.: Госстрой СССР, 1982. – 96 с.
8. Еврокод 3. Проектирование стальных конструкций. Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий: ТКП EN 1993-1-1: 2010. – Минск: Минскстройархитектура Респ. Беларусь, 2010. – 93 с.

Поступила 23.05.2011

#### WORK OF THIN-WALLED METAL RODS

V. KISILEV, Y. POPKOV, V. ATRAKHIMOVICH

*The analysis of existing methods of calculation of thin-walled rods of metal structures is made. Analysis indicates that the calculation is based on meeting the conditions of the strength of the efforts, or even the strain, but obtained through, efforts of the methods of materials do not always provide the necessary reliability. The problem of finding the stresses in thin-walled rods is reduced to the problem of computing the plane stress state of each of its constituent bands. Taking into account the efforts of the interaction determined by the conditions of the continuity of deformation in the ground sections.*