

УДК 528.235

РЕДУЦИРОВАНИЕ РАССТОЯНИЙ НА ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ МЕРКАТОРА И ЛАМБЕРТА

канд. техн. наук А.А. АКРЕШ МОХАММЕД САБРИ
(Ливия)

Целью статьи является анализ искажений расстояний, обусловленных частным масштабом длин проекции. Показано, что в результате выбора значения оптимального масштаба в проекциях Меркатора и Ламберта в условиях Ливии можно минимизировать искажения расстояний. При этом исследованы характеристики для различных расстояний и для пунктов, расположенных относительно друг друга произвольно. Произведено сравнение изображенных расстояний с расстояниями, вычисленными на поверхности эллипсоида. Данный подход позволяет в рамках проекции Меркатора и Ламберта формировать условия, когда расстояние на плоскости будет соответствовать расстоянию на поверхности эллипсоида, что имеет место в равнопромежуточных в заданном направлении проекциях. Эта задача находит практическое применение в навигации. Максимальные искажения для расстояний до 30 км в проекциях с оптимальным масштабом не превосходят величины 0.09 м. Для расстояний до 110 км искажения не превосходят величины 0.13 м.

Введение. Исследование изменения частного масштаба длин – одна из самых важных задач для любых геодезических проекций, потому что масштаб влияет на искажения измеренных расстояний при их изображении на плоскости проекции. Используя возможности современной вычислительной техники, вычисление любых расстояний можно производить непосредственно на электронных картах. Естественно, точность этих вычислений будет зависеть от того, с какими искажениями отображаются эти расстояния на карте. Выбирая соответствующее значение масштаба в средней точке проекции так, чтобы значение среднего масштаба вдоль измеряемого направления устремлялось к единице, создаются условия определения расстояний по карте с высокой точностью.

Рассматриваются изменения масштаба на цифровой карте, созданной в проекции Гаусса – Боага (Universal Transverse Mercator) с широтой $26^{\circ}30'N$ и долготой $17^{\circ}15' E$ в главной точке (предлагаемый вариант общегосударственной системы координат для территории Ливии, представленный на рисунке 1). При вычислениях использованы гармонические уравнения общего алгоритма для класса конформных проекций, в котором используется характеристическое уравнение для цилиндрической проекции Т. Меркатора [1 – 3; 9].

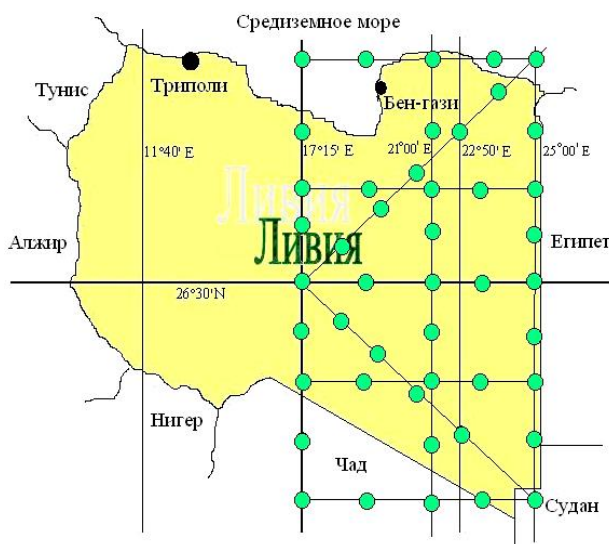


Рис. 1. Положение территории Ливии

Ливия находится в Северной Африке и занимает значительную по площади территорию. Граничные точки имеют географические координаты: $\varphi_s = 19^{\circ}30'29.80''N$; $\varphi_N = 33^{\circ}09'55.63''N$; $\lambda_w = 9^{\circ}24'28.96''E$; $\lambda_E = 25^{\circ}05'46.12''E$. Как видим, разность широт достигает величины более $13,5^{\circ}$, а долгот – более $15,5^{\circ}$.

В работе принимается оптимальный масштаб, равный 0.99611165 на осевом меридиане с долготой $\lambda_0 = 17^{\circ}15' E$, при этом масштаб на долготах $11^{\circ}40' E$, $22^{\circ}50' E$ равен 1.0000000.

1. Редуцирование расстояний по традиционному методу в проекции Т. Меркатора

Изменение масштаба в проекции зависит от удаления от осевого меридиана (в цилиндрических) и средней параллели (в конических). Расстояние на плоскости проекции вычисляем по прямоугольным координатам конечных точек по формулам обратной геодезической задачи на плоскости.

Будем анализировать несколько расстояний, которые вычислены на плоскости в проекции Меркатора, и сравним эти значения с расстояниями, которые получены из решения геодезических задач на поверхности эллипсоида. Рассмотрим расстояния, проходящие в различных направлениях и на различных участках координатной зоны. На рисунке 1 показаны точки, между которыми варьируются и исследуются эти расстояния. Здесь вычислены 103 расстояния длиной от 30 до 110 км, ориентированные по различным направлениям, с использованием формулы Симпсона [2; 9].

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nl} &= \sigma_{эл} + \partial\sigma_{эл-1} + \partial\sigma_{эл-2}; \\ \partial\sigma_{эл-1} &= \sigma_{эл} \left(\frac{m_i + m_E + 4m_m - 1}{6} \right); \\ \partial\sigma_{эл-2} &= -\Gamma_m^2 \frac{(\sigma_{эл} + \partial\sigma_{эл-1})^3}{24}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где σ_{nl} – длина отрезка прямой на плоскости; $\sigma_{эл}$ – длина геодезической линии на поверхности эллипсоида; $\partial\sigma_{эл-1}$ – поправка в длину линии за масштаб изображения, значение которого вычисляется по формуле Симпсона как среднее вдоль линии, для чего достаточно взять значения масштаба в трех точках: в начале, середине и в конце геодезической линии эллипсоида; $\partial\sigma_{эл-2}$ – поправка в длину линии за кривизну изображения геодезической линии на плоскости.

Сравнительный анализ данных, полученных по формуле Симпсона, позволяет сделать следующие *выводы*:

1) для расстояний до 44 км (исследовано 40 расстояний, ориентированных по различным направлениям) получены следующие результаты:

- минимальные искажения расстояний (± 0.002 м), когда они ориентированы параллельно осевому меридиану вдоль линий нулевых искажений, где масштаб равен единице (на долготах $22^\circ 06' E$, $23^\circ 06' E$);
- максимальные искажения расстояний (± 0.522 м, в относительной мере 1:85000) на долготе центрального меридиана $17^\circ 15' E$, а также на граничных меридианах (западном и восточном);
- среднее значение искажений расстояний в пределах зоны (± 0.236 м, в относительной мере 1:185000);

2) для расстояний до 70 км (исследовано 43 расстояния, ориентированных по различным направлениям) получены следующие результаты:

- минимальные искажения расстояний (± 0.01 м, в относительной мере 1:7000000), когда они ориентированы параллельно осевому меридиану вдоль линий нулевых искажений, где масштаб равен единице (на долготах $22^\circ 06' E$, $23^\circ 06' E$);
- максимальные искажения расстояний (± 0.760 м, в относительной мере 1:90000) на долготе осевого меридиана $17^\circ 15' E$, а также на границе зоны западной и восточной;
- среднее значение искажений расстояний в пределах зоны (± 0.500 м, в относительной мере 1:140000);

3) для расстояний до 110 км (исследованы 20 расстояний, ориентированных по различным направлениям) получены следующие результаты:

- минимальные искажения расстояний (± 0.025 м, в относительной мере 1:4400000), когда они ориентированы параллельно центральному меридиану вдоль линий нулевых искажений, где масштаб равен единице (на долготах $22^\circ 06' E$, $23^\circ 06' E$);
- максимальные искажения расстояний (± 1.477 м, в относительной мере 1:75000) на центральном меридиане $17^\circ 15' E$, а также на границе зоны (западной и восточной);
- среднее значение искажений расстояний в пределах зоны (± 0.723 м, в относительной мере 1:150000).

Как видно из приведенных результатов, величины искажений вдоль различных направлений и для различных расстояний существенны для решения геодезических задач, при этом пренебрегаемо малы для решения ряда навигационных задач.

2. Анализ результатов уточнения редуцированной поправки при вычислении расстояний

Для уточнения среднего значения масштаба вдоль изображаемых линий большей длины, приводящего к уменьшению искажений, предлагаются формулы, полученные с применением градиентного метода [1; 2; 6; 11]:

$$\left. \begin{aligned} dm_0 &= \pm a((S/2) - (Y_c \pm X_c \tan \gamma))^2 + G_3((S/2) - (Y_c \pm X_c \tan \gamma)) + h; \\ a &= \frac{G_3 - G_4}{2 \cdot (S/2)}; \quad G_3 = \frac{2 \cdot h}{(S/2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где S – до 560000.00 м; x – средняя величина прямоугольных координат (абсцисс); $G_3, 2 = -5.5714 \cdot 10^{-11}$; $G_{1,4} = 1.42857 \cdot 10^{-12}$; $a = 1.0204 \cdot 10^{-16}$, $\gamma = 2^\circ$.

Выражение работает между долготами $11.7^\circ \dots 22.5^\circ$, принимает знак (-) минус при расстоянии от 0 до 280000 м, при расстояниях больше 280000 м – знак (+) плюс. Однако в $(Y_c \pm X_c)$ принимается знак (-) минус при широтах меньше 26.5° , знак (+) плюс – при широтах, больше 26.5° .

$$dm_0 = a \cdot (S - (Y_c \pm X_c \cdot \tan \gamma))^2, \quad (3)$$

где $a = 2.9 \cdot 10^{-16}$; $S = 560000$ м; $\gamma = 2^\circ$.

По результатам вычислений для случаев, аналогичных рассмотренным ранее, можно сделать следующие выводы:

- 1) для расстояний до 44 км:
 - минимальные искажения расстояний (± 0.000 м), когда они ориентированы параллельно осевому меридиану вдоль линий нулевых искажений, где масштаб равен единице (на долготах $22^\circ 06' E$, $23^\circ 06' E$);
 - максимальные искажения расстояний (± 0.053 м, в относительной мере 1:800000) на долготе центрального меридиана $17^\circ 15' E$, а также на граничных меридианах (западном и восточном);
 - среднее значение искажений расстояний в пределах зоны (± 0.017 м, в относительной мере 1:2600000);
- 2) для расстояний до 70 км:
 - минимальные искажения расстояний (± 0.023 м, в относительной мере 1:3000000), когда они ориентированы параллельно осевому меридиану вдоль линий нулевых искажений, где масштаб равен единице (на долготах $22^\circ 06' E$, $23^\circ 06' E$);
 - максимальные искажения расстояний (± 0.123 м, в относительной мере 1:600000) на долготе осевого меридиана $17^\circ 15' E$, а также на краю зоны (западном и восточном);
 - среднее значение искажений расстояний в пределах зоны (± 0.008 м, в относительной мере 1:9000000);
- 3) для расстояний до 110 км:
 - минимальные искажения расстояний (± 0.009 м, в относительной мере 1:12000000), когда они ориентированы параллельно центральному меридиану вдоль линий нулевых искажений, где масштаб равен единице (на долготах $22^\circ 06' E$, $23^\circ 06' E$);
 - максимальные искажения расстояний (± 0.124 м, в относительной мере 1:900000) на центральном меридиане $17^\circ 15' E$, а также на краю зоны (западном и восточном);
 - среднее значение искажений расстояний в пределах зоны (± 0.014 м, в относительной мере 1:800000).

Анализ результатов между традиционным методом редуцирования и с учетом градиентной поправки показан на рисунке 2.

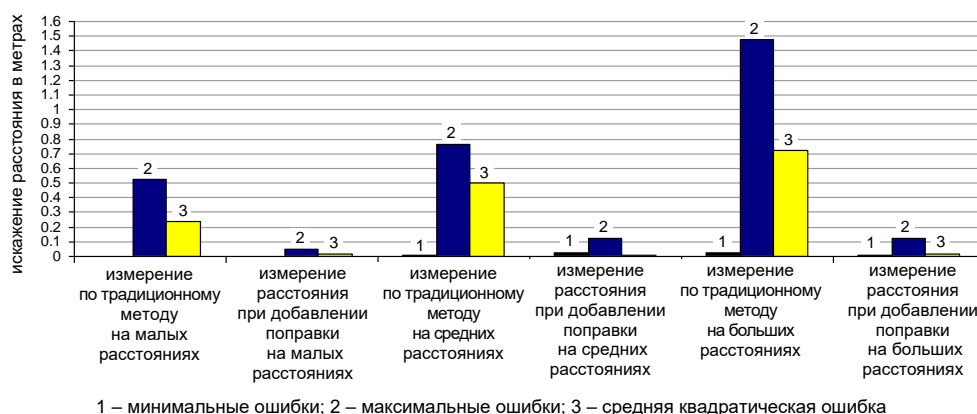


Рис. 2. Анализ результатов в проекции Т. Меркатора

3. Анализ изменения масштаба в геодезических проекциях для территорий наиболее крупных ливийских городов

Здесь будем исследовать системы координат в геодезических проекциях Гаусса и Ламберта с использованием гармонических уравнений для территорий трёх городов. При этом местные системы координат получены на основе общегосударственных путем вычисления масштаба m'_0 так, чтобы в центре города искажения были минимальны. Далее будем исследовать изменения масштабов в пределах территории городов по отношению к оптимальному масштабу, принятому для территории страны. При вычислениях используем параметры эллипсоида WGS 84.

Город Триполи. Триполи является столицей Ливии. Местная система координат в Триполи имеет масштабы в центральной точке общегосударственной системы координат: в проекции Т. Меркатора $m'_0 = 0.9982225$ и Ламберта $m'_0 = 0.99379404$. Исследование ведем в четырех точках, расположенных в различных местах города (табл. 1). Значения m'_0 выбраны так, чтобы в точке E , расположенной в центре города, имело место $m = 1$. Здесь использована следующая формула из [2; 9]:

$$m=1, \quad m'_0 = \frac{1}{m_E}. \quad (4)$$

Таблица 1

Геодезические координаты граничных пунктов в Триполи

Пункты	B	L	Пункты	B	L
A	32°52'00"	13°07'00"	D	32°48'00"	13°06'00"
B	32°53'00"	13°15'00"	E	32°50'30"	13°11'30"
C	32°48'30"	13°17'00"			

Далее, чтобы знать, какая местная система координат наиболее подходит к использованию в Триполи, необходимо определить изменение масштаба в обеих проекциях и сравнить расстояния в этих системах с расстояниями, полученными из решения обратной геодезической задачи.

В таблицах 2, 3 отмечено, что при вычислении расстояний на плоскости проекций используем формулу Симпсона (по трем узловым точкам), формула (1). За точное значение принимаем расстояние, вычисленное из решения обратной геодезической задачи на поверхности эллипсоида.

Таблица 2

Вычисления в местных системах координат для Триполи

Местная система координат в проекции Т. Меркатора $X_0 = 2932230.4925$ м, $Y_0 = 0$					
	x	y	Значения масштаба	расстояние по формуле Симпсона	расстояние на эллипсоиде
A	3644276.1285	386304.1845	1.00006533	S _{A-D} 16891.915	S _{A-D} 16891.915
B	3645641.9380	373764.1412	0.99994757		
C	3636949.0644	388153.6545	1.00008305	S _{B-C} 16811.179	S _{B-C} 16811.179
D	3637213.0113	370959.9598	0.9999218		
E	3641233.0449	379396.3794	1.0000000		
Местная система координат в проекции Ламберта $X_0 = 2932230.4925$ м; $Y_0 = 0$					
A	3641268.7256	386805.6941	1.00004979	S _{A-D} 16891.916	S _{A-D} 16891.915
B	3642721.1586	374274.6223	1.00008309		
C	3633929.5814	388603.7525	0.99991748	S _{B-C} 16811.179	S _{B-C} 16811.179
D	3634310.6762	371413.5638	0.99993394		
E	3638273.6214	379877.0143	1.00000000		

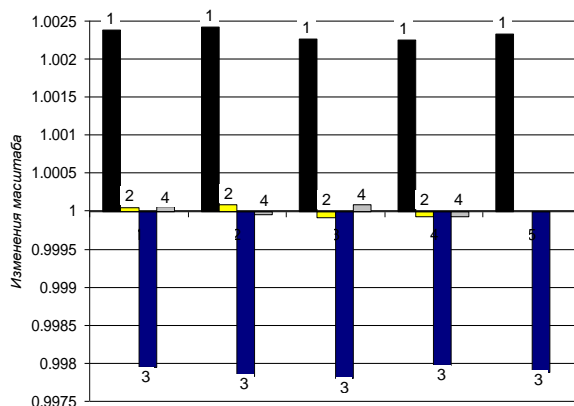
Таблица 3

Вычисления в общегосударственной системе координат для Триполи

Общегосударственная система координат в проекции Т. Меркатора $X_0 = 2932230.4925$					
	x	y	Значения масштаба	расстояние по формуле Симпсона	расстояние на эллипсоиде
A	3642770.6113	385487.4003	0.99795084	S _{A-C} 16891.855	S _{A-C} 16891.915
B	3644133.5331	372973.8712	0.99783333		
C	3635722.4281	370175.6189	0.99780761	S _{B-D} 16811.103	S _{B-D} 16811.179
D	3635459.0393	387332.9600	0.99796852		
E	3639733.9619	378594.2009	0.99788564		
Общегосударственная система координат в проекции Ламберта $X_0 = 2932230.4925$ м					
A	3642922.2579	387707.7554	1.00238198	S _{A-C} 16891.824	S _{A-D} 16891.915
B	3644378.0788	375147.4602	1.00241537		
C	3635947.9825	372279.7295	1.00226587	S _{B-D} 16811.088	S _{B-C} 16811.179
D	3635565.9989	389510.0071	1.00224937		
E	3639920.1695	380762.9174	1.00233208		

Из таблиц 2 и 3 видно, что вычисление расстояний в местных системах координат, принятых для Триполи, дают высокую точность при использовании формулы Симпсона в обеих проекциях. Здесь нет необходимости использовать уточненные формулы редуционных поправок. Сами же значения поправок в расстояния не превышают величины 0.1 м, в относительной мере 1:170000, что является несущественным при решении целого ряда задач на территории города.

В общегосударственных системах координат эти поправки существенно больше. Более того, формула Симпсона нуждается в уточнении по методике, рассмотренной нами ранее.



1 – Ламберт общий; 2 – Ламберт частный; 3 – Меркатор общий; 4 – Меркатор частный

Рис. 3. Изменения масштаба на территории города Триполи

Из рисунка 3 видно, что изменение масштаба в проекции Т. Меркатора меньше, чем в проекции Ламберта в обеих системах частной и общей. Это объясняется тем, что удаление центра города от средней параллели больше, чем от среднего меридиана общегосударственной системы координат.

Город Бен-гази. Местные системы координат для Бен-гази имеют масштабы: в проекции Т. Меркатора $m'_0 = 0.99910321$ и Ламберта $m'_0 = 0.99515654$. Исследование ведем в четырех точках, расположенных по граничным точкам города (табл. 4). Точка Е расположена в центре города, для которой $m = 1$. Выбор значений m'_0 произведен так же, как и для города Триполи.

Таблица 4

Геодезические координаты граничных пунктов для Бен-гази

Пункты	В	Л	Пункты	В	Л
A	32°10'00"	20°03'00"	D	32°03'00"	20°11'00"
B	32°09'00"	20°12'00"	E	32°06'30"	20°06'30"
C	32°04'00"	20°05'00"			

Как и для Триполи, результаты исследований приведены в таблицах 5, 6.

Таблица 5

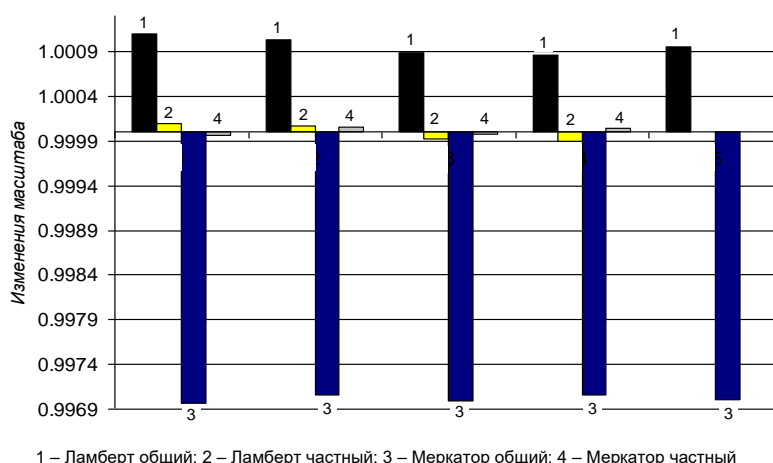
Вычисления в местных системах координат для Бен-гази

Местная система координат в проекции Т. Меркатора $X_0 = 2932230.4925$ м; $Y_0 = 0$					
	x	y	Значения масштаба	расстояние по формуле Симпсона	расстояние на эллипсоиде
A	3563205.3165	263910.0753	0.99996264	S _{A-D} 18047.980	S _{A-D} 18047.980
B	3561735.8931	278104.1039	1.0000576		
C	3552202.7658	267344.6383	0.99998518	S _{B-C} 14374.904	S _{B-C} 14374.904
D	3550607.6336	276834.1417	1.00004892		
E	3556883.7693	269581.9149	1.00000000		
Местная система координат в проекции Ламберта $X_0 = 2932230.4925$ м; $Y_0 = 0$					
A	3561200.7026	264107.2462	1.00010261	S _{A-D} 18047.980	S _{A-D} 18047.980
B	3559669.6456	278295.8814	1.00007318		
C	3550183.3201	267495.5317	0.99992738	S _{B-C} 14374.904	S _{B-C} 14374.904
D	3548547.8337	276977.1470	0.99989849		
E	3554854.6656	269752.5644	1.00000000		

Таблица 6

Вычисления в общегосударственной системе координат для Бен-гази

Общегосударственная система координат в проекции Меркатора $X_0 = 2932230.4925$ м					
	x	y	Значения масштаба	расстояние по формуле Симпсона	расстояние на эллипсоиде
A	3561316.0206	263119.8627	0.99696851	S _{A-D} 18047.830	S _{A-D} 18047.980
B	3559850.9971	277271.3909	0.99706317		
C	3550346.4144	266544.1418	0.99699098	S _{B-C} 14374.777	S _{B-C} 14374.904
D	3548756.0583	276005.2313	0.99705452		
E	3555013.4018	268774.7195	0.99700575		
Общегосударственная система координат в проекции Ламберта $X_0 = 2932230.4925$ м					
A	3561804.3614	264360.7254	1.00106247	S _{A-D} 18047.963	S _{A-D} 18047.980
B	3560271.8357	278562.9783	1.00103301		
C	3550776.4050	267752.2632	1.00088707	S _{B-C} 14374.891	S _{B-C} 14374.904
D	3549139.3395	277242.9785	1.00085815		
E	3555452.2326	270011.461	1.00095976		



1 – Ламберт общий; 2 – Ламберт частный; 3 – Меркатор общий; 4 – Меркатор частный

Рис. 4. Сравнительные изменения масштаба на территории города Бен-гази

Из таблиц 5, 6 и рисунка 4 видно, что вычисление расстояний в местных системах координат, принятых для Бен-гази, дают достаточно высокую точность при использовании формулы Симпсона в обеих проекциях. Здесь нет необходимости использовать уточненные формулы редуционных поправок. Сами же значения поправок в расстояния не превышают величины 0.1 м, а в относительной мере 1:70000, что является несущественным при решении различных задач на территории города.

В общегосударственных системах координат эти поправки существенно больше. Вместе с тем замечаем, что значения поправок несколько меньше, по сравнению с Триполи, потому что размеры Бен-гази меньше размеров Триполи.

Заключение. В статье приведены результаты исследований, направленные на повышение точности измерения расстояний по электронным картам. Задача решается путем предвычисления значения частного масштаба длин вдоль различных направлений, путем введения поправки в оптимальный масштаб карты. Решение задачи приведено для общегосударственной и местных систем координат, сформированных на основе общегосударственной для наиболее крупных городов Ливии. Из анализа результатов выполненных исследований представляем следующие выводы:

- измерение расстояний по картам с оптимальным масштабом для решения ряда задач навигации возможно с достаточно высокой точностью. Искажения в расстояниях можно существенно уменьшить путем вычисления соответствующей поправки в значение оптимального масштаба;
- для расстояний до 30000.00 м максимальные искажения не превосходят величины 0.09 м;
- для расстояний до 110000.00 м искажения не превосходят величины 0.130 м;
- при вычислениях расстояний по указанной методике можно достичь результатов, по точности соответствующих точности измерений с использованием спутниковых технологий;
- формулы, приведенные в статье, позволяют вычислять поправки в масштаб карты с целью минимизации линейных искажений, что является альтернативой применения равнопромежуточных проекций;

- для формирования местных систем координат на территории Ливии можно использовать как проекцию Гаусса, так и проекцию Ламберта с предвычисленными значениями масштаба в центральной точке проекций;

- формирование систем координат применительно к территории Ливии в современных условиях должно производиться с учетом точностных возможностей координатных определений с применением современных стандартов геодезических измерений, основанных, в том числе, на спутниковых системах позиционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акреш, М.С. Вычисление расстояний на плоскости проекции Ламберта применительно к условиям Ливии / М.С. Акреш // Земля Беларуси. – 2009. – № 2. – С. 33 – 37.
2. Акреш, М.С. Разработка научно-технических основ и технологий формирования систем координат для геоинформационных систем в условиях Ливии: дис. ... канд. техн. наук / М.С. Акреш; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк: ПГУ, 2010. – 131 с.
3. Акреш, М.С. Сравнительный анализ численных характеристик проекции Т. Меркатора и проекции Ламберта / М.С. Акреш; Ун-т Аль фатех. – Триполи, 1999. – 224 с.
4. Бугаевский, Л.М. Математическая картография / Л.М. Бугаевский. – М.: Златоуст, 1998. – 400 с.
5. Багратуни, Г.В. Курс сфероидической геодезии / Г.В. Багратуни. – М.: Изд-во геодезической литературы, 1962. – 248 с.
6. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
7. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – М.: Недра, 1964. – 503 с.
8. Морозов, В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
9. Подшивалов, В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем / В.П. Подшивалов. – Новополоцк: ПГУ, 1998. – 125 с.
10. Соловьев, М.Д. Математическая картография / М.Д. Соловьев. – М.: Недра, 1969. – 286 с.
11. Akresh, M.S. Transverse Mercator projection and conformal Lambert projection-Comparative study for Tripoli city / M.S. Akresh, U. Padshyvalau // Junior researchers conference, 22 – 23 April, 2009 / Polotsk State University, 2009. – P. 200 – 202.

Поступила 06.05.2011

THE REDUCTION OF DISTANCES ON THE MAP PROJECTIONS MERCATOR AND LAMBERT

AKRESH MOHAMMED SABRI ALI

This paper presenting analyze the distortion of distances caused by the ideal scale factor of length for projection of Mercator and Lambert “area study for Libya”, where gives minimize the distortion of distances, by calculates of characteristics for different distances. Also compare son all calculated distances on map projection “plane” within distances calculated on the surface of the ellipsoid. These data applied in Mercator and Lambert projections form condition, when the distance on the plane with correspond to the distance on the surface of the ellipsoid, which takes place in a given direction equidistant projections. This problem has practical applications in navigation. The Maximum distortion for distances up to 30 km in the projections with the optimal scale do not exceed 0.09 m, while For distances up to 110 m to the distortions do not exceed 0.13 m.