

УДК 528.063

**УРАВНИВАНИЕ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ  
НЕЛИНЕЙНЫМ И ЛИНЕЙНЫМ МЕТОДАМИ,  
А ТАКЖЕ ОБОБЩЕННЫМ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫМ МЕТОДОМ  $L_p$ -ОЦЕНОК**

А.Ю. БУДО

(Полоцкий государственный университет)

*Выполняется сравнение нелинейного метода Ньютона с линейным новым методом уравнивания. Приведены формулы двух методов и представлены результаты вычислений с помощью этих методов. Исследуется малость отклонений координат пунктов от их истинных значений в обобщённом многокритериальном методе  $L_p$ -оценок по сравнению с методом наименьших квадратов. Проведена проверка новых формул обобщённого метода  $L_p$ -оценок посредством тестирования. Выявлены закономерности в изменении уклонений в уравненных координатах, оценка точности и поправок в измерения, а также флуктуаций значений целевой функции при изменении степени на отрезке  $1,0 \leq n \leq 3,0$  с шагом  $\Delta n = 0,2$ . Основная цель статьи – получить сведения, необходимые для отладки программ на тестовом примере геодезического четырёхугольника.*

**Введение.** Для реализации нелинейных методов уравнивания применяют алгоритмы нелинейного программирования для минимизации целевой функции [1; 2]

$$\Phi(X) = \left( |L(X)|^{\frac{n}{2}} \right)^T \cdot K_n^{-1} \cdot |L(X)|^{\frac{n}{2}}, \quad (1)$$

где  $K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} R P_n^{-\frac{1}{2}}$ .

Здесь  $n$  – показатель степени;  $R$  – корреляционная матрица, содержащая на диагонали единицы, внедиагональные числа которой равны коэффициентам корреляции.

Алгоритм минимизации этой целевой функции по методу Ньютона предусматривает итерационный процесс [3]:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \nabla \Phi(X^{(j)}), \quad (2)$$

где  $X^{(j)}$  – вектор неизвестных в  $j$ -м приближении;  $H(X^{(j)})$  – матрица Гессе вторых частных производных, взятых в точке  $X^{(j)}$

$$H(X^{(j)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_r \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_r^2} \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$\nabla \Phi(X^{(j)})$  – градиент целевой функции выражается вектором

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi(X^{(j)})}{\partial x_r} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Квадратичные и смешанные вторые, а также первые частные производные находятся по следующим наилучшим из 16 формул выражениям:

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_r} = \frac{1}{12\delta^2} (-\Phi_{2\delta,0} + 16\Phi_{\delta,0} - 30\Phi_{0,0} + 16\Phi_{-\delta,0} - \Phi_{-2\delta,0}); \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{4\delta^2} (\Phi_{\delta,\delta} - \Phi_{\delta,-\delta} - \Phi_{-\delta,\delta} + \Phi_{-\delta,-\delta}); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_i} = \frac{1}{12\delta} (-\Phi_{2\delta,0} + 8\Phi_{\delta,0} - 8\Phi_{-\delta,0} + \Phi_{-2\delta,0}), \quad (7)$$

где  $\Phi_{a\delta,b\delta} = \Phi(x_i + a\delta, x_j + b\delta)$  – значения целевой функции, возмущённые малым приращением координат. Причём  $\Phi_{0,0} = \Phi(X^{(j)})$ .

Специальные исследования на различных объектах показали, что малый шаг  $\delta$  будет оптимальным, если использовать выражение:

$$\delta = \sqrt{|x| + 10^{-\frac{m}{3}} / 10^{\frac{m}{3}}}, \quad (8)$$

где  $m$  – количество знаков в разрядной сетке представления координат  $x$  (в расчётах брали двойную точность,  $m = 16$ ). Формулы (5) и (7) замечательны тем, что с их применением в вычислениях участвуют одни и те же значения целевой функции  $\Phi_{a\delta,0}$ .

При уравнивании зависимых результатов измерений многокритериальным методом [4; 5] минимизация функции (1) осуществляется под условием минимума функции (9):

$$\Phi_2(X, n) = \min \max M. \quad (9)$$

Выполняется это следующим путём:

- 1) вычисляется  $M_i$  при  $n = 2, 0$ ;
- 2) изменяется степень  $n$  для одного из  $N$  измерений с шагом  $n_{j+1} = n_j \pm 0,1$  и вычисляется два вектора  $M_i (i = 1, k)$ , где  $k$  – число определяемых пунктов;
- 3) фиксируется то значение степени  $n_{j+1}$ , для которого выполняется функция (9);
- 4) за одно приближение вычисляются поправки в степень  $n$  для  $N$  измерений, количество итераций не более 20.

#### Основные формулы обобщённого метода Lp-оценок и многокритериальной оптимизации

Исследования показали, что начальные координаты определяемых пунктов  $X^{(0)}$  при использовании метода Ньютона должны быть близки к вектору  $\hat{X}$ . Разность  $|X^{(0)} - \hat{X}|$  не должна превышать 10 м для геодезических сетей второго класса и 2 м для сетей 1 – 2 разряда.

Обычно нелинейные методы применяют в тех случаях, когда при сложных целевых функциях не удаётся свести задачу к линейному виду.

Для зависимых результатов измерений формулы обобщённого метода Lp-оценок в линейном случае разработаны и опубликованы в [1]. Для этого используются следующие формулы:

$$x = X^{(j+1)} - X^{(j)} = -H^{-1}G, \quad (10)$$

где  $H_{n \times n}$  – матрица Гессе (вторых частных производных), для которой

$$H = \frac{n|n-2|}{2} Z + \frac{n \cdot n}{2} A^T C_2 A. \quad (11)$$

Здесь  $n$  – показатель степени;  $A_{N \times n}$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^N a_{ki} a_{kj} \cdot (C_1)_{k,r}.$$

Матрица для градиента, входящего в (10), вычисляется по формуле:

$$G = n \cdot A^T \cdot C_3 \cdot l, \quad (12)$$

где  $l_{N \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1}$ .

При этом средняя квадратическая ошибка единицы веса вычисляется по известной формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T K_n^{-1} V}{N-t}}, \quad (13)$$

где  $N$  – количество всех измерений;  $t$  – число необходимых измерений, а вектор поправок  $V$  вычисляется по формуле:

$$V = Ax + L(X). \quad (14)$$

Матрицу обратных весов вычисляют следующим образом:

$$Q = FK_n F^T, \quad (15)$$

где  $F$  – расширенная псевдообратная матрица:

$$F = H^{-1} A^T \operatorname{diag} \left( \frac{2}{n_i} \right) C_2. \quad (16)$$

В формулах (12)...(16) в общем случае недиагональные матрицы размером  $N \times N$  будут такими:

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[ |L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \quad (17)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[ S \cdot |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \right]^T \right\}, \quad (18)$$

где  $S_{N \times N}$  – диагональная матрица сигналов (единица на диагонали со знаком числа  $L(X)$ );

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot S \cdot \left\{ |L(X)|^{\frac{n-2}{2}} \cdot \left[ |L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}. \quad (19)$$

В формулах (17)...(19) знак « $\cdot$ » означает поэлементное умножение матриц. Например,  $A \cdot B = (a_{i,j} \cdot b_{i,j})$ .

В случае уравнивания обобщённым линейным многокритериальным методом формулы (17)...(19) принимают вид:

$$C_1 = K_n^{-1} \cdot \operatorname{diag} \left( \frac{n_i |n_i - 2|}{2} \right) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-4}{2}} \cdot \left[ |L_k(X)|^{\frac{n_k}{2}} \right]^T \right\}; \quad (20)$$

$$C_2 = K_n^{-1} \cdot \operatorname{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[ \operatorname{diag}(S_k \cdot \frac{n_k}{2}) \cdot |L_k(X)|^{\frac{n_k-2}{2}} \right]^T \right\}; \quad (21)$$

$$C_3 = K_n^{-1} \cdot \operatorname{diag}(S_i \cdot n_i) \cdot \left\{ |L_i(X)|^{\frac{n_i-2}{2}} \cdot \left[ |L_k(X)|^{\frac{n_k}{2}} \right]^T \right\}, \quad (22)$$

где  $i = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, N$ ; ошибка положения пункта  $M_k$  определяется следующим образом:

$$M_k = \mu \sqrt{Q_{k,k} + Q_{k+1,k+1}}. \quad (23)$$

Здесь

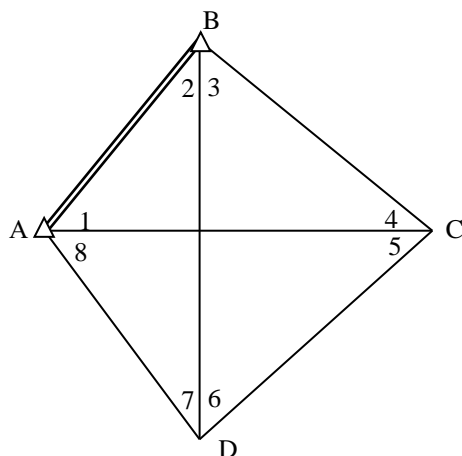
$$\mu_{MK} = \sqrt{\frac{V_{MK}^T K_n^{-1} V_{MK}}{r}}, \quad (24)$$

где  $r$  – количество избыточных измерений, а вектор поправок  $V_{MK}$  вычисляется по формуле:

$$V_{MK} = T_{MK}^{урав} - T^{изм}. \quad (25)$$

### Числовые примеры

Приведём пример уравнивания геодезического четырехугольника (рисунок) нелинейными и линейными методами с результатами измерений, представленными в таблице 1.



Геодезический четырёхугольник

Таблица 1

Измеренные углы

Номер угла	Величина угла
1	37°58'22"
2	39 18 30
3	61 01 37
4	41 41 41
5	50 01 55
6	27 14 40
7	26 57 40
8	75 45 05

В таблице 2 приведены результаты уравнивания по направлениям, составляя уравнения поправок для углов и используя матрицу  $K_n$ . При этом в колонках 1, 3, 5 даны результаты уравнивания по нелинейному методу Ньютона, а в колонках 2, 4, 6 – с использованием формул (10)...(19).

Координаты исходных пунктов:  $x_A = 1100,00$  м;  $y_A = 100,00$  м;  $x_B = 1650,00$  м;  $y_B = 640,00$  м; предварительные координаты определяемых пунктов:  $x_C = 1250$  м;  $y_C = 1230$  м;  $x_D = 100$  м;  $y_D = 500$  м.

Таблица 2

Уравнивание геодезического четырёхугольника при  $n = 1.5$ ,  $n = 2.0$ ,  $n = 2.5$ 

Обозначения	n = 1.5		n = 2.0		n = 2.5	
	1	2	3	4	5	6
$x_C$ , м	1249,932	1249,843	1249,849	1249,919	1249,876	1249,918
$y_C$ , м	1230,103	1230,103	1230,104	1230,071	1230,090	1230,058
$x_D$ , м	99,929	99,973	100,003	99,926	99,972	99,958
$y_D$ , м	500,005	499,930	499,914	499,983	499,941	499,982
$\mu$	8,38	6,88	3,83	5,17	2,16	3,42
$M_C$ , м	1,088	0,042	0,116	0,065	0,142	0,027
$M_D$ , м	0,161	0,093	0,173	0,137	0,194	0,041
$V_1$ , "	-18,9	-0,3	0,7	-14,7	-6,5	-14,7
$V_2$ , "	12,1	8,8	6,7	16,4	10,3	15,8
$V_3$ , "	-8,6	-18,3	-14,7	-12,8	-14,1	-15,0
$V_4$ , "	5,5	-0,2	-2,7	1,1	0,3	3,7
$V_5$ , "	-2,0	-2,3	1,6	4,2	-2,6	3,1
$V_6$ , "	30,2	27,8	22,8	14,5	23,4	15,1
$V_7$ , "	23,2	-0,4	-10	-1,8	0	0,7
$V_8$ , "	6,7	14,9	25,6	23,2	19,2	21,0
$\delta$ , м	0,01		0,01		0,01	

По данным таблицы 2 можно сделать следующие выводы:

1) нелинейные методы уравнивания в случае применения зависимых величин оказались неустойчивы к выбору шага численного дифференцирования (см. табл. 2, колонки 1, 3, 5);

2) расхождение координат в нелинейных методах по сравнению с линейными составило более 7 см.

Решим ещё пример по уравниванию геодезического четырёхугольника методом многостепенной (многокритериальной) оптимизации, добавляя к целевой функции (1) следующую целевую функцию:

$$\Phi_2(X, n) = \min \max M,$$

где  $M$  – ошибка положения пункта.

Для исходных данных, опубликованных в [2], получим результаты уравнивания, сведенные в таблицу 3, в которой каждая из 7 колонок отражает следующие алгоритмы многокритериальной оптимизации:

- 1) нелинейное уравнивание четырёхугольника по углам без применения корреляционной матрицы;
- 2) линеаризованное уравнивание четырёхугольника по углам без применения корреляционной матрицы;
- 3) нелинейное уравнивание по направлениям с использованием замыкания горизонта;
- 4) линейное уравнивание по направлениям с использованием замыкания горизонта;

- 5) нелинейное уравнивание по направлениям с использованием корреляционной матрицы  $K_\beta$  путём минимизации функции (1) с привлечением функции (9);
- 6) линейное уравнивание по направлениям с использованием формул (13)...(25);
- 7) линейное коррелятное уравнивание с замыканием горизонта.

Таблица 3

Результаты многокритериальной оптимизации

Обозначения	1		2		3		4		5		6		7	
$x_c$ , м	1249,900		1249,907		1249,901		1249,919		1249,864		1249,890		1249,925	
$у_c$ , м	1230,093		1230,079		1230,085		1230,077		1230,096		1230,078		1230,065	
$x_D$ , м	99,963		99,958		99,934		99,931		99,977		99,968		99,938	
$у_D$ , м	499,962		499,967		499,989		499,988		499,930		499,959		499,991	
$\mu$	4,44		4,64		3,78		3,97		3,39		3,08		3,68	
$M_c$ , м	0,109		0,098		0,072		0,068		0,03		0,005		0,066	
$M_D$ , м	0,145		0,123		0,101		0,105		0,03		0,006		0,066	
$n_1; V_1$	2,23	-10,6	2,10	-12,2	2,21	-11,1	2,00	-14,5	1,66	-4,1	3,90	-9,4	2,39	-15,9
$n_2; V_2$	2,14	13,1	2,08	13,9	2,12	17,1	2,00	17,0	2,02	8,8	2,13	12,7	2,37	17,4
$n_3; V_3$	2,50	-10,7	2,22	-12,1	2,10	-15,6	2,20	-12,4	2,02	-14,6	2,56	-14,9	2,59	-13,4
$n_4; V_4$	1,70	-1,8	1,53	0,5	1,20	-0,4	1,20	0,0	1,15	-0,1	2,01	1,5	1,11	2,0
$n_5; V_5$	1,40	-1,9	1,58	0	2,00	4,6	1,80	3,8	1,74	-3,8	3,26	-0,2	1,17	4,4
$n_5; V_6$	2,20	21,4	2,22	18,7	2,20	18,3	2,20	15,7	2,02	25,5	2,32	20,6	2,82	14,1
$n_7; V_7$	1,30	0,2	1,20	0,1	1,20	-1,0	1,60	-1,3	1,55	-0,1	1,11	0,5	1,11	-0,5
$n_8; V_8$	2,17	20,2	2,10	21,3	2,30	18,0	2,10	21,8	2,06	18,4	2,89	19,1	2,45	22,2

По результатам вычислений можно сделать следующие выводы:

- 1) данные колонки 5 расходятся с результатами вычислений в других колонках, потому что нелинейный метод с использованием корреляционной матрицы не устойчив и, как показали расчёты, даёт разные результаты при неодинаковых значениях шага численного дифференцирования;
- 2) данные колонок 1 и 2 близки между собой;
- 3) данные колонок 3, 4 и 7 с применением углов, замыкающих горизонт, и коррелятного способа уравнивания при  $P = K^{-1} = E$  также мало отличаются друг от друга.

#### О свойствах обобщённого метода Лр-оценок

##### на примере уравнивания плановой геодезической сети триангуляции

В необобщённом методе Лр-оценок используется следующая целевая функция [1]

$$\Phi(X) = \left( |L(X)|^2 \right)^T \cdot P_n \cdot |L(X)|^2, \quad (26)$$

где  $X_{t \times 1}$  – вектор координат для  $k$  ( $k = t/2; t$  – число параметров) определяемых пунктов;  $L(X)_{N \times 1} = T^{\text{выч}} - T^{\text{изм}}$  – вектор свободных членов, в общем случае нелинейных параметрических уравнений, для каждого результата измерения  $T_{N \times 1}^{\text{изм}}$ ;  $n$  – показатель степени на отрезке  $1.0 \leq n \leq 3.0$ ;  $P_{n \times N}$  – матрица весов измерений с

диагональными элементами  $P_i = \left( \frac{1}{\sigma_i} \right)^n$ .

По формулам из [1] разработан алгоритм и создана программа KEMNIOOO, реализующая обобщённый метод Лр-оценок. Матрица  $R$  вместе с координатами исходных пунктов и результатами измерений задаётся в исходной информации. Названная выше программа универсальна, так как с её помощью легко перейти к обычному методу Лр-оценок, задавая в исходной информации  $R = E$ . Тогда  $K_n^{-1} = P_n$  и автоматически будет минимизирована целевая функция (26).

При тестировании программы KEMNIOOO была минимизирована целевая функция (1) при  $P_n = E$ . Если  $K_n^{-1} = R^{-1}$ , при любом  $n$  осуществляется минимизация целевой функции:

$$\Phi(X) = \left( |L(X)|^2 \right)^T \cdot R^{-1} \cdot |L(X)|^2. \quad (27)$$

Результаты тестирования приведены в таблицах 4...6 для примера триангуляции из статьи [3].

Таблица 4

Результаты тестирования нового алгоритма

Обозначения	$n = 1,0$	$n = 1,2$	$n = 1,4$	$n = 1,6$	$n = 1,8$	$n = 2,0$	$n = 2,2$	$n = 2,4$	$n = 2,6$	$n = 2,8$	$n = 3,0$
$\Delta x_1$	-77 мм	-54 мм	-76 мм	-74 мм	-64 мм	0 мм	-1 мм	-1 мм	-1 мм	-1 мм	-4 мм
$\Delta y_1$	31	24	32	34	34	0	-9	-12	-14	-16	-22
$\Delta x_2$	45	41	43	49	47	0	27	30	34	39	61
$\Delta y_2$	-39	-42	-45	-54	-45	0	-7	-2	1	3	-3
$\mu$	10,59	15,38	7,50	6,33	5,35	5,17	4,16	3,70	3,17	2,70	2,29
$M_1$	0,055 м	0,236 м	0,057 м	0,050 м	0,051 м	0,065 м	0,036 м	0,030 м	0,024 м	0,019 м	0,016 м
$M_2$	0,360	0,902	0,131	0,081	0,074	0,137	0,043	0,044	0,037	0,030	0,025
$V_1$	-0,050"	-36,20"	-0,81"	-2,86"	-2,52"	4,22"	2,34"	2,96"	3,20"	3,23"	1,59"
$V_2$	0,00	0,00	-0,15	-0,67	-1,22	1,16	2,99	3,54	3,92	4,26	5,47
$V_3$	0,00	0,27	-0,41	-0,35	-0,06	-1,86	0,00	0,45	1,01	1,50	3,08
$V_4$	27,73	38,36	27,46	28,00	27,09	14,50	15,24	15,11	15,18	15,24	16,25
$V_5$	0,00	4,61	1,31	-0,52	-2,31	-14,71	-14,62	-14,66	-14,74	-14,85	-14,50
$V_6$	12,32	37,57	13,76	15,21	15,49	23,14	22,41	21,48	20,61	20,03	19,08
$V_7$	-20,68	4,84	-19,50	-17,47	-16,36	-12,88	-13,58	-14,61	-15,30	-15,74	-16,31
$V_8$	10,68	-19,45	9,96	8,66	9,89	16,43	15,20	15,74	16,12	16,33	15,34

Таблица 5

Дополнительное тестирование целевой функции (28)

$n$	$V_n = 1,0''$	$V_n = 1,2''$	$V_n = 1,4''$	$V_n = 1,6''$	$V_n = 1,8''$	$V_n = 2,0''$	$V_n = 2,2''$	$V_n = 2,4''$	$V_n = 2,6''$	$V_n = 2,8''$	$V_n = 3,0''$
1,0	<u>114,2</u>	117,0	124,2	133,5	135,8	150,8	161,0	168,6	174,6	179,4	183,3
1,2	202,7	<u>205,3</u>	213,8	224,3	228,2	251,1	268,3	281,5	292,1	300,6	307,7
1,4	363,0	364,6	<u>373,7</u>	384,4	389,8	424,0	451,9	474,3	492,4	507,2	519,8
1,6	654,4	654,0	660,9	<u>669,6</u>	674,7	724,1	768,1	805,0	835,6	860,9	882,7
1,8	1187	1182	1180	1181	<u>1180</u>	1248	1316	1375	1426	1468	1506
2,0	2166	2154	2123	2105	2083	<u>2168</u>	2268	2362	2444	2515	2578
2,2	2972	3938	3846	3781	3703	3792	<u>3932</u>	4075	4208	4324	4430
2,4	7318	7247	7009	6836	6620	6669	6850	<u>7061</u>	7269	7458	7633
2,6	13545	13399	12840	12428	11896	11786	11984	12280	<u>12598</u>	12899	13186
2,8	25175	24881	23629	22693	21466	20918	21044	21425	21895	<u>22366</u>	22829
3,0	46970	46387	43669	41591	38873	37262	37075	37489	38150	38867	<u>39607</u>

Таблица 6

Тестирование целевой функции (28) при  $R = E$  (независимые измерения)

$n$	$V_n = 1,0''$	$V_n = 1,2''$	$V_n = 1,4''$	$V_n = 1,6''$	$V_n = 1,8''$	$V_n = 2,0''$	$V_n = 2,2''$	$V_n = 2,4''$	$V_n = 2,6''$	$V_n = 2,8''$	$V_n = 3,0''$
1,0	<u>72,04</u>	72,25	73,48	76,73	77,89	81,56	84,97	87,84	90,22	92,19	93,88
1,2	129,1	<u>129,2</u>	130,0	133,7	134,6	139,2	144,1	148,7	152,6	155,9	158,8
1,4	233,6	233,2	<u>232,8</u>	236,7	236,0	240,6	247,3	254,0	260,2	265,6	270,4
1,6	425,7	424,5	420,8	<u>424,2</u>	418,0	420,2	428,0	437,4	446,7	455,2	463,1
1,8	780,7	777,8	766,2	766,7	<u>746,8</u>	739,9	746,4	758,1	771,4	784,3	796,7
2,0	1440	1433	1403	1395	1343	<u>1311</u>	1309	1321	1338	1357	1376
2,2	2668	2653	2583	2550	2428	2337	<u>2308</u>	2312	2332	2357	2385
2,4	4964	4933	4773	4681	4406	4181	4086	<u>4063</u>	4077	4107	4146
2,6	9275	9210	8852	8618	8024	7508	7258	7162	<u>7149</u>	7175	7226
2,8	17392	17256	16470	15907	14653	13520	12932	12661	12569	<u>12567</u>	12623
3,0	32718	32438	30731	29422	26819	24406	23098	22437	22150	22059	<u>22094</u>

В таблице 4 приведены:  $\Delta x$ ;  $\Delta y$  – разности уравненных координат, полученные по формуле:

$$\Delta x_1 = X_n - X_{n=2.0}; \Delta y_1 = Y_n - Y_{n=2.0};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^T V_n}{N-t}}; \quad M_i = \mu \sqrt{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1}}; \quad Q_{\text{кр}} = F \cdot F^T; \quad F = nH^{-1} A^T C_1 [1];$$

$V_i''$  – поправка в углы при фактическом уравнивании по направлениям благодаря использованию корреляционной матрицы  $R$  [4]. Устойчивой закономерностью в таблице 4 является уменьшение  $\mu$ .

В таблице 5 приведены значения целевой функции

$$\Phi(\hat{X}) = \left( |V|^n \right)^T \cdot R^{-1} \cdot |V|^n, \quad (28)$$

где  $V = L(\hat{X}) = T^{\text{прав}} - T^{\text{изм}}$ . При этом вектор  $V$  выбирался из соответствующего столбца таблицы 4, для каждого  $V$  применялась формула (28) при различных степенях, указанных в первой колонке таблицы 5. Закономерность в числах  $\Phi(\hat{X})$  заключается в их возрастании по столбцам  $V_n = 1.0$ ;  $V_n = 1.2$ ;  $V_n = 1.4$ , ...,  $V_n = 3.0$ . Увеличиваются также и диагональные элементы  $\Phi(\hat{X})$  в квадратной матрице таблицы 5.

В таблице 6 тестировалась формула (28) при  $R = E$  (вектор  $V$  взят из таблицы 4).

В таблице 6 диагональные элементы квадратной матрицы должны быть наименьшими по строкам.

Закономерность по увеличению чисел  $\Phi(X)$  в таблицах 4 и 5 по столбцам является новым свойством обобщённого и необобщённого метода Lp-оценок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кемниц, Ю.В. Математическая обработка зависимых результатов измерений / Ю.В. Кемниц. – М.: Недра, 1970. – 192 с.
2. Мицкевич, В.И. Алгоритм обобщённого метода Lp-оценок на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия Ф. Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 92 – 96.
3. Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование / Д.М. Химмельблау; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
4. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 9 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.1999 № 681-гд. 99 деп.
5. Мицкевич, В.И. Особенности уравнивательных вычислений по методу многокритериальной оптимизации / В.И. Мицкевич, О.Г. Скорик, В.В. Ялтыхов // Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2002. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 17.09.02 № 776 – гд. 02 деп.

Поступила 15.04.2011

#### ADJUSTMENT OF DEPENDENT RESULTS OF MEASUREMENTS BY NONLINEAR, LINEAR AND GENERALIZED MULTI-CRITERIA METHOD OF LP-ASSESSMENTS

A. BUDO

*Comparison of nonlinear method of Newton and linear method of adjustment is conducted. Formulas of both methods are presented and the results of computations by these methods are discussed. Smallness of variances of coordinates of items from true values applying generalized multi-criteria method of Lp-assessments and least-square method is investigated. Testing of new formulas of generalized method of Lp-assessment is done. Law of changing of deviations of adjusted coordinates, accuracy assessment, measurements' corrections, fluctuations of values of objective function when changing the degree at the interval  $1.0 \leq n \leq 3.0$  with the step  $\Delta n = 0.2$ . The aim of the article is to present knowledge necessary for debugging of the program for test polygon for geodetic quadrangle.*