УДК 528.063

РЕШЕНИЕ МНОГОКРАТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАСЕЧКИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

канд. техн. наук Л.Ф. ЗУЕВА
(Брестский государственный технический университет);
А.В. СТРОК, С.Г. ШНИТКО
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается решение многократной линейной засечки на эллипсоиде методами слепого поиска, релаксации, градиентным методом спуска, Гаусса (метод линеаризованных итераций) и Ньютона. Современное развитие спутниковых измерений предполагает решать геодезические построения в геодезической системе координат без редуцирования их на плоскость. Использование методов нелинейного программирования позволяет решать геодезические построения, для которых нет замкнутых формул или для которых вывод этих формул затруднителен. Таким образом, использование описываемых в статье методов позволяет, во-первых, решать геодезические построения без привязки к какой-то конкретной системе плоских прямоугольных координат и, во-вторых, избежать сложных формул и алгоритмов, возникающих при решении геодезических задач на эллипсоиде. Как показали исследования, наилучшим для решения указанной задачи является метод релаксации, не требующий ввода предварительных координат определяемых пунктов.

Введение. На примере многократной линейной засечки рассмотрим порядок ее решения, используя различные методы нелинейного программирования. Многократная линейная засечка на эллипсоиде показана на рисунке 1.

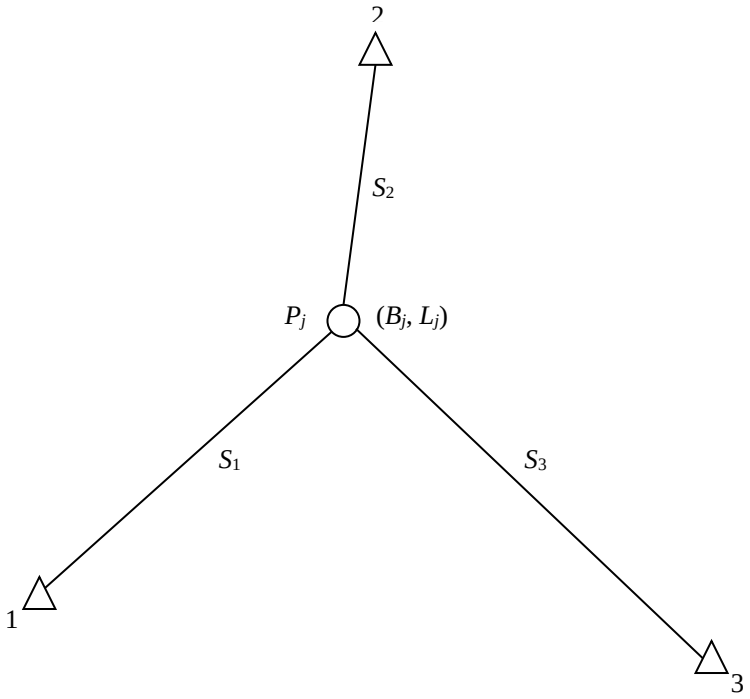

Рис. 1. Многократная линейная засечка

Полагая измерения равноточными, для решения засечки будем отыскивать минимум целевой функции

$$\Phi_j\left(B_j, L_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(S_i^{выч} - S_i^{изм}\right)^2, \qquad (1)$$

где B_j, L_j – координаты определяемого пункта в j-том приближении.

В методе слепого поиска используют регулярную сетку, помещая центральный узел сетки в точку с координатами, равными среднему арифметическому из наибольшего и наименьшего значений координат исходных пунктов.

Расстояние между узлами сетки примем 10″, а количество узлов 6 × 6 = 36.

Регулярная сетка показана на рисунке 2.

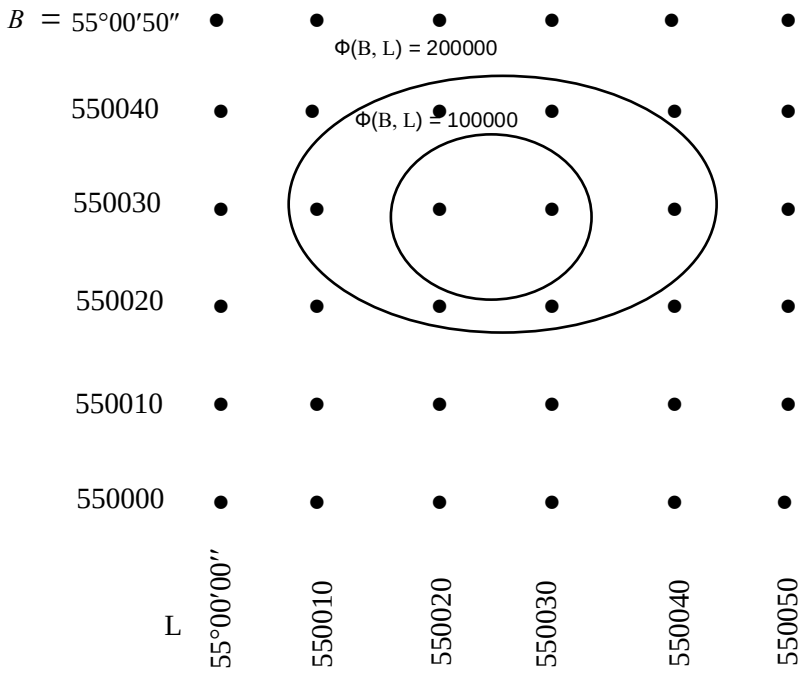

Рис. 2. Регулярная сетка

Для каждого узла сетки вычисляется значение целевой функции.

Методом слепого поиска получаем B_j = 55°00′30″; L_j = 55°00′30″; $\Phi_j\left(B_j, L_j\right)$ = 54926.

Применение метода релаксации

На рисунке 3 показаны четыре точки релаксации, в которых вычисляются значения целевой функции. В таблице 1 даны результаты вычислений (траектория минимизации) метода релаксации.

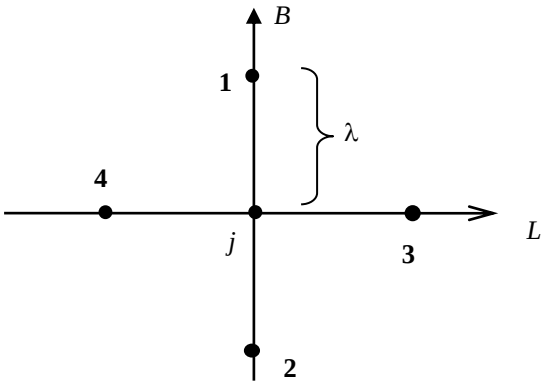

Рис. 3. Система координат и точки релаксации

Вычисления выполнялись до тех пор, пока шаг релаксации $\lambda_j \geq 1''$. С этой точностью будут найдены координаты определяемого пункта. На ЭВМ методом релаксации можно получить координаты с любой точностью.

Таблица 1

Траектория минимизации по методу релаксации

j	B_j	L_j	λ''_j	Φ_j	Значение Ф в точках релаксации (**1 – 4**)			
					1	**2**	**3**	**4**
					$B_j + \lambda_j$; L_j	$B_j - \lambda_j$; L_j	B_j; $L_j + \lambda_j$	B_j; $L_j - \lambda_j$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	550040	550010	10	235239	828185	138209	**131055**	390024
2	550040	550020	10	131055	689634	**69323**	71020	235239
3	550030	550020	10	69323	131055	448596	**54926**	138209
4	550030	550030	10	**54926**	71020	461222	86157	69323
5	550030	550030	5	54926	**3883**	211733	65732	55692
6	550035	550030	5	3883	71020	54926	**254**	17054
7	550035	550035	2	**254**	6965	12787	1032	678
8	550035	550035	1	**254**	1157	4164	502	306

Вычисление координат определяемого пункта градиентным методом спуска

В градиентном методе спуска итеративный процесс выполняется по следующим формулам:

$$B_{j+1} = B_j - \frac{\partial \Phi}{\partial B} \cdot \lambda_j, \qquad L_{j+1} = L_j - \frac{\partial \Phi}{\partial L} \cdot \lambda_j, \tag{2}$$

где

$$\lambda_j = \frac{\Phi\left(B_j, L_j\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial L}\right)^2}, \tag{3}$$

а приближенные значения частных производных вычисляют по формулам:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B} = \frac{\Phi\left(B_j + \delta, L_j\right) - \Phi\left(B_j, L_j\right)}{\delta} = \frac{\Phi_{\delta,0} - \Phi_{0,0}}{\delta}; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial L} = \frac{\Phi\left(B_j, L_j + \delta\right) - \Phi\left(B_j, L_j\right)}{\delta} = \frac{\Phi_{0,\delta} - \Phi_{0,0}}{\delta}, \tag{4}$$

где малый шаг δ можно вычислить из выражения

$$\delta'' = \frac{\sqrt{B''}}{10^{\frac{n}{3}}} \tag{5}$$

в зависимости от n – числа разрядов в сетке ЭВМ. В нашем случае $B = 55°00'00'' = B'' = 198000''$, $n = 8$, поэтому $\delta = 1''$. Величина δ будет во всех вариантах одинаковой.

Во всех вариантах предлагаем итерации начать с точки (табл. 2): $B_1 = 55°00'50''$; $L_1 = 55°00'00''$. Поскольку вычисления выполняются вручную, то $\Delta B = -\frac{\partial \Phi}{\partial B} \cdot \lambda_j$ и $\Delta L = -\frac{\partial \Phi}{\partial L} \cdot \lambda_j$, входящие в формулу (2), предлагаем вычислять до целых долей секунды.

Таблица 2

Траектория минимизации градиентным методом спуска

j	B_j	L_j	$\Phi(B_j, L_j)$	$\partial\Phi/\partial B$	$\partial\Phi/\partial L$	λ_j	$\Delta B''$	$\Delta L''$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	550050	550000	1012967	90722	– 20686	0,000117	– 11	+ 2
2	550039	550002	320932	33866	– 16513	0,000226	– 8	+ 4
3	550031	550006	171480	– 5838	– 12070	0,000954	+ 5	+ 12
4	550036	550018	63438	13869	– 7171	0,000260	– 3	+ 7
5	550033	550025	18914	– 3249	– 2531	0,000112	+ 3	+ 3
6	550036	550028	12566	9458	– 2716	0,000130	– 1	+ 4
7	550035	550032	1388	2574	– 709	0,000015	–	–

Вычисление уравненных координат пункта по методу Гаусса (метод линеаризованных итераций)

Здесь так же, как и в методе Ньютона, предусматривается итеративный процесс:

$$B_j = B_{j-1} + \Delta B; \quad L_j = L_{j-1} + \Delta L;$$
$$\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} = -R^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

где R – матрица коэффициентов нормальных уравнений; $R = \begin{pmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{pmatrix}$; $\mathbf{B}$ – вектор свободных членов нормальных уравнений; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [al] \\ [bl] \end{pmatrix}$.

Коэффициенты *a, b* и свободные члены параметрических уравнений поправок *l* вычислим и запишем в таблице 3. При этом $l_i = S_i^{выч.} - S_i^{изм.}$; i – номер исходного пункта; а B_0, L_0 – приближенные координаты, такие же, как и в методе Ньютона (B_0, L_0 взять из ответа до целой секунды). В нашем случае $B_0 = L_0 =$ 55°00′35″.

Найдем $S_i^{выч}$ (м) в файле *K*, создаваемом программой *uroksfeg*. Там же находим $S_i^{выч}$ (м) для точки с координатами $B_0 + \Delta B$ и $S_i^{выч}$ (м) для точки с координатами $L_0 + \Delta L$ при $\Delta B = \Delta L = 1''$. В этом случае $a_i = S_i^{выч}$ (м) из колонки 2 минус $S_i^{выч}$ (м) из колонки 6, а $b_i = S_i^{выч}$ (м) из колонки 3 минус $S_i^{выч}$ (м) из колонки 6. При этом *l* (м) равно разности $S_i^{выч}$ (м) из колонки 6 и $S_i^{изм}$ (м) из колонки 7.

Таблица 3

Коэффициенты и свободные члены параметрических уравнений поправок

I	$S_i^{выч}$, м для $(B_0 + \Delta B)$	$S_i^{выч}$, м для $(L_0 + \Delta L)$	a_i	b_i	$S_i^{выч}$, м для B_0 и L_0	$S_i^{изм}$, м	l, м
1	2	3	4	5	6	7	8
1	17452,28	17483,82	– 30,91	0,63	17483,19	17472,38	10,31
2	665,01	630,17	22,68	– 12,16	642,33	646,03	– 3,70
3	19668,04	19637,29	30,92	0,17	19637,12	19648,22	– 11,10

$[aa] = 2426$; $[ab] = -290$; $[bb] = 148{,}3$; $[al] = -745{,}8$; $[bl] = 49{,}6$.

По коэффициентам нормальных уравнений вычисляем элементы обратной матрицы $Q = R^{-1}$, используя известные формулы. Тогда получим сами неизвестные:

$$\Delta B = -\left(Q_{11} \cdot [al] + Q_{12} \cdot [bl]\right) = 0{,}3491;$$
$$\Delta L = -\left(Q_{12} \cdot [al] + Q_{22} \cdot [bl]\right) = 0{,}3482,$$

и найдем уравненные координаты B_1 = 55°00′35,3491″, L_0 = 55°00′35,3482″.

Применение метода Ньютона

Рассмотрим основные формулы для вычислений применительно к случаю двух переменных. Итеративный процесс будем выполнять по формулам

$$B_j = B_{j-1} + \Delta B; \quad L_j = L_{j-1} + \Delta L;$$
$$\begin{pmatrix} \Delta B \\ \Delta L \end{pmatrix} = -\mathrm{H}^{-1}(B,L)\nabla\Phi(B,L), \tag{6}$$

где $н(B,L) = \begin{pmatrix} н_{11} & н_{12} \\ н_{21} & н_{22} \end{pmatrix}$ – матрица Гессе; $\nabla\Phi(B,L) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ – градиент целевой функции. Его компоненты будем получать численным методом по формулам:

$$g_1 = \frac{1}{12\delta}\cdot\left(-\Phi_{2\delta,0} + 8\Phi_{\delta,0} - 8\Phi_{-\delta,0} + \Phi_{-2\delta,0}\right);$$
$$g_2 = \frac{1}{12\delta}\cdot\left(-\Phi_{0,2\delta} + 8\Phi_{0,\delta} - 8\Phi_{0,-\delta} + \Phi_{0,-2\delta}\right), \tag{7}$$

где $\Phi_{k,0} = \Phi\left(B_j + k, L_j\right)$, а $\Phi_{0,k} = \Phi\left(B_j, L_j + k\right)$, величину δ примем равной $1''$.

Элементы матрицы Гессе также найдем численным методом по формулам:

$$H_{11} = \frac{1}{12\delta^2}\cdot\left(-\Phi_{2\delta,0} + 16\Phi_{\delta,0} - 30\Phi_{0,0} + 16\Phi_{-\delta,0} - \Phi_{-2\delta,0}\right);$$
$$H_{22} = \frac{1}{12\delta^2}\cdot\left(-\Phi_{0,2\delta} + 16\Phi_{0,\delta} - 30\Phi_{0,0} + 16\Phi_{0,-\delta} - \Phi_{0,-2\delta}\right); \tag{8}$$

$$H_{12} = H_{21} = \frac{1}{4\delta^2}\cdot\left(\Phi_{\delta,\delta} - \Phi_{\delta,-\delta} - \Phi_{-\delta,\delta} + \Phi_{-\delta,-\delta}\right), \tag{9}$$

где $\Phi_{k,i} = \Phi\left(B_j + k, L_j + i\right)$.

Введя обозначения $H^{-1}(B,L) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$, запишем известные формулы по обращению матрицы второго порядка:

$$Q_{11} = \frac{H_{22}}{\Delta}; \quad Q_{12} = Q_{21} = -\frac{H_{12}}{\Delta}; \quad Q_{22} = \frac{H_{11}}{\Delta}, \tag{10}$$

где определитель матрицы Гессе получим по формуле

$$\Delta = H_{11}\cdot H_{22} - H_{12}^2. \tag{11}$$

Тогда согласно формуле (6) окончательно получим:

$$\Delta B = -\left(Q_{11}\cdot g_1 + Q_{12}\cdot g_2\right);$$
$$\Delta L = -\left(Q_{12}\cdot g_1 + Q_{22}\cdot g_2\right). \tag{12}$$

На практике начнем приближение с точки, находящейся вблизи минимума и найденной выше методом скорейшего спуска. При $j = 1$ имеем

$$B_0 = L_0 = 55°00'35; \qquad \Phi_{0,0} = 253{,}67990.$$

Необходимые для вычислений g_1, g_2 и $H(B, L)$ значения целевой функции запишем в таблице 4.

Таблица 4

Значения целевой функции для вычисления g_1, g_2 и $H(B, L)$

Приращения k	Переменная B; $\Phi_{k,0}$	Переменная L; $\Phi_{0,k}$
2δ	6964,9149	1032,2351
δ	1156,9129	502,9998
$-\delta$	4164,1740	306,45249
-2δ	12787,0897	678,8397

Для вычисления H_{12} найдем

$$\Phi_{\delta,\delta} = 830{,}6064;\ \Phi_{\delta,-\delta} = 1775{,}9228;\ \Phi_{-\delta,\delta} = 5009{,}1705;\ \Phi_{-\delta,-\delta} = 3631{,}4172.$$

Найдем числовые значения матрицы Гессе и обратной матрицы:

$$H_{11} = 4814{,}6; \qquad H_{22} = 302{,}48; \qquad H_{12} = -580{,}77.$$

Окончательно получим:

$$g_1 = 1519{,}7; \qquad g_2 = 101{,}58; \qquad \Delta B = 0{,}358''; \qquad \Delta L = 0{,}352'';$$

$$B_1 = 55°00'35{,}358''; \qquad L_1 = 55°00'35{,}352''; \qquad \Phi\left(B_1, L_1\right) = 0{,}0035.$$

Поскольку приращения малы, выполним только одно приближение. Контролем может служить неравенство:

$$\Phi(B_1, L_1) < \Phi(B_0, L_0).$$

В **заключение** отметим, что наиболее простым, обладающим большой областью сходимости, высокой точностью вычисления координат определяемого пункта и вместе с тем самым надежным является метод релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вычислительная математика / В.А. Вергасов [и др.]. – М.: Недра, 1976. – 230 с.
2. Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования / В.И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 1997. – 64 с.
3. Подшивалов, В.П. Высшая геодезия: сфероидическая геодезия, теоретическая геодезия: учеб.-метод. компл. / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: ПГУ, 2010. – 192 с.
4. Применение геодезических засечек, их обобщенные схемы и способы машинного решения / П.И. Баран [и др.]. – М.: Недра, 1986. – 166 с.

Поступила 15.04.2011

SOLVING THE MULTIPLE LINEAR INTERSECTION ON ELLIPSOID BY NONLINEAR PROGRAMMING METHOD

L. ZUEVA, A. STROK, S. SHNITKO

Solving of multiple linear intersection on ellipsoid by methods of blind search, relaxation, gradient method of descent, Gauss (method of linearized iterations) and Newton is analysed. Modern development of satellite measurements is assumed to solve geodetic structures in system of geodetic coordinates without their reduction on the plane. Application of method of nonlinear programming enables solving geodetic structures, which do not have closed formulas or when deriving of such formulas is difficult. Thus, application of described in the article methods allows, first, solving geodetic structures without considering any certain system of plane rectangular coordinates, second, avoiding complicated formulas and algorithms, which appear when solving geodetic tasks on ellipsoid. Investigations show that the best for solving indicated task is relaxation method, since it does not require input of preliminary coordinates of determined points.