УДК 528.63

ВЗАИМОСВЯЗЬ РАСШИРЕННОЙ И ГЛАВНОЙ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ ПРИ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Н.С. СЫРОВА
(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)

При математической обработке геодезических сетей используются расширенная и главная псевдообратные матрицы. Расширенная матрица вычисляется по специальной формуле без применения псевдоинверсии. При ее вычислении обычно используется известный алгоритм обращения матриц. Для вычисления элементов главной псевдообратной матрицы применяют стандартную функцию pinv в математическом пакете MATLAB. В настоящей статье предложены формулы перехода от расширенной псевдообратной матрицы к главной псевдообратной матрице. Применяя эти формулы, не требуется проводить псевдоинверсию, а необходимо использовать процедуру обращения матрицы, которую можно вычислить либо по стандартной программе, либо по стандартной функции inv в математическом пакете MATLAB. Формулы, приведенные в статье, позволяют составить универсальную программу уравнивания и оценки точности свободных, не свободных и нуль-свободных геодезических сетей, содержащих или не содержащих дефектов конфигурации или дефектов построения.

Введение. Расширенная псевдообратная матрица с применением матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок A и матрицы весов измерений P вычисляется по формуле:

$$F = (A^T PA)^{-1} A^T P, \tag{1}$$

в параметрическом способе уравнивания позволяет выполнять следующие процедуры, используемые в уравнительных вычислениях [1 – 4]:

- при уравнивании геодезических сетей нетрадиционными способами – методами Lp-оценок и многокритериальной оптимизации;
- в процессе оценки точности на основе теоремы о переносе ошибок с применением равенства:

$$Q = FP^{-1}F^T\ ; \tag{2}$$

- при вычислении корреляционной матрицы измерений после уравнивания

$$K = AF\ ; \tag{3}$$

- для реализации коррелатного способа уравнивания на основе параметрического с применением равенства:

$$B^* = E - AF\ ; \tag{4}$$

- при оценке точности в процессе перехода от весовой функции f_p в параметрическом способе уравнивания к весовой функции f_k в коррелатном способе с применением равенства:

$$f_k = f_p F\ ; \tag{5}$$

- при поиске грубых ошибок в измерениях в процессе вычисления корреляционной матрицы поправок по формуле:

$$K_v = (E - AF)P^{-1}\ ; \tag{6}$$

- при учете ошибок исходных данных по формулам:

$$Q_X = FK_Y F^T\ ; \tag{7}$$

$$K_Y = P^{-1} + BQ_Z B^T, \tag{8}$$

где P – матрица весов измерений; B – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок для измерений, связанных с исходными пунктами, ошибки которых требуется учесть; Q_Z – специальная матрица, предложенная Ю.И. Маркузе.

Главная псевдообратная матрица A^+ наиболее часто используется в уравнительных вычислениях при математической обработке геодезических сетей, не содержащих исходные пункты, а также геодезических построений с дефектом конфигурации или дефектом построения. Чтобы решать указанные здесь задачи с помощью расширенной псевдообратной матрицы, необходимы формулы перехода от матрицы F к матрицам A^+ и $R^+ = (A^T PA)^+$.

Основная часть. Предположим, что дана геодезическая сеть, для которой известны матрицы A и P при параметрическом способе уравнивания.

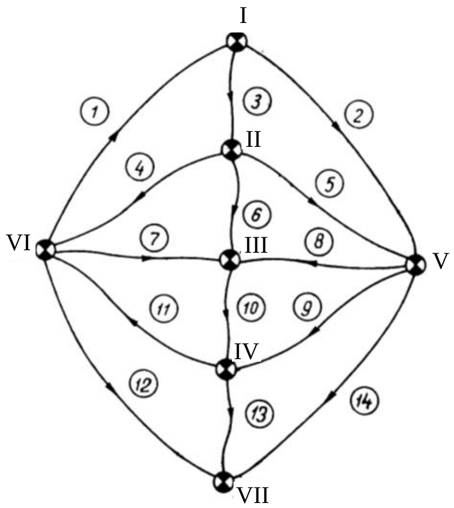

Схема нивелирной сети

Нетрудно доказать, что справедливо равенство:

$$A^+ = (A^T PA)^{-1} A^T P^{\frac{1}{2}} = FP^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Эта формула имеет большое практическое значение, так как не требует применения процедуры pinv в математическом пакете MATLAB.

Для того чтобы найти $R^+ = (A^T PA)^+$, предлагаем формулу:

$$R^+ = A^+ (A^+)^T. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) позволяют, зная F, найти A^+ и R^+.

Приведем числовой пример.

На рисунке показана нивелирная сеть, содержащая 14 превышений, один исходный пункт (№ I) и шесть определяемых пунктов (II…VII).

Матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок будет такой:

$$A = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Диагональная матрица весов измерений будет иметь вид:

$$P = diag(1 \quad 2 \quad 3 \quad ...13 \quad 14).$$

Матрица коэффициентов нормальных уравнений будет такой:

$$R = \begin{matrix} 18 & -6 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ -6 & 31 & -10 & -8 & -7 & 0 \\ 0 & -10 & 43 & -9 & -11 & -13 \\ -5 & -8 & -9 & 38 & 0 & -14 \\ -4 & -7 & -11 & 0 & 35 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -14 & -12 & 39 \end{matrix}$$

Расширенная псевдообратная матрица F будет иметь вид:

–0.1522	0.2981	0.5498	–0.1244	–0.1711	–0.1548	0.0371	0.0673	0.0305	–0.0503	–0.0030	–0.0123	–0.0169	0.0292
–0.1791	0.3485	0.4724	0.0865	0.0841	0.3018	0.2007	0.2679	0.0948	–0.2296	–0.0628	0.0021	–0.0720	0.0699
–0.1854	0.3573	0.4573	0.1318	0.1312	0.1942	–0.0041	0.0490	0.2704	0.2392	–0.2568	0.0645	–0.2336	0.1691
–0.1700	0.3829	0.4471	0.0837	0.2121	0.1514	0.0302	–0.1375	–0.1151	0.0440	–0.0959	0.1275	0.0248	–0.1523
–0.2036	0.3399	0.4565	0.2059	0.0890	0.1616	–0.1718	0.0731	0.1388	0.0629	0.2007	–0.2180	0.0010	0.2170
–0.1855	0.3612	0.4534	0.1373	0.1473	0.1688	–0.0434	–0.0106	0.0915	0.1149	–0.0583	0.3079	0.2647	0.4274

Зная F, можно получить по формуле (9) A^{+}:

–0.1522	0.2108	0.3174	–0.0622	–0.0765	–0.0632	0.0140	0.0238	0.0102	–0.0159	–0.0009	–0.0036	–0.0047	0.0078
–0.1791	0.2465	0.2727	0.0433	0.0376	0.1232	0.0759	0.0947	0.0316	–0.0726	–0.0189	0.0006	–0.0200	0.0187
–0.1854	0.2527	0.2640	0.0659	0.0587	0.0793	–0.0015	0.0173	0.0901	0.0756	–0.0774	0.0186	–0.0648	0.0452
–0.1700	0.2708	0.2581	0.0418	0.0949	0.0618	0.0114	–0.0486	–0.0384	0.0139	–0.0289	0.0368	0.0069	–0.0407
–0.2036	0.2404	0.2635	0.1029	0.0398	0.0660	–0.0649	0.0258	0.0463	0.0199	0.0605	–0.0629	0.0003	0.0580
–0.1855	0.2554	0.2618	0.0687	0.0659	0.0689	–0.0164	–0.0037	0.0305	0.0363	–0.0176	0.0889	0.0734	0.1142

Матрица R^{+}, найденная по формуле (10), будет следующей:

	0.1833	0.1575	0.1524	0.1490	0.1522	0.1511
	0.1575	0.2078	0.1848	0.1743	0.1791	0.1793
$Q = R^{-1}$	0.1524	0.1848	0.2087	0.1787	0.1854	0.1908
	0.1490	0.1743	0.1787	0.1915	0.1700	0.1806
	0.1522	0.1791	0.1854	0.1700	0.2036	0.1855
	0.1511	0.1793	0.1908	0.1806	0.1855	0.2111

Поскольку матрица R для нашей нивелирной сети не особенная, то $Q=(R)^{-1}=R^{+}=A^{+}(A^{+})^{T}$.

В **заключение** отметим, что формулы (9) и (10) являются универсальными и могут быть применены при уравнивании любых геодезических сетей, минуя нахождение A^{+} и R^{+} по специальным программ. Отметим, что определенный интерес имеет формула $A=P^{-\frac{1}{2}}(FP^{-\frac{1}{2}})^{+}$, позволяющая находить исходную матрицу A по значениям матрицы F, коэффициенты которой получены численным методом по формуле Ю.П. Андреева $F_{k,i}=\frac{(\hat{X}_i)_k-(\hat{X})_k}{\delta_i}$, в которой $\hat{X}$, $\hat{X}_i$ – уравненные координаты пунктов до и после изменения i-го измерения на малую величину δ_i.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко, В.А. Уравнивание нивелирных сетей с поиском грубых ошибок измерений / В.А. Бондаренко, В.И. Мицкевич, Н.С. Сырова // Геодезия и картография. – 2003. – № 5. – С. 26 – 28.
2. Мицкевич, В.И. Обобщение вариационного метода регуляризации на основе Lp-оценок при математической обработке плановых геодезических сетей / В.И. Мицкевич, Н.С. Сырова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия B. Прикладные науки. – 2006. – № 3. – С. 107 – 110.
3. Гармаза, О.Е. Автоматизированные методы, реализующие коррелатный способ уравнивания плановых и высотных геодезических сетей / О.Е. Гармаза, В.Е. Плюта, Н.С. Сырова // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Прикладные науки. – 2007. – № 6. – С. 125 – 127.
4. Основы линеаризованного метода многокритериальной оптимизации / В.В. Ялтыхов [и др.] // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия F. Прикладные науки. – 2007. – № 12. – С. 128 – 134.

Поступила 15.04.2011

RELATIONSHIP OF EXTENSIONS AND THE MAIN PSEUDOINVERSES FOR ADJUSTMENT OF GEODETIC NETWORKS

N. SIROVA

In the mathematical processing of geodetic networks using the extended and main pseudoinverses matrix. The extended matrix is computed using a special formula without the use of pseudoinverse. With its calculation is generally used well-known algorithm for matrix inversion. To calculate the principal elements of the pseudoinverse is used pinv standard feature in the mathematical package Matlab. In this article we propose formulas for the transition from extended to primary pseudoinverse matrix. Applying these formulas do not pseudoinverse is required, and use the procedure for matrix inversion, which can calculate either the standard program or the standard functions inv in the mathematical package Matlab. Formula given in the article can make a universal program of equalization and estimate of the accuracy of free, non-free and zero-free geodetic networks with or without defects in the configuration or construction defects.