

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

УДК 624.014

МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ НЕСУЩИЕ КОНСТРУКЦИИ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ

канд. техн. наук, доц. **В.Н. КИСЕЛЕВ**, канд. техн. наук, доц. **Ю.В. ПОПКОВ**, **В.И. АТРАХИМОВИЧ**
(Полоцкий государственный университет)

В статье представлено решение задачи расчёта несущих металлических конструкций двутаврового профиля при локальных нагрузках, учитывающее распределяющее действие пояса на стенку. Рассмотрен случай воздействия на пояс тонкостенного стержня-балки касательной сосредоточенной нагрузки. Положенные в основу расчётные предпосылки отличаются принципиально новым и оригинальным подходом, предпринятые с целью усовершенствования данной теории, стремясь к некоторым упрощениям, но сохраняя при этом строгость и основополагающую физическую сущность напряжённо-деформированного состояния.

Рассмотрим случай воздействия на пояс двутавровой балки сосредоточенной касательной силы. Изложение данного вопроса является логическим продолжением цикла опубликованных ранее работ, посвящённых исследованиям тонкостенных металлических стержней [1 – 6]. Эта задача принципиально

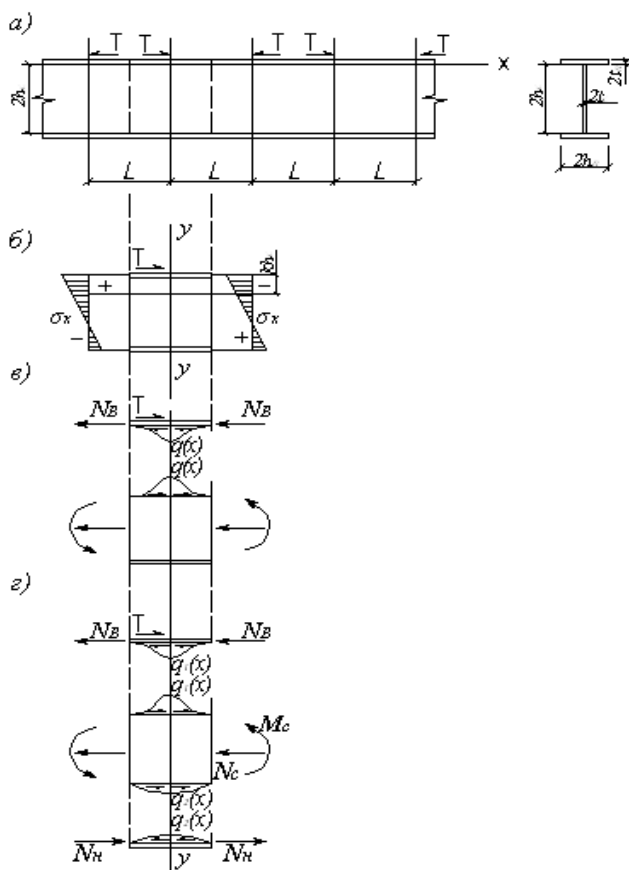


Рис. 1. Расчётная схема тонкостенного стержня-балки двутаврового профиля, нагруженного сосредоточенными касательными силами

Нормальные силы в поясах в этих сечениях:

$$N_1 = \pm 0,5T\alpha_1; N_2 = \mp 0,5T\alpha_2, \quad (2)$$

где
$$\alpha_1 = \frac{F_1}{F} + k^2 \frac{h_c^2 F_1}{J} = \frac{F_1}{F} + \frac{J_1}{J}; \quad \alpha_2 = -\frac{F_2}{F} + \frac{k}{2-k} - \frac{J_2}{J}. \quad (3)$$

отличается от задачи Б.М. Броуде [1]. В самом деле, в последней, вполне допустимо игнорирование нормальных давлений $\bar{p}(x)$, возникающих между стенкой и ненагруженным поясом, т. е. принятие граничного условия $\sigma_y = 0$ при $y = -h_c$. В рассматриваемой же задаче о касательной силе пренебречь по аналогии усилиями $q_2(x)$ (рис. 1) нельзя, т. е. нельзя положить, что $\tau_{xy} = 0$ при $y = -h_c$. В этом можно убедиться из рассуждений, основанных на условии равновесия. Действительно, для произвольного двутавра, имеющего одну плоскость симметрии, которая совпадает со срединной плоскостью стенки, и площади сечения: F – общую, F_c – стенки, F_1 и F_2 – загруженного и незагруженного поясов, положение центральной оси определяется параметром:

$$k = \frac{F_c + 2F_2}{F}. \quad (1)$$

Тогда в сечениях $x = \pm L/2$, в которых в силу периодичности $q_1 = q_2 = 0$, нормальные напряжения в поясах при элементарном подходе будут:

в верхнем:

$$\sigma_x = \pm \frac{T}{2} \left(\frac{1}{F} + \frac{k^2 h_c^2}{J} \right);$$

в нижнем:

$$\sigma_x = \mp \frac{T}{2} \left(\frac{1}{F} - \frac{k(2-k)h_c^2}{J} \right);$$

В этих формулах J, J_1, J_2 – моменты инерции всего сечения, загруженного и незагруженного поясов относительно главной центральной оси.

Согласно условию равновесия по рисунку 1 имеем:

$$\left. \begin{aligned} N_1 = N_B = \pm 0,5T \left(1 - \frac{2}{T} \int_0^{0,5L} q_1 x dx \right); \\ N_2 = N_H = \mp \int_0^{0,5L} q_2 x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = 1 - \frac{2}{T} \int_0^{0,5L} q_1 x dx; \quad \alpha_2 = \frac{2}{T} \int_0^{0,5L} q_1 x dx \quad (5)$$

и равнодействующие касательных усилий $q_1 x$ и $q_2 x$, которые развиваются на кромках стенки в искомом интервале, будут равны:

$$\left. \begin{aligned} T_{q1} = 2 \int_0^{0,5L} q_1 x dx = T (1 - \alpha_1); \\ T_{q2} = 2 \int_0^{0,5L} q_2 x dx = T \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отсюда видно, что допущение $q_2 = 0$ приводит к $\alpha_2 = 0$ и $N_2 = 0$ и, следовательно, исключает из работы на общий изгиб нижний пояс, превращая тем самым двутавр в тавр. Принятие же $T_{q1} = T$ приводит к $\alpha_1 = 0$ и $N_1 = 0$, т.е. исключает из работы верхний пояс, что равноценно или опиранию стержня на сплошное жесткое основание всем нижним поясом, или отнесению нижнего пояса на бесконечность (в обоих случаях исключается общий изгиб стержня). Таким образом, в этой задаче необходимо одновременно определить $q_1(x)$ и $q_2(x)$.

Рассматривая ввиду малой толщины стенки напряженное состояние в ней как плоское, введем периодическую функцию напряжений

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y \sin[2n-1 \varepsilon],$$

где $\varepsilon = \pi x/L$, подчиненную бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 F = 0, \quad (7)$$

которое получает вид:

$$\frac{\pi^4}{L^4} \sum_{n=1}^{\infty} f_n y (2n-1)^4 \sin[2n-1 \varepsilon] - 2 \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f_n y}{\partial y^2} (2n-1)^2 \sin[2n-1 \varepsilon] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^4 f_n}{\partial y^4} \sin[2n-1 \varepsilon] = 0.$$

Для определения функций $f_n y$ следует воспользоваться линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 f_n y}{\partial y^4} - 2 \frac{\pi^2}{L^2} (2n-1)^2 \frac{\partial^2 f_n y}{\partial y^2} + \frac{\pi^4}{L^4} (2n-1)^4 f_n y = 0.$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$f_n y = C_{1n} e^{2n-1 \zeta} + C_{2n} e^{-2n-1 \zeta} + y (C_{3n} e^{2n-1 \zeta} + C_{4n} e^{-2n-1 \zeta}),$$

где $\zeta = \pi/L y$, C_{in} – произвольные постоянные, определяемые граничными условиями.

Таким образом, функция напряжений получает вид:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n} e^{2n-1 \zeta} + C_{2n} e^{-2n-1 \zeta} + y C_{3n} e^{2n-1 \zeta} + C_{4n} e^{-2n-1 \zeta} \right] \sin [2n-1 \varepsilon], \quad (8)$$

а определяемые ею напряжения запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(C_{1n} \frac{2n-1^2 \pi^2}{L^2} \right) + 2C_{3n} \frac{(2n-1)}{L} e^{2n-1 \zeta} + \left(C_{2n} \frac{2n-1^2 \pi^2}{L^2} - 2C_{4n} \frac{2n-1 \pi}{L} \right) e^{-2n-1 \zeta} + \right. \\ &+ y \left(C_{3n} \frac{2n-1^2 \pi^2}{L^2} e^{2n-1 \zeta} + C_{4n} \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{L^2} e^{-2n-1 \zeta} \right) \cdot \sin [2n-1 \varepsilon]; \\ \sigma_y &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1^2 \pi^2}{L^2} f_n y \sin [2n-1 \varepsilon]; \\ \tau_{xy} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1 \pi}{L} \cdot \left[\left(C_{1n} \frac{(2n-1)}{L} + C_{3n} \right) e^{(2n-1) \zeta} - \left(C_{2n} \frac{(2n-1)}{L} - C_{4n} \right) e^{-(2n-1) \zeta} + \right. \\ &+ y \left(C_{3n} \frac{(2n-1)}{L} e^{(2n-1) \zeta} - C_{4n} \frac{(2n-1)}{L} e^{-(2n-1) \zeta} \right) \left. \right] \cdot \cos [(2n-1) \varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Положим, что касательные давления поясов на кромки стенки представляются рядами:

$$\left. \begin{aligned} q_1 x &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n} \cos [2n-1 \varepsilon]; \\ q_2 x &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{2n} \cos [2n-1 \varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Используя теперь граничные условия в форме:

$$\text{при } y = 0 \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{q_1 x}{2t_c};$$

$$\text{при } y = 2h_c \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{q_2 x}{2t_c},$$

получим выражения постоянных C_{in} через коэффициенты рядов (8):

$$\left. \begin{aligned} C_{3n} &= \frac{h_c}{t_c \gamma_n D_n} \alpha_n q_{1n} - b_n e^{-\gamma_n} q_{2n}; \\ C_{4n} &= \frac{h_c}{t_c \gamma_n D_n} b_n q_{1n} - \alpha_n e^{\gamma_n} q_{2n}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} D_n &= 2 + 4\gamma_n^2 - e^{2\gamma_n} - e^{-2\gamma_n}; \\ B_n &= \gamma_n (e^{\gamma_n} - e^{-\gamma_n}); \\ \alpha_n &= e^{-2\gamma_n} + 2\gamma_n - 1; \\ b_n &= e^{2\gamma_n} - 2\gamma_n - 1; \\ \gamma_n &= \frac{2\pi h_c}{L} (2n-1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для определения коэффициентов q_i необходимо рассмотреть условие связности деформаций в местах соединения стенки с поясами. В своей задаче Б.М. Броуде [1] сравнивал вертикальные смещения стенки и пояса, в рассматриваемом же случае, сообразуясь с направлением загрузочной силы, следует сравнивать горизонтальные смещения или деформации.

Для стенки имеем увеличенную в E раз деформацию:

$$E\varepsilon_x^{cm} = \sigma_x - \nu\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

где F – функция напряжений (8).

Учитывая выражения напряжений по (7), а также (9), получим на кромках стенки:

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_{x1}^{cm} &= \frac{1}{t_c} \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n}\rho_n + q_{2n}\eta_n \sin[2n-1 \varepsilon]; \\ E\varepsilon_{x2}^{cm} &= \frac{1}{t_c} \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n}\eta_n + q_{2n}\rho_n \sin[2n-1 \varepsilon], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\rho_n = \frac{e^{2\gamma n} - e^{-2\gamma n} - 4\gamma n}{e^{2\gamma n} + e^{-2\gamma n} - 4\gamma_n^2 - 2};$$

$$\eta_n = 2 \frac{e^{-\gamma n} - e^{\gamma n} \gamma n - e^{-\gamma n} - e^{\gamma n}}{e^{2\gamma n} + e^{-2\gamma n} - 4\gamma_n^2 - 2}.$$

Для отыскания выражений продольных деформаций поясов отделим их от стенки. При этом сосредоточенную силу T на загруженном поясе распределим на некотором малом участке $c \leq x < c$ равномерно (рис. 2), представив интенсивность нагрузки рядом

$$T x = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n \cos[2n-1 \varepsilon],$$

где

$$\bar{q}_n = \frac{2T}{\pi c} \frac{1}{2n-1} \sin\left[2n-1 \frac{\pi c}{L}\right]. \quad (14)$$

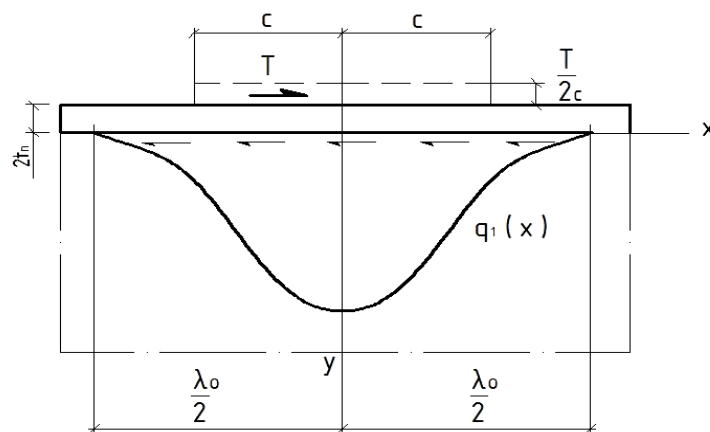


Рис. 2. Расчётная схема распределяющей силы T

Продольные силы в поясах могут быть выражены так:

$$N_1 \llcorner \int_0^x T \llcorner dx - \int_0^x q_1 \llcorner dx; \quad N_2 \llcorner \int_0^x q_2 \llcorner dx.$$

Тогда деформации поясов:

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_{x1}^n &= \frac{L}{\pi F_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{q}_n - q_{1n}}{2n-1} \sin[2n-1 \varepsilon]; \\ E\varepsilon_{x2}^n &= \frac{L}{\pi F_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{2n}}{2n-1} \sin[2n-1 \varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Приравнявая теперь деформации кромок стенки соответствующим деформациям поясов (15) и рассматривая равенства коэффициентов рядов, приходим к системе уравнений:

$$q_{1n}\rho_n + q_{2n}\eta_n = d_{1n} \bar{q} - q_{1n} ;$$

$$q_{1n}\eta_n + q_{2n}\rho_n = d_{2n}q_{2n},$$

где

$$d_{in} = \frac{1}{2n-1} \varphi_i ; \quad \varphi_i = \frac{\pi F_i}{L t_c} .$$

Решая систему относительно q_{1n} и q_{2n} , учитывая (12) и переходя затем к пределу при $c \rightarrow 0$, получим окончательно ряды, дающие выражения касательных усилий взаимодействия между стенкой и поясами двутавра. Эти ряды имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} q_1 x &= \frac{2T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n - d_{2n}}{\rho_n - d_{1n}} \frac{d_{1n}}{\rho_n - d_{2n} - \eta_n^2} \cos[2n-1 \varepsilon]; \\ q_2 x &= \frac{2T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n d_{1n}}{\rho_n - d_{1n}} \frac{1}{\rho_n - d_{2n} - \eta_n^2} \cos[2n-1 \varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Вычислим равнодействующие давлений (14).

Получаем

$$T_{q1} = 2 \int_0^{0,5L} q_1 x dx = T (1 - \Delta_{p1}) ;$$

$$T_{q2} = 2 \int_0^{0,5L} q_2 x dx = T (1 - \Delta_{p2}) , \quad (17)$$

где

$$\Delta_{p1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} -1^{n+1} \frac{\rho_n \rho_n + d_{2n} - \eta_n^2}{[\rho_n + d_{1n} \rho_n + d_{2n} - \eta_n^2] 2n-1} ; \quad (18)$$

$$\Delta_{p2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} -1^{n+1} \frac{\rho_n + d_{1n} \rho_n + d_{2n} - \eta_n \eta_n - d_{1n}}{[\rho_n + d_{1n} \rho_n + d_{2n} - \eta_n^2] 2n-1} . \quad (19)$$

При вычислении равнодействующих учтено, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} . \quad (20)$$

В таблице 1 приведены численные значения величин

$$1 - \Delta_{p1} = \frac{T_{q1}}{T} \quad \text{и} \quad 1 - \Delta_{p2} = \frac{T_{q2}}{T}$$

для случая $\frac{2h_c}{L} = 1/6$ $\gamma_1 = \pi/6$ при различных мощностях поясов и толщин стенки. Сравнение этих величин по $1 - \Delta_{p1}$ со значениями $1 - \alpha_1$ и по $1 - \Delta_{p2}$ со значениями α_2 показывает их полное (до вычисленного четвертого знака после запятой) совпадение.

Таблица 1

Численные значения расчётных величин

Пояса		Стенка $2t_c$, мм	φ_1	φ_2	$1-\Delta_{p1}$	$1-\Delta_{p2}$
$F_1, \text{см}^2$	F_2/F_1					
25	0	10	0,2618	0	0,5000	–
	0	14	0,1870	0	0,5835	–
	1	10	0,2618	0,2618	0,5333	0,1333
	1	14	0,1870	0,1870	0,6098	0,1270
	5	10	0,2618	1,3090	0,5582	0,2326
	5	14	0,1870	0,9350	0,6350	0,2481
	9	10	0,2618	2,3560	0,5636	0,2536
	9	14	0,1870	1,9630	0,6411	0,2774
125	0	10	1,3090	0	0,1667	–
	0	14	0,9350	0	0,2188	–
	1/5	10	1,3090	0,2618	0,1861	0,0465
	1/5	14	0,9350	0,1870	0,2381	0,0496
	1	10	1,3090	1,3090	0,2017	0,0840
	1	14	0,9350	0,9350	0,2581	0,1008
	9/5	10	1,3090	2,3560	0,2051	0,0923
	9/5	14	0,9350	1,9630	0,2632	0,1139
255	0	10	2,3560	0	0,1000	–
	0	14	1,9630	0	0,1347	–
	1/9	10	2,3560	0,2618	0,1127	0,0282
	1/9	14	1,9630	0,1870	0,1480	0,0308
	5/9	10	2,3560	1,3090	0,1231	0,0513
	5/9	14	1,9630	0,9350	0,1620	0,0633
	1	10	2,3560	2,3560	0,1254	0,0546
	1	14	1,9630	1,9630	0,1656	0,0717

Оставляя анализ полученного решения до следующего пункта, приведем без вывода разложение нормального $p(x)$ и касательного $q(x)$ давлений нагруженного пояса на кромку стенки, полученное одно-временным сравнением вертикальных и горизонтальных смещений последней и пояса в предположении $F_2 = 0$ (тавр):

$$\left. \begin{aligned} q_1 x &= \frac{2T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \cos[2n-1 \varepsilon]}{D_n}, \\ p_1 x &= -\frac{2T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \sin[2n-1 \varepsilon]}{D_n}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$A_n = \left(\frac{t_1}{\omega_1} + \frac{1}{F_1} \right) K_n + \frac{t_c}{j_1} S_n;$$

$$B_n = \left(\frac{t_1}{\omega_1} + \frac{1}{F_1} \right) H_n + \frac{t_1}{j_1} G_n;$$

$$D_n = K_n G_n - H_n S_n;$$

$$K_n = -\frac{L}{\pi j_1 (2n-1)} + \frac{\pi^2}{L^2} (2n-1) \frac{\Psi_n}{t_c};$$

$$S_n = \frac{\pi}{L} (2n-1) \left[\frac{L^2}{\pi^2 \omega_1 (2n-1)^2} - \frac{\mu_n - \nu}{2t_c} \right];$$

$$H_n = -\frac{t_1}{j_1} + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\mu_n - \nu}{2t_c} (2n-1)^2;$$

$$G_n = \frac{1}{F_1} - \frac{t_1}{\omega_1} - \frac{\pi}{L} \frac{\rho_n}{t_c} (2n-1);$$

$$\Psi_n = \frac{e^{2\gamma n} - e^{-2\gamma n} + 4\gamma n}{e^{2\gamma n} + e^{-2\gamma n} - 4\gamma n - 2}; \quad \mu_n = \frac{e^{2\gamma n} + e^{-2\gamma n} + 4\gamma^2 n - 2}{e^{2\gamma n} + e^{-2\gamma n} - 4\gamma^2 n - 2}.$$

В этих выражениях F_1 , t_1 , F_1 и j_1 – соответственно площадь сечения, толщина, собственный момент инерции загруженного пояса; ν – коэффициент Пуассона, γ_n и ρ_n выражаются так же, как в (10) и (11).

Исследование сходимости рядов (14) показывает, что первый из них сходится очень медленно. Выделив медленно сходящуюся часть, его можно переписать так:

$$q_1(x) = \frac{2T\alpha_1}{L} \left[\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} - \alpha_1 \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - |\varepsilon| \right) \right] + \alpha_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\varepsilon}{(2n-1)^2 \alpha_1 + (2n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(1-\rho_n) + \alpha_3 \cos (2n-1)\varepsilon}{\alpha_1 + (2n-1) \alpha_1 + \rho_n(2n-1) - \alpha_3}, \quad (22)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{\varphi_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\varphi_2}; \quad \alpha_3 = \frac{\eta_n^2 (2n-1)^2}{\alpha_2 + (2n-1)\rho_n}.$$

В этой форме для получения высокой точности достаточно взять по четыре члена каждой из сумм. Кроме того, с ростом n параметр ρ_n быстро стремится к единице, а η_n и $\alpha_n = \frac{\eta_n^2}{(\rho_n + d_{2n})}$ к нулю (табл. 2).

Практически можно принимать $\rho_n = 1$ и $d_n = 0$ уже при $n > 5$, а $\eta_n = 0$ при $n > 10$. Поэтому при практических вычислениях вместо второго ряда (14) можно брать конечную сумму, а первый ряд может быть значительно упрощен. Более обстоятельное исследование показывает, что в области $0 \leq |x| \leq 0,8h_c$ разница между суммами в (20) при двухстах и пятистах членах сказывается лишь в шестой значащей цифре после запятой, а сумма $\sum_{n=k}^{500}$ – составляет максимум (при $x = 0$): 4,4 % для $k = 3$; 1,5 % для $k = 5$ и 0,35 % для $k = 10$ по отношению к значению суммы при пятистах членах. На основании этого можно предложить при практических расчетах удерживать в первом ряду (20) три, а во втором – пять членов.

Таблица 2

Численные значения расчётных параметров

Параметр	L	при n равном							
	2h _c	1	2	3	4	5	6	8	10
ρ _n	6	3,8897	1,4861	1,1194	1,0279	1,0059	1,0011	–	–
	8	5,1454	1,8564	1,2856	1,1001	1,0337	1,0107	–	–
η _n	6	1,8922	0,5798	0,2832	0,1418	0,0672	0,0300	0,053	0,009
	8	2,5333	0,8074	0,4366	0,2602	0,1550	0,0900	0,0271	0,0074
d _n	6	0,2578	0,0698	0,0257	0,0082	0,0021	0,0005	–	–
	8	0,4237	0,1256	0,0580	0,0268	0,0112	0,0042	–	–

На рисунке 3 приведены в долях отношения T/L графики усилий $q_1(x)$ и $q_2(x)$ (сплошные линии), построенные для случая $2h_c/L = 1/6$ при некоторых значениях параметров φ_i (кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\varphi_i = 0,2; 0,4; 0,6$). Важным выводом из этих графиков является то, что распределе-

ние усилий $q_1(x)$ вдоль кромки стенки практически не зависит от значения φ_2 , т. е. от относительной мощности незагруженного пояса. Оно определяется лишь значением φ_1 .

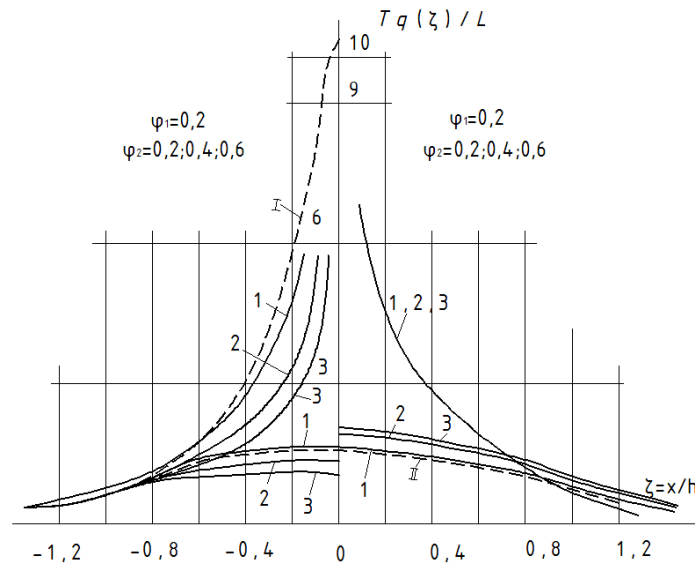


Рис. 3. График зависимости расчётных параметров

Уравнения (14) при $T = 1$ представляет собой функции влияния и может быть использовано для получения решений при произвольно распределенных касательных нагрузках. Например, применяя к нему формулу Грина, нетрудно получить следующие выражения касательных усилий взаимодействия поясов со стенкой для случаев:

а) когда к верхнему поясу на участке $-b \leq x \leq b$ приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q :

$$q_1(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho_n + d_{2n})d_{1n} \sin \theta_n \cos (2n-1)\varepsilon}{[(\rho_n + d_{1n})(\rho_n + d_{2n}) - \eta_n^2](2n-1)};$$

$$q_2(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n d_{1n} \sin \theta_n \cos (2n-1)\varepsilon}{[(\rho_n + d_{1n})(\rho_n + d_{2n}) - \eta_n^2](2n-1)}, \quad (23)$$

где $\theta_n = \frac{2\gamma_n h_c}{b}$;

б) когда к верхнему поясу на том же участке приложена линейная нагрузка, имеющая интенсивность $q = q_b$ в крайних точках участка $x = \pm b$ (т.е. нагрузка, распределенная по закону треугольников):

$$q_1(x) = \frac{4q_b L}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho_n + d_{2n})d_{1n} (\sin \theta_n - \theta_n \cos \theta_n) \sin (2n-1)\varepsilon}{[(\rho_n + d_{1n})(\rho_n + d_{2n}) - \eta_n^2](2n-1)};$$

$$q_2(x) = \frac{4q_b L}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n d_{1n} (\sin \theta_n - \theta_n \cos \theta_n) \sin (2n-1)\varepsilon}{[(\rho_n + d_{1n})(\rho_n + d_{2n}) - \eta_n^2](2n-1)^2}. \quad (24)$$

Исследование решений (21) и (22) показывает, что для достижения точности, необходимой при практических расчетах (5%), достаточно удерживать в рядах по пятьдесят членов. На рисунках 4 и 5 показаны эпюры касательных усилий взаимодействия для случая $c = b/h_c = 0,6$ при некоторых значениях параметров φ_i (на рисунке 5 приведены эпюры усилий по (21); на рисунке 6 – по (22)). Здесь также можно отметить, что влияние нижнего пояса практически не сказывается на усилиях $q_1(x)$.

Из таблицы 1 видно, что в реальных двутавровых стержнях, у которых поперечное сечение пояса, непосредственно воспринимающего нагрузку, не меньше, чем у свободного от нагрузки пояса, равнодействующая $T_{q_2} = T_{\alpha 2}$ составляет примерно 5 – 13% загрузочной силы T , а равнодействующая

$T_{q1} = T(1 - \alpha_1)$ – от 12 до 60 %. Для обоих поясов эти числа тем больше, чем слабее по отношению к стенке пояс, т. е. чем меньше параметры φ_i .

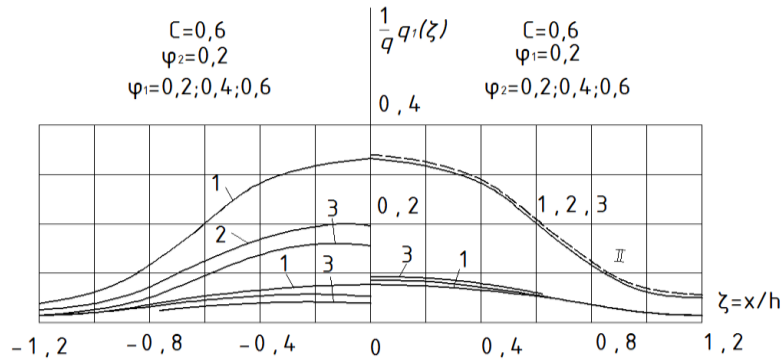


Рис. 4. Эпюры касательных усилий по (21)

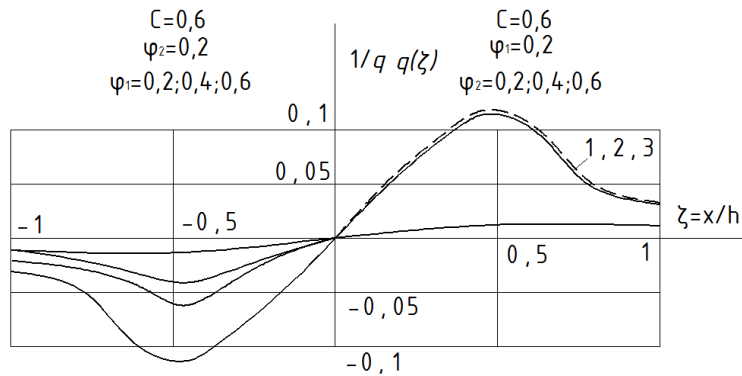


Рис. 5. Эпюры касательных усилий по (22)

Точные оценки в каждом частном случае можно получить на основании (3). Именно:

$$1 - \alpha_1 = 1 - \frac{F_1}{F} - \frac{j_1}{j}; \quad \alpha_2 = -\frac{F_2}{F} + \frac{k}{2-k} \frac{j_2}{j}.$$

Так как $\varphi_i = \frac{\pi F_i}{L t_c} = 2\pi \frac{2h_c}{L} \frac{F_i}{F} = 2\gamma_1 \frac{F_i}{F_c}$, то, например, для тавра ($F_2 = 0, k = F_c/F$) можно получить:

$$j_1 = F_1 k^2 h_c^2;$$

$$j = F_1 k^2 h_c^2 + F_c h_c^2 \left[\frac{1}{3} + (1-k)^2 \right] = F_1 h_c^2 \frac{k(4-3k)}{3(1-k)}.$$

Поскольку

$$F_c = F_1 \frac{k}{1-k};$$

и

$$k = \frac{F_c}{F} = \frac{F_c}{F_c + F_1} = \frac{2\gamma_1}{\varphi_1 + 2\gamma_1},$$

то

$$\frac{j_1}{j} = \frac{3\gamma_1 \varphi_1}{2\varphi_1^2 + 5\gamma_1 \varphi_1 + 2\gamma_1^2}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha_1 &= \frac{4\gamma_1^3 + 4\gamma_1^2 \varphi_1 + \gamma_1 \varphi_1^2}{4\gamma_1^3 + 12\gamma_1^2 \varphi_1 + 9\gamma_1 \varphi_1^2 + 2\varphi_1^3}; \\ \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Для симметричного двутавра ($F_1 = F_2$, $k = 1$) аналогично найдем:

$$1 - \alpha_1 = \frac{\gamma_1 (\gamma_1 + 2\varphi_1)}{\gamma_1^2 + 4\gamma_1\varphi_1 + 3\varphi_1^2};$$

$$\alpha_2 = \frac{\varphi_1 \gamma_1}{\gamma_1^2 + 4\gamma_1\varphi_1 + 3\varphi_1^2}. \quad (26)$$

Подобные же выражения нетрудно найти и для случая произвольного двутаврового сечения.

Перейдем к обсуждению возможных упрощений решения (14), так как непосредственное его использование в практических инженерных расчетах сопряжено с трудностями вычислительного порядка.

Отметим, что нетрудно получить удовлетворительную аппроксимацию выражения для $q_2(x)$ в следующей форме:

$$q_2(x) = q_2(0) \left(1 - 2 \frac{|x|}{\lambda_2} \right)^2, \quad (27)$$

где

$$q_2(0) = \frac{6T}{\lambda_2} \alpha_2, \quad (28)$$

а $\lambda_2 = 9,5h_c$ – некоторая условная длина участка распределения касательных усилий взаимодействия стенки с незагруженным поясом.

Возьмем, например, случай $2h_c/L = 1/6$ ($\gamma_1 = \pi/6$) и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,2$. Тогда по формуле (24) получим $\alpha_2 = 0,181$ и

$$q_2(0) = \frac{6T}{\lambda_2} \alpha_2 = q_2(0) = \frac{612T}{9,5L} 0,181 = 1,372 \frac{T}{L}.$$

Введем относительную координату $\xi = x/h_c$ и параметр

$$\bar{x}_2 = \frac{\lambda_2}{2h_c}. \quad (29)$$

Тогда (25) получает вид

$$q_2(\xi) = q_2(0) \left(1 - \frac{|\xi|}{\bar{x}_2} \right)^2; \quad (30)$$

без труда находим

$$q_2(0) = 1,262 \frac{T}{L}; \quad q_2(0,4) = 1,155 \frac{T}{L}; \quad q_2(0,8) = 0,948 \frac{T}{L}.$$

На рисунке 3 пунктиром построена соответствующая кривая II.

Аппроксимация для $q_1(x)$ встречается с серьезными трудностями, главным образом из-за безграничного возрастания этих усилий при $x \rightarrow 0$. Это не дает возможности выразить усилия через их значение при $x = 0$. Однако, имея в виду практические приложения и учитывая, что в реальных задачах нагрузка никогда не бывает сосредоточенной в математическом смысле, а всегда распределена на некотором участке, можно предложить выражение:

$$q_1(x) = q_1(0) \left(1 - 2 \frac{|x|}{\lambda_2} \right)^5 \quad (31)$$

или в относительных величинах координаты

$$q_1(\xi) = q_1(0) \left(1 - \frac{|\xi|}{\bar{x}_1} \right)^5, \quad (32)$$

где

$$q_1(0) = \frac{6E}{\lambda_1} (1 - \alpha_1); \quad (33)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\lambda_1}{2h_c}; \quad \lambda_1 = 4h_c. \quad (34)$$

В левой части рисунка 3 показана пунктиром кривая I, построенная по (30) для случая $\gamma_1 = \pi/6$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,2$. Она имеет достаточно заметное отклонение от кривой 1, соответствующей расчетным параметрам, и принципиально отличается от нее конечным значением ординаты при $x = 0$. Тем не менее можно показать, что на основе (29) или (30) с некоторой дополнительной корректировкой можно получить удовлетворительные аппроксимации усилий взаимодействия стенки с загруженным поясом для случая нагрузок, распределенных на некотором участке $2b$ при достаточно малых значениях параметра $c = b/h_c \geq 0,1$.

Отметим в заключение, что при превращении двутавра в тавр ($F_2 = 0$), будет $d_{2n} \rightarrow \infty$. Тогда из (14) получим $q_2(x) = 0$, а

$$q_1(x) = \frac{2T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\varepsilon}{1 + \rho_n \varphi_1(2n-1)}. \quad (35)$$

В этой форме ряд (33) совпадает с решением, полученным в [2].

Если, кроме того, устремить h_c к бесконечности, то на основании (10) будет $\gamma_n \rightarrow \infty$ и ρ_n будет стремиться к единице. Тогда из (33) получим ряд

$$q_1(x) = \frac{2T}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\varepsilon}{1 + \varphi_1(2n-1)}, \quad (36)$$

соответствующий случаю приложения касательной сосредоточенной силы к подкрепленной кромке упругой полуплоскости.

Следовательно, как показали проверки сходимости результатов решений задачи различными авторами, представленная методика расчёта несущих металлических конструкций двутаврового профиля при рассмотренных локальных нагрузках может быть использована в практических инженерных расчётах, однако не исключается при этом необходимость экспериментального подтверждения теоретических параметров напряжённо-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Броуде, Б.М. Распределение сосредоточенного давления в стальных балках / Б.М. Броуде. – М., 1950.
2. Малышкина, И.Н. Исследование напряженного состояния подкрановых балок / И.Н. Малышкина // Промышленное строительство. – 1966. – № 10. – С. 12 – 15.
3. Киселёв, В.Н. Расчёт тонкостенных металлических стержней / В.Н. Киселёв, Ю.В. Попков, В.А. Фетисов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2010. – № 12. – С. 57 – 63.
4. Киселёв, В.Н. Работа тонкостенных металлических стержней при стеснённом кручении / В.Н. Киселёв, Ю.В. Попков, В.И. Атрахимович // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2011. – № 8. – С. 33 – 36.
5. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М.: Стройиздат, 1940. – 278 с.
6. Папкович, П.Ф. Теория упругости / П.Ф. Папкович. – М.; Л., 1939. – 376 с.
7. Нормы проектирования. Стальные конструкции: СНиП II-23-81*. – М.: Госстрой СССР, 1982. – 96 с.
8. Еврокод 3. Проектирование стальных конструкций. Часть 1 – 1. Общие правила и правила для зданий: ТКП EN 1993-1-1: 2010. – Минск: Минкстройархитектура Респ. Беларусь, 2010. – 93 с.

Поступила 02.11.2011

WORK OF THIN-WALLED METAL RODS IN LOCALS FORCES

V. KISILEV, Y. POPKOV, V. ATRAKHIMOVICH

The analyses of existing methods of calculation of thin-walled rods of metal structures is made. Analysis indicates that the calculation is based on meeting the conditions of the strength of the efforts, or even the strain, but obtained through, efforts of the methods materials do not always provide the necessary reliability. The problem of finding the stresses in thin-walled rods is reduced to the problem of computing the plane stress state each to its constituent bands. Taking into account the efforts of the interaction determined by the conditions of the continuity of deformation in the ground sections.