9. МНОГОГРАННИКИ

9.1. Способы задания многогранников и построение их проекций
9.2. Пересечение плоскости и прямой с многогранниками
9.3. Взаимное пересечение многогранников

9.1. Способы задания многогранников и построение их проекций

Одним из видов пространственных форм являются многогранники. Многогранником называется совокупность таких плоских многоугольников, у которых каждая сторона одного является одновременно стороной другого. Вершины и стороны многоугольников являются вершинами и ребрами многогранников, а сами многоугольники – гранями. Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые расположены по одну сторону плоскости любой из его граней.

Наибольший практический интерес представляют призмы и пирамиды. Призмой называется многогранник, две грани которого представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами – основаниями. Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные между собой, называют боковыми ребрами. Пирамидой называется многогранник, одна грань которого – многоугольник со сколь угодно большим числом сторон (не менее трех), а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной.

Форма и положение многогранника в пространстве могут быть определены заданием его ребер, основанием и вершиной, если это пирамида, основанием и высотой, если это призма.

Выбирая положение пирамиды и призмы для ее изображения, целесообразно располагать их основания параллельно плоскости проекций. Примеры даны на рис. 9.1; 9.2; 9.3. Здесь в системе плоскостей проекций $П_1$, $П_2$ изображены трехгранная пирамида, прямая и наклонная призмы.

Как видно, пирамида задается на эпюре проекциями ее основания и вершиной, а призма – проекциями основания и ребер.

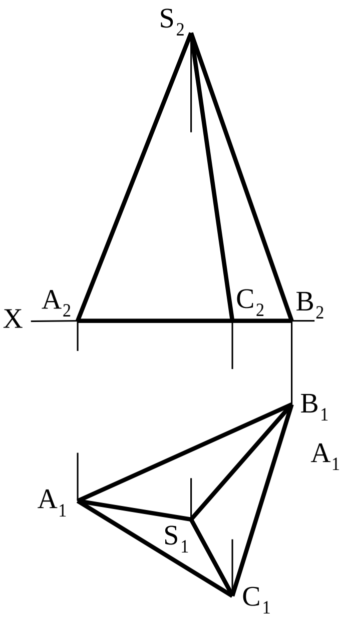


Рис 9.1

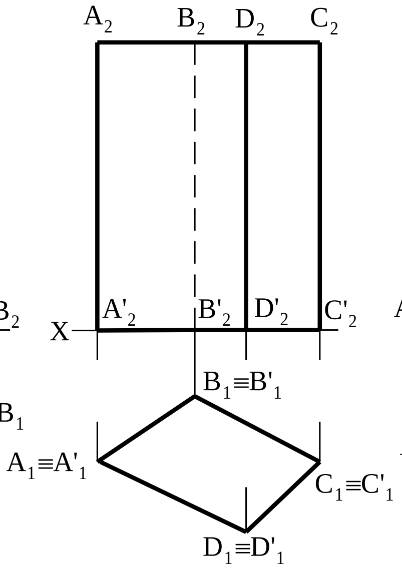


Рис 9.2

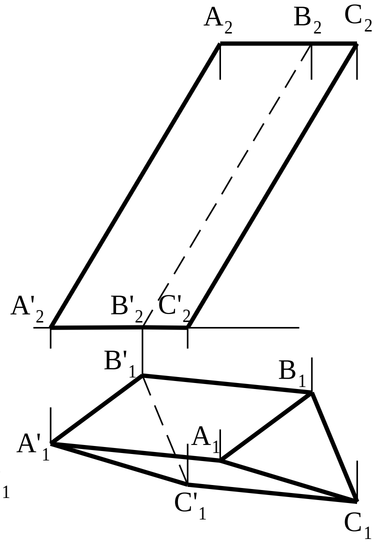


Рис 9.3

9.2. Пересечение плоскости и прямой с многогранниками

При пересечении многогранника плоскостью в общем случае получается плоский многоугольник ABCD (рис.9.4). Этот многоугольник можно построить или по точкам пересечения с плоскостью ребер многогранника, или по линиям пересечения граней многогранника с плоскостью. Следовательно, задача сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линий пересечения плоскостей. Первый способ на практике применяется чаще второго.

Плоскую фигуру, полученную от пересечения многогранника плоскостью, называют сечением.

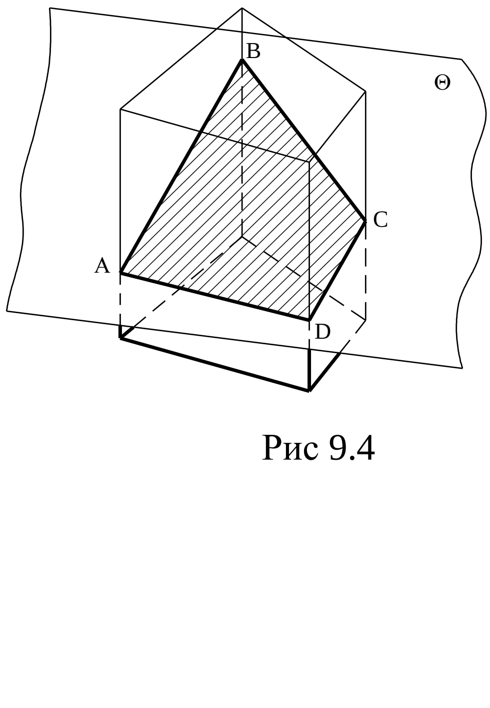


Рис 9.4

Рассмотрим несколько примеров.

На рис.9.5 построены проекции фигуры сечения наклонной трехгранной призмы фронтально-проецирующей плоскостью Ф ($Ф_2$).

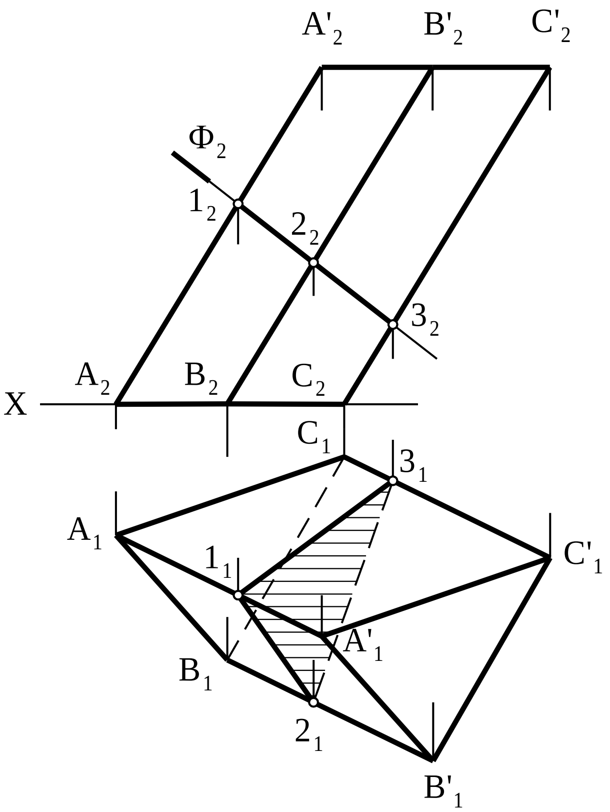


Рис 9.5

Фронтальными проекциями точек встречи ребер призмы с секущей плоскостью (фронтальными проекциями вершин фигуры сечения) являются точки 1_2 2_2 3_2. Их горизонтальные проекции 1_1 2_1 3_1 определены при помощи линий связи. Фронтальной проекцией фигуры сечения в данном примере является отрезок 1_2 2_2 3_2,совпадающий с фронтальным следом плоскости Ф, а горизонтальной - треугольник 1_1 2_1 3_1.

На рис. 9.6 построены проекции фигуры сечения четырехгранной пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью. Здесь, как и в предыдущем примере, фронтальная проекция сечения 1_2 2_2 3_2 4_2 изображается отрезком прямой, совпадающим с фронтальным следом плоскости Г. Горизонтальная проекция сечения 1_1 2_1 3_1 4_1 находится по линиям связи.

Если многогранник пересекает плоскость общего положения, то для определения линии пересечения необходимо воспользоваться некоторыми дополнительными вспомогательными построениями. Эти построения возможно выполнять двумя способами:

а) метод ребер – нахождение точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, т.е. нахождение вершин многогранника, получающегося в сечении;

б) метод граней – нахождение линий пересечения граней многогранника с секущей плоскостью, т.е. нахождение сторон сечения.

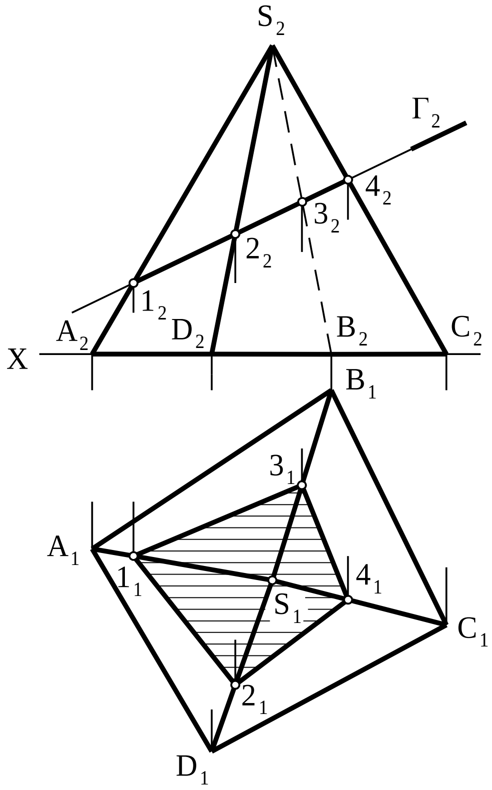


Рис 9.6

Так, на рис. 9.7. линия пересечения призмы ABC с плоскостью общего положения Ф построена с использованием метода ребер.

Горизонтальный след $Ф_1$ проходит по нижнему основанию, следовательно, он пересекает нижнее основание по прямой $1_1\ 2_1$.

Ребро A находится перед плоскостью и не пересекается с ней. Через ребра призмы B и C проводим фронтальные плоскости Г и Θ и строим линии пересечения вспомогательных плоскостей с плоскостью Ф. Фронтальные проекции ребер будут пересекаться с проекциями линий пересечения плоскостей в точках встречи их с плоскостью Ф.

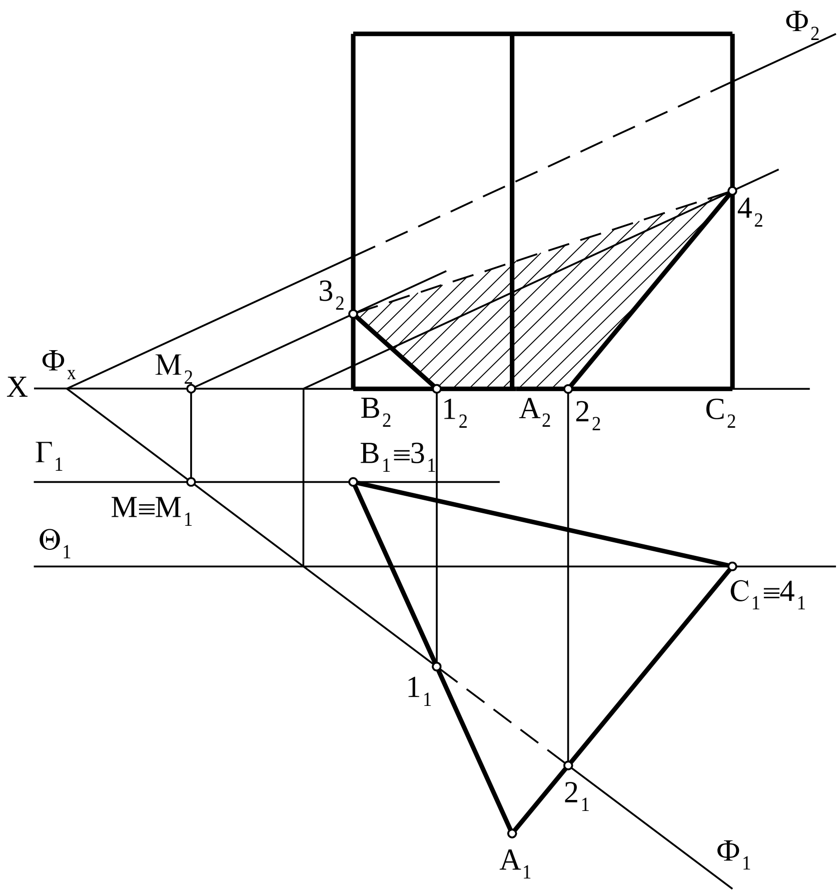
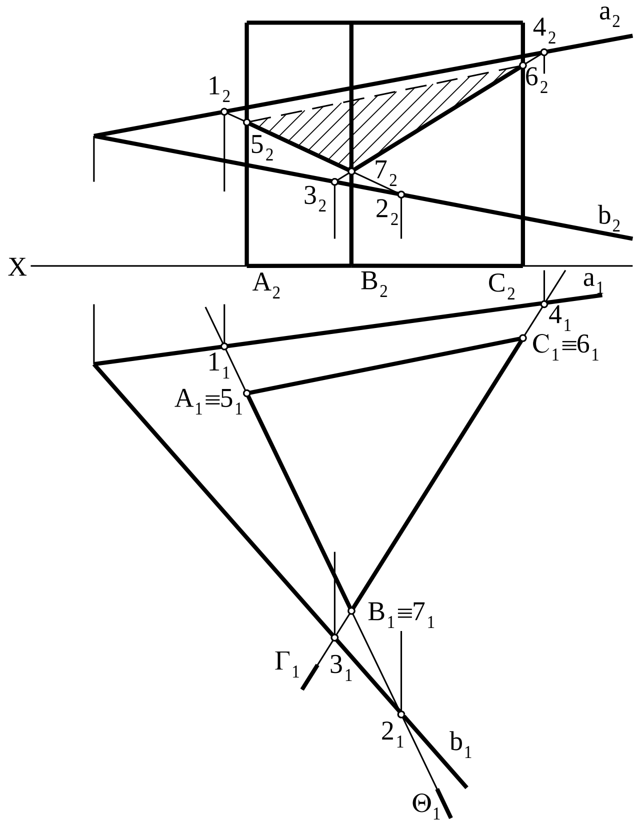


Рис 9.7

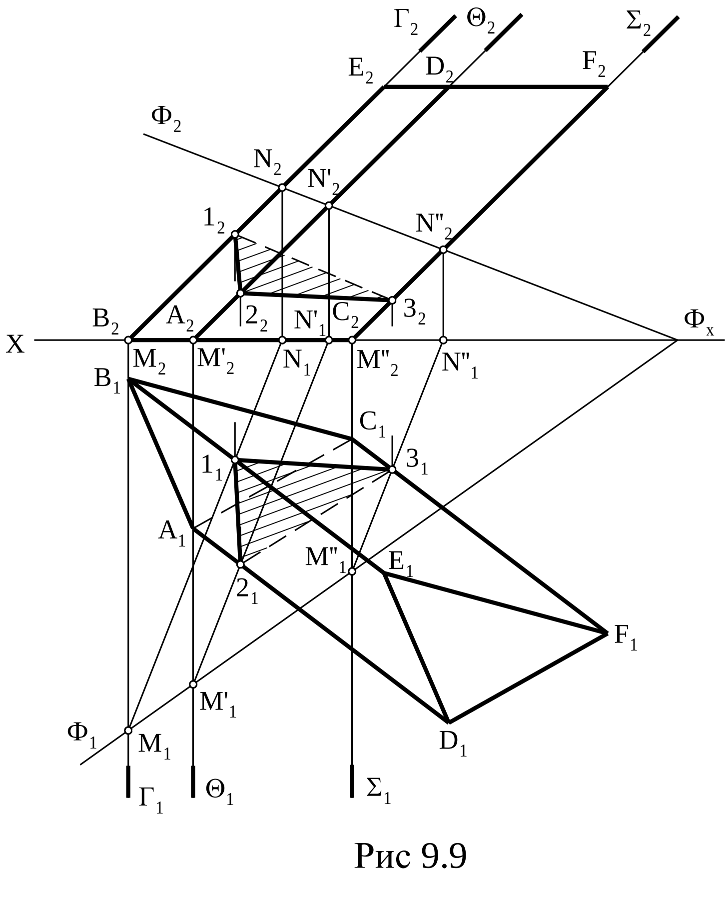
Использование метода граней показано на рис. 9.8, когда необходимо построить сечение призмы АВС плоскостью общего положения Ф (a∩b). Заключаем грани АВ и ВС в горизонтально-проецирующие плоскости Г, Θ и строим линии пересечения данных плоскостей с плоскостью Ф. В пределах граней АВ и ВС эти линии являются сторонами многоугольника, получаемые при пересечении плоскостью Ф призмы АВС.

На рис.9.9. построены проекции сечений плоскостью Ф наклонной призмы. Для нахождения проекций сечения заключаем поочередно ребра призмы во фронтально-проецирующие плоскости Г, Θ, Σ и находим точки встречи ребер с плоскостью Ф. Полученные точки 1, 2, 3 соединяем ломаной линией и определяем видимость.



a2
42
12
62
52
72
32
22
b2
X
A2
B2
C2
a1
41
11
C1≡61
A1≡51
B1≡71
Г1
31
21
b1
Θ1

Рис 9.8



Г2
Θ2
Σ2
E2
D2
F2
Φ2
N2
N'2
12
N"2
22
C2
32
B2
A2
N'1
Φx
X
M2
M'2
N1
M"2
N"1
B1
C1
11
31
A1
M"1
E1
21
F1
M'1
Φ1
M1
D1
Г1
Θ1
Σ1

Рис 9.9

На рис. 9.10 построены проекции сечения плоскостью Ф (ΔАВС) пирамиды.

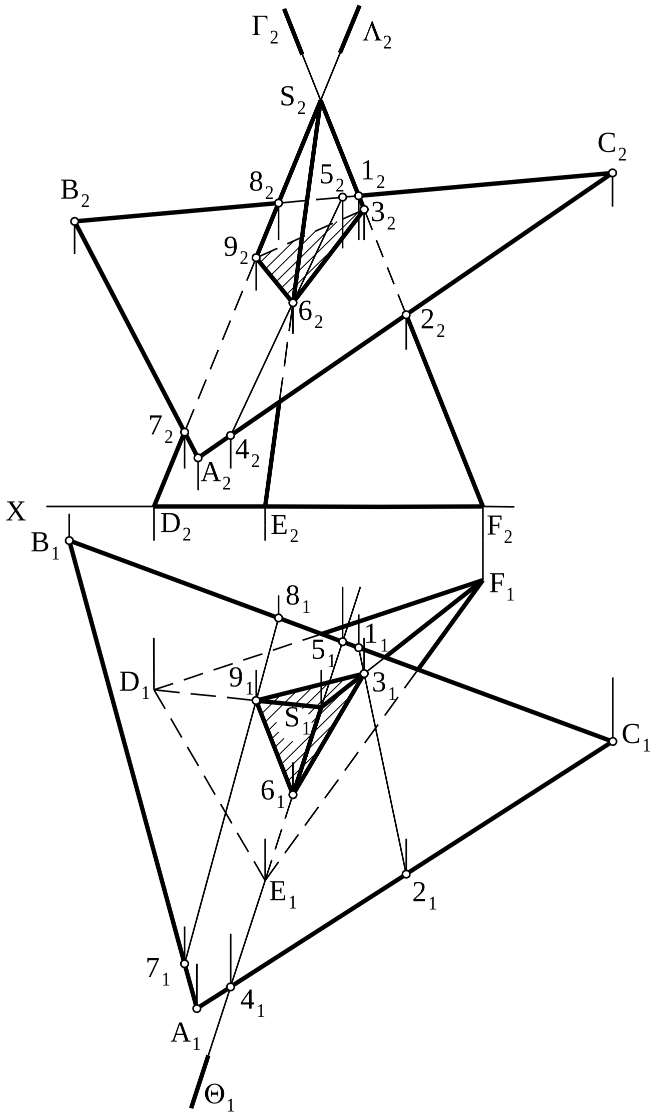


Рис 9.10

Задача решена нахождением точек встречи (точек 3, 6, 9) каждого ребра пирамиды с секущей плоскостью. Чтобы найти точку (3) встречи ребра FS с секущей плоскостью (ΔАВС), через ребро необходимо провести вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Г, построить линию пересечения 1, 2 с секущей плоскостью Ф (ΔАВС) и в пересечении горизонтальной проекции линии пересечения с горизонтальной проекцией ребра FS отметить горизонтальную проекцию искомой точки 3. Фронтальная проекция точки 3 построена при помощи линии связи. Точка 9 построена аналогично. Для нахождения точки встречи ребра ES с плоскостью Ф (ΔABC), ребро заключаем во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Θ. Соединив точки 3, 6, 9 находим искомое сечение.

Прямая линия может пересекать поверхность многогранника в двух точках при условии, что многогранник выпуклый. Решение этой задачи основано на схеме определения точки пересечения прямой с плоскостью и распадается на три этапа:

1) через заданную прямую проводится вспомогательная плоскость;
2) строится проекция фигуры сечения многогранника;
3) определяются точки пересечения прямой с контуром сечения.

На рис. 9.11 построены точки $M(M_1\ M_2)$ и N $(N_1\ N_2)$пересечения прямой l с поверхностью пирамиды SABC.

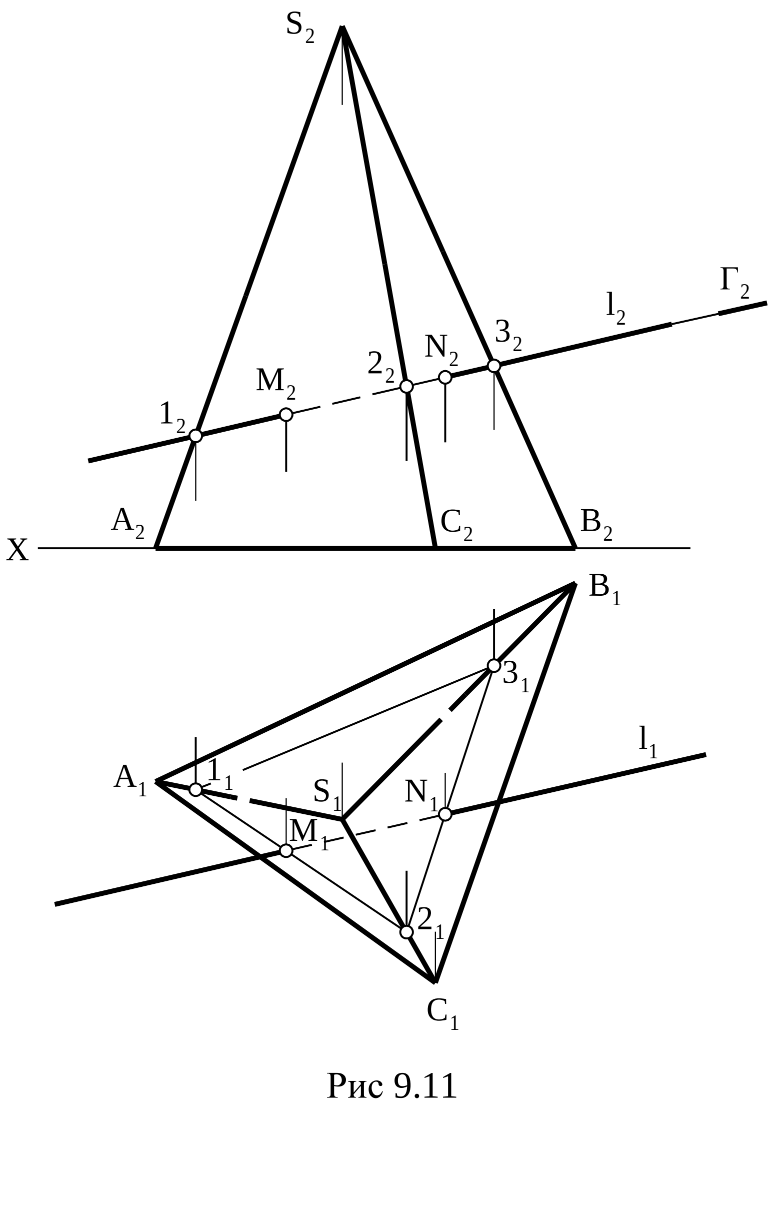


Рис 9.11

На рис. 9.12 построены точки R (R_1 R_2) и S (S_1 S_2) пересечения прямой k с поверхностью наклонной призмы.

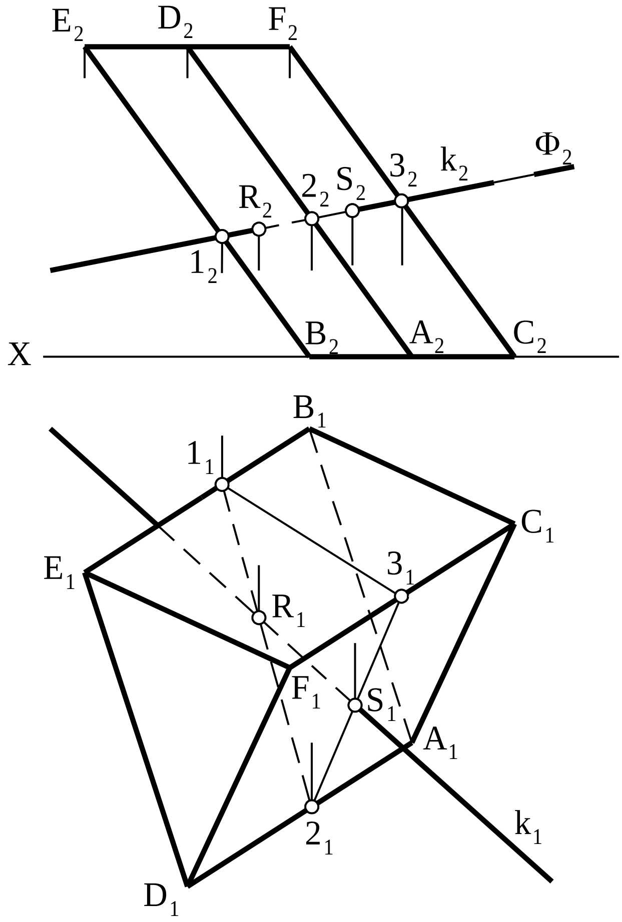


Рис 9.12

9.3. Взаимное пересечение многогранников

Многогранные поверхности пересекаются друг с другом по замкнутым ломаным линиям, для построения которых сначала находим точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого, а затем - ребер второго с гранями первого. Соединяя в определенной последовательности полученные точки, строим искомую ломаную, каждое звено которой представляет собой прямую пересечения двух граней – грани первого многогранника с гранью второго.

Итак, построение линии пересечения двух многогранников сводится к решению задачи на пересечение прямой линии с многогранником (или на взаимное пересечение двух плоскостей – граней многогранников).

На чертеже 9.13 приведен пример построения линии взаимного пересечения прямой четырехугольной призмы с пирамидой SABC.

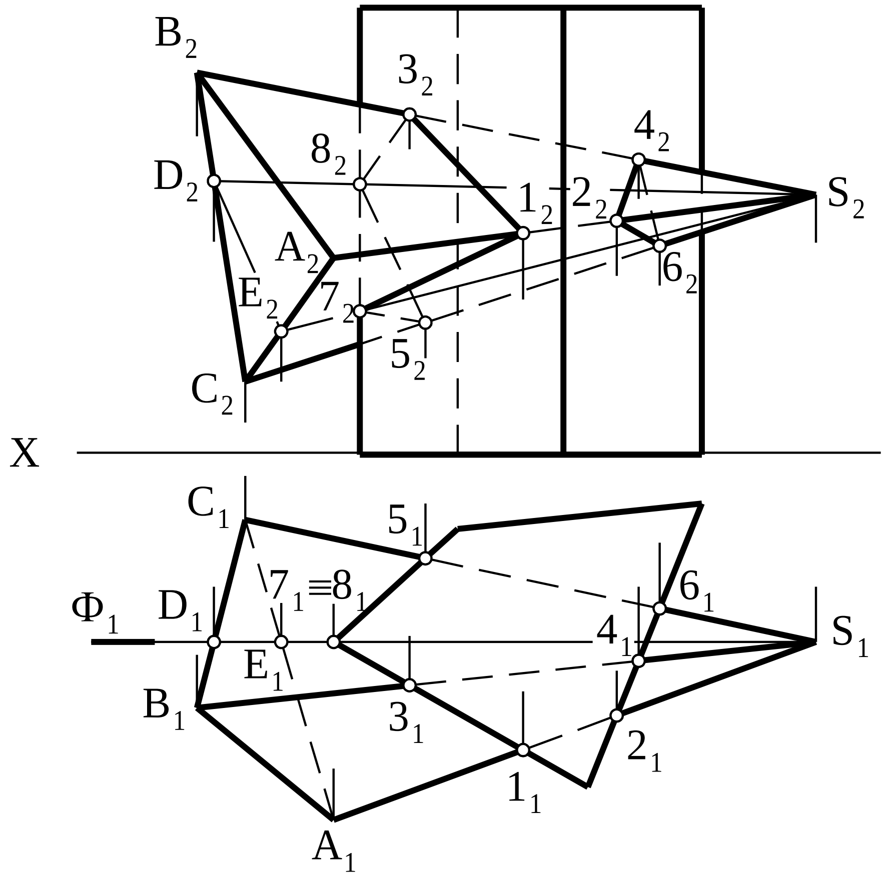


Рис 9.13

Основание призмы совмещено с плоскостью Π_1. Горизонтальные проекции вертикальных ребер преобразуются в точки. Грани боковой поверхности призмы представляют собой отсеки горизонтально-проецирующих плоскостей. Линия пересечения многогранников определяется по точкам пересечения ребер каждого из них с гранями другого многогранника. Так, ребро SA (S_1A_1, S_2A_2) пирамиды пересекает две вертикальные грани призмы: одну в точке 1 (1_1 1_2) и вторую – в точке 2 (2_1 2_2). Ребро SB (S_1B_1 S_2B_2) пирамиды пересекает две вертикальные грани призмы в точках 3 (3_1 3_2) и 4 (4_1 4_2): ребро SC (S_1C_1 S_2C_2) – в точках 5 (5_1 5_2) и 6 (6_1 6_2).

Из четырех вертикальных ребер призмы только одно пересекает пирамиду. Находим точки его пересечения с гранями пирамиды. Через это ребро и вершину S (S_1 S_2) пирамиды проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Ф. Она пересекает пирамиду по прямым

DS (D_1S_1, D_2S_2) и ES (E_1S_1, E_2S_2). Эти прямые пересекают ребро призмы в точках 7 (7_1 7_2) и 8 (8_1 8_2) – в точках пересечения ребра призмы с гранями пирамиды. Соединяя каждые пары таких точек одних и тех же граней отрезками прямых, получаем две линии пересечения многогранников. Одна из них представляет собой пространственный многоугольник 138571 ($1_13_18_15_17_11_1$, $1_23_28_25_27_21_2$), другая – треугольник 246 ($2_14_16_1$, $2_24_26_2$).

Видимыми являются только те из отрезков многоугольников пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников: невидимые отрезки обозначаем на эпюре штриховыми линиями.

Отрезки 24 (2_14_1, 2_24_2) и 26 (2_16_1, 2_26_2) линии пересечения 246 ($2_14_16_1$, $2_24_26_2$) видимы на фронтальной проекции. Они принадлежат видимым граням призмы и пирамиды. Отрезок 46 (4_16_1, 4_26_2) является невидимым на фронтальной проекции. Этот отрезок принадлежит видимой на этой проекции грани призмы и невидимой грани пирамиды. На фронтальной проекции видимы отрезки 13 (1_13_1, 1_23_2) и 17 (1_17_1, 1_27_2) второй линии пересечения, а отрезки 38 (3_18_1, 3_28_2), 85 (8_15_1, 8_25_2) и 75 (7_15_1, 7_25_2) этой линии - невидимы.