528
М 70
1214010001947
НБ УО "ПГУ"

На правах рукописи

МИЦКЕВИЧ Валерий Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Специальность 25.00.32 – Геодезия

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2004

УДК 528.063.51-7(0.=3:
М 70

Работа выполнена в Полоцком государственном университете.

Научный консультант –

доктор технических наук, профессор

В.П.Подшивалов

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор

Б.Е.Иванов

доктор технических наук, профессор

Г.В.Макаров

доктор технических наук, профессор

Ю.И.Маркузе

Ведущая организация **– Центр геоинформатики и прикладной геодезии «Сибгеоинформ».**

Защита диссертации состоится 25 ноября 2004 г. в 13 ч на заседании диссертационного совета Д 212.224.08 при Санкт-Петербургском государственном горном институте имени Г.В.Плеханова (техническом университете) по адресу: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, дом 2, ауд. № 1303.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного горного института.

Автореферат разослан 13 октября 2004 г.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
диссертационного совета
к.т.н., доцент **Ю.Н.КОРНИЛОВ**

528
М 70
1214010001947
НБ УО "ПГУ"

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Историческое развитие математической обработки геодезических измерений связано с именами таких великих ученых, как К. Гаусс, Ф. Гельмерт, Л. Крюгер, П. Лапласс, А.Лежандр. Научные градиции Гаусса в России продолжили А.П. Болотов, А.Н. Савич, И.И. Померанцев, В.В. Витковский и другие. Значительный вклад в развитие теоретического фундамента внесли такие видные ученые-геодезисты, как В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев, В.Н. Ганьшин, В.Г. Зданович, А.А. Изотов, Ф.Н. Красовский, Н.Г. Келль, Ю.В. Линник, А.И. Мазмишвили, М.С. Молоденский, В.В. Попов, К.Л. Проворов, Н.А. Урмаев, А.С. Чеботарев и другие. Сегодня эта отрасль науки получает дальнейшее развитие в трудах таких видных ученых-геодезистов, как И.Т. Антипов, В.А. Бывшев, А.А. Визгин, М.Д. Герасименко, В.В. Голубев, А.В. Гордеев, Н.Д. Дроздов, Г.Н. Ефимов, И.Г. Журкин, Ю.В. Кемниц, С.А. Коробков, В.А. Коугия, Ю.И. Маркузе, Г.В. Макаров, М.М. Машимов, Г.А. Мещеряков, Ю.М. Нейман, В.К. Панкрушин, А.З. Сазонов, А.А. Соломонов, М.С. Урмаев, З.С. Хаимов, З.М. Юршанский, З. Адамчевский, Х.Вольф, А. Тарци-Хорноха, Нгуен Данг Ви и многих других. Современное развитие науки и техники обеспечивает новые возможности решения задач геодезии и создает предпосылки к разработке новых методов их решения, применительно к современным измерительным технологиям и средствам вычислений. Это позволяет выполнять математическую обработку измерений, реализующую не только классические методы, но и другие, основанные на теории исследования операций. Такой подход расширяет возможности практического использования вероятно-статистических методов математической обработки наблюдений, в наибольшей степени учитываю-

щих разнообразие информации о характере формирования погрешностей измерений.

В связи с этим возрастает актуальность разработки путей реализации теоретических основ путем разработки алгоритмов и программ, обеспечивающих эффективное применение компьютерных технологий обработки различных по виду и точности геодезических измерений.

Цель диссертационной работы. Разработка эффективных методов математической обработки нелинейных параметрических уравнений, возникающих при уравнивании геодезических сетей на плоскости, эллипсоиде и в пространстве для создания современных компьютерных технологий предварительных, уравнительных и окончательных вычислений, являющихся основными этапами математической обработки геодезических измерений.

Идея работы. Заключается в демонстрации возможностей практической реализации методов математической статистики на основе компьютерных технологий математической обработки измерений, выполненных как традиционными, так и спутниковыми методами

Задачи исследований:

1. Автоматизация вычисления предварительных координат определяемых пунктов методами нелинейного программирования при минимуме исходной информации.
2. Получение оценок параметров уравнивания при разных законах распределения погрешностей измерений путем выбора критериальной функции и алгоритма ее минимизации.
3. Разработка адекватных уравниванию новых методов оценки точности полученных результатов.

Методы исследований. Базируются на теории вероятностей и математической статистике применительно к ограниченным выборкам, что требует исследования операций с привлечением методов условной и безусловной оптимизации. Инструментальной компьютерно-технической базой являлись персональные компьютеры IBM PC и язык программирования FORTRAN-77.

Защищаемые научные положения.

1. Универсальный способ решения засечек, не зависящий от комбинации измерений, как это было раньше, а также от поверхности относимости и размерности пространства, в которых развивалось данное построение с целью получения координат пунктов.
2. Обоснование перехода к нетрадиционным методам уравнивания, реализующим целевые функции.
3. Целевые функции для реализации многокритериальной оптимизации при уравнивании геодезических сетей с учетом закона распределения погрешностей измеренных величин.
4. Метод оценки точности результатов уравнивания для различных целевых функций и методов минимизации.

Научная новизна выполненной работы:

1. Разработана методология автоматизации методов нелинейного программирования применительно к решению геодезических засечек при минимуме исходной информации, основанная на нормирующих множителях.
2. Решена проблема решения больших систем линейных уравнений в вырожденных случаях.
3. Реализован метод штрафных функций с целью автоматизации вычисления координат геодезических построений на ЭВМ в случаях двойственного решения.
4. Разработана единая методология поиска координат пунктов не только на плоскости проекции, но и на эллипсоиде и в системе пространственных координат.
5. Предлагается осуществлять переход к методам математической обработки измерений путем выбора целевой функции, а не разработкой специальных алгоритмов уравнивания, как это было традиционно, например, при реализации метода наименьших модулей.
6. Разработаны целевые функции для реализации многокритериальной оптимизации при уравнивании геодезических измерений.
7. На основе универсальности методов нелинейного программирования предложено и осуществлено уравнивание геодезических сетей на поверхности трехосного эллипсоида.

8. Разработаны новые методы нелинейной оценки точности засечек и сетей на плоскости, любой поверхности и в пространстве, не зависящие от алгоритмов минимизации при различных целевых функциях.

Достоверность результатов исследований подтверждается вычислительными экспериментами на реальных производственных объектах и на модельных построениях, выполненными на ЭВМ.

Практическое значение диссертации:

Разработан комплекс программ GEOSET обработки плановых и высотных геодезических сетей на ПЭВМ типа IBM PC, который прошел практическую апробацию и внедрен в Белоруссии, России, Киргизии и Украине. Комплекс содержит 8802 оператора (строки) на языке FORTRAN-77 и охватывает все технологические процессы предварительных, уравнительных и окончательных вычислений.

Личный вклад: исследования, представленные в диссертационной работе, выполнены автором лично. Степень участия соискателя в работах, выполненных в соавторстве, равная.

Реализация результатов работы.

1. Разработаны алгоритм и программа решения засечек методами нелинейного программирования на ЭВМ, которые внедрены на производстве.
2. Методика многокритериальной оптимизации алгоритмизирована и реализована в программных продуктах для ЭВМ.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались автором:

1. на всесоюзной конференции “Совершенствование программы и схемы построения геодезических сетей”, г. Новосибирск, 1979 г.;
2. на международной конференции “Землеустройство: прошлое, настоящее, будущее”, г. Горки, 1999 г.;
3. на международной конференции “Геодезия, картография, кадастры и экология”, г. Новополоцк, 2000 г.

Публикации. Основные положения и результаты исследований по теме диссертации опубликованы в 1974 – 2003 гг. в 81 научной работе, в том числе 2 монографиях; 20 статьях в научных жур-

налах; 4 материалах научно-технических конференций и 55 депонированных работах.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения, содержит 153 страницы машинописного текста (в том числе 153 страницы основного текста, 50 таблиц, 37 рисунков, 1 приложение). Список использованных источников включает 138 наименований, из которых 109 на русском языке, а 29 – на других языках.

Во введении раскрыты сущность и содержание научной проблемы, обоснованы актуальность темы диссертации и ее научная новизна. Сформулирована цель работы, показана научная и практическая значимость проведенных исследований.

В первой главе "Современное состояние проблемы" проведен анализ состояния вопроса применения теории оптимизации при математической обработке геодезических измерений. Подчеркнуты роль и вклад российских ученых и ученых других стран, исследования которых положены в основу диссертационной работы.

Во второй главе "Вычисление предварительных координат пунктов методами нелинейного программирования" предложены теоретические основы создания универсальных методов решения геодезических засечек на плоскости, эллипсоиде и в пространстве, реализуемые на ЭВМ.

Третья глава "Уравнивание геодезических сетей методами нелинейного программирования" посвящена обобщению алгоритмических основ уравнивания применением соответствующих целевых функций.

Четвертая глава "Оценка точности результатов уравнивания методами нелинейного программирования" описывает универсальные методы оценки точности геодезических засечек и сетей, не зависящие от вида целевых функций и методов уравнивания.

Пятая глава "Технологический алгоритм по математической обработке линейно-угловых геодезических сетей на современных персональных ЭВМ" посвящена практической реализации теоретических разработок на различных объектах.

В заключении изложены основные результаты, полученные в диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

При изучении проблем экономики, планирования, управления, организации производства и других все более широкое применение находит научное направление, получившее название "исследование операций". При решении тех или иных задач каждое операционное исследование проходит три основных этапа:

1. Постановка задачи и построение математической модели изучаемого процесса или явления.
2. Анализ полученной модели и нахождение метода решения.
3. Реализация найденного решения и результатов исследований на практике.

Во многих случаях процесс формализации задачи осуществляется путем выбора соответствующего критерия эффективности решения, определяющегося целевой функцией и системой ограничений.

Большой класс геодезических задач, связанных с оптимальным планированием работ, проектированием геодезических сетей, разработкой рациональных методов обработки измерений и др., решается одним из математических аппаратов теории исследования операций – методом математического моделирования, который может быть реализован в полной мере с применением ЭВМ в метод математического программирования.

Если показатель эффективности решения является функцией переменных, а ограничения, определяющие область допустимых значений неизвестных, представляют собой линейные зависимости, то такие задачи решаются методами линейного программирования. Математический аппарат линейного программирования для уравнительных вычислений используется в основном при реализации метода наименьших модулей (МНМ). На возможность применения этого метода указывали еще Лаплас, Боскович (1757 г.) и Эджеворд (1887 г.). Но лишь с внедрением быстродействующих ЭВМ появились реальные предпосылки для привлечения этого метода к решению практических задач. Например, применению МНМ к уравниванию сетей посвящены исследования В.Г. Назаренко, В.И. Мудрова, В.Л. Кушко, Н.Т. Ковтун и др.

Известно, что широкий класс экстремальных задач решается методами нелинейного программирования, рассчитанного на тот случай, когда критерий эффективности решения и ограничения выражаются нелинейными зависимостями от параметров. При этом, исходя из типа задачи, используются методы выпуклого, квадратичного, сепарабельного, стохастического и целочисленного программирования. Наибольшее применение в практике геодезических вычислительных работ получил метод квадратичного программирования, рассчитанный на те случаи, когда целевая функция квадратична, а ограничения, которых может и не быть, линейны. Если рассматривается задача по отысканию экстремума квадратичной формы без ограничений, то оптимизация выполняется по методу наименьших квадратов (МНК), являющемуся частным случаем квадратичного программирования. Академик Л.В. Канторович впервые указал на возможность применения квадратичного программирования при математической обработке наблюдений.

В настоящее время при решении геодезических экстремальных задач используют квадратичное программирование главным образом для оптимального проектирования и уравнивания геодезических сетей. Н.А. Тараничев одним из первых предложил выполнять уравнивание геодезических сетей путем минимизации квадратичной формы способом Ньютона без составления и решения системы нормальных уравнений. Поскольку линеаризация нелинейных уравнений выполняется на каждой итерации, то в качестве начальных неизвестных координат определяемых пунктов используются достаточно грубые их значения, снятые с карты или схемы.

На необходимость корректного подхода при выборе начального приближения в процессе решения геодезических экстремальных задач по методу Ньютона указано также М.В. Красиковой. Некоторые особенности применения этого метода при решении систем нелинейных уравнений, возникающих в геодезии и фотограмметрии, отмечены Л.И. Пермитиной. Алгебраическая сущность метода наименьших квадратов при использовании модифицированного метода Ньютона в нелинейном случае уравнивания обоснована Ю.И. Маркузе. Особенности применения метода Ньютона – Гаусса для

целей обработки измерений по методу наименьших квадратов изложены Теуниссеном.

Применение квадратичного программирования для уравнивания геодезических сетей не ограничивается использованием метода Ньютона. Существуют и другие методы минимизации квадратичной формы, различающиеся по характеристикам эффективности их применения. Например, М.В.Красикова, Л. Грюндиг, К. Линквиц, Н. Саксена и др. применили для решения систем линейных уравнений метод сопряженных градиентов. Х.И. Тимов использовал для тех же целей способ Д. Била.

Методы уравнивания, основанные на теории математического программирования, обладают следующими положительными особенностями:

1. В методах математического программирования рассматриваются решения оптимизационных задач с ограничениями линейного и нелинейного характера в виде равенств или неравенств. Согласно исследованиям В.Г. Назаренко уравнивание высокоточных геодезических сетей методом квадратичного программирования на основе принципа наименьших квадратов с учетом ограничений на величины поправок в результаты измерений обеспечивает лучшее согласование поправок с их истинными значениями. К аналогичным выводам приходит Е.М. Крохмаль. Вопросам применения математического программирования в геодезии посвящены работы П.И. Барана.
2. Методы квадратичного программирования позволяют выполнять решение больших систем уравнений вычислительными алгоритмами, наиболее приспособленными к их реализации на ЭВМ. Примером могут служить различные градиентные методы: наискорейшего спуска; сопряженных градиентов; проекции градиента и др. При использовании двух последних разработаны также алгоритмы оценки точности результатов уравнивания.
3. Методы нелинейного программирования позволяют выполнять решение системы нелинейных уравнений без линеаризации исходных параметрических уравнений. В результате предварительные значения параметров в большинстве случаев могут быть получены без привлечения дополнительных сведений о геодези-

ческой сети. Это позволяет сократить объем исходной информации и способствует повышению качества программ, составленных для ЭВМ. Вычислению предварительных значений параметров из решения систем нелинейных уравнений посвящены исследования З. Адамчевского, М.В. Красиковой, Г.М. Гринберга, Н.А. Тараничева и др. Вопросы уравнивания и оценки точности геодезических сетей без линеаризации параметрических уравнений наиболее полно изложены в работах Ю.П. Андреева, Г.В. Макарова, З.М. Юршанского, З. Адамчевского и др.

4. Методами нелинейного программирования возможно уравнивание геодезических сетей не только по МНК, но и другим способом в соответствии с выбранной целевой функцией.

Результаты исследований, приведенные в диссертации по реализации методов нелинейного программирования при математической обработке геодезических измерений на стадии предварительных, уравнительных и окончательных вычислениях, заключаются в следующем.

1. Применение методов нелинейного программирования на этапе предварительных вычислений

На первом этапе обработки измерений с применением ЭВМ сложной в логическом отношении задачей является вычисление предварительных координат пунктов с использованием минимума исходной информации. Существующие способы решения, рассчитанные, как правило, на вычисление координат пунктов по необходимому количеству результатов измерений, разнообразны и зависят от метода определения пункта, размерности пространства, поверхности, на которой производятся вычисления. Большое разнообразие предложенных частных методов решения этой задачи указывает на необходимость разработки общих вычислительных алгоритмов.

Предположим, что для определения положения пунктов выбраны параметры T_i. Выражая результаты измерений через X_i в виде функций

$$T_i = \varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_t); \quad i = 1, \bar{N}$$

получим систему в общем случае нелинейных уравнений, которую представим в векторной форме

$$\varphi\ (\mathrm{X}) - \mathrm{T} = 0. \qquad (1)$$

В этом параметрическом уравнении связи в качестве неизвестных примем координаты определяемых пунктов. В зависимости от числа неизвестных t и количества результатов измерений N могут возникнуть различные ситуации:

- в некоторых случаях возможно однозначное решение при $N < t$, если доопределить систему (1) условиями, связывающими неизвестные X математическими соотношениями;
- если $N = t$, то система (1) является совместной, хотя иногда для получения однозначного решения (даже при $N > t$) необходимы ограничения на область допустимых значений X;
- при $N > t$ в результате неизбежных ошибок результатов измерений и погрешностей математической модели, связанных с определением вида функций $\varphi(\mathrm{X})$, получим переопределенную несовместную систему уравнений (1), не удовлетворяющую никакому вектору неизвестных X.

Во всех перечисленных случаях применимы методы нелинейного программирования, когда определяется вектор $\hat{\mathrm{X}}$, соответствующий минимуму целевой функции

$$\Phi(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 L_i^2(X), \qquad (2)$$

где

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \varphi(\mathrm{X}) - \mathrm{T}, \qquad (3)$$

c_i – нормирующие множители, устанавливаемые в зависимости от вида измеренных величин, ускоряющие процесс минимизации критериальной функции и увеличивающие область сходимости итераций.

Известно, что решение системы нелинейных уравнений при большом числе неизвестных представляет сложную задачу. Однако, ориентируясь на решение системы (3) под условием минимума функции (2) при обработке геодезических сетей, можно заметно об-

легчить численное отыскание экстремума, осуществляя процесс минимизации по группам неизвестных. В результате координаты пунктов будут определяться известным для геодезистов методом последовательной вставки пунктов с использованием методов нелинейного программирования, рассчитанных на минимизацию целевой функции при малом количестве параметров. Такой подход к решению задачи позволяет при использовании соответствующих методов нелинейного программирования и нормирующих множителей c_i находить начальные координаты алгоритмическим путем, например, как среднее арифметическое из координат исходных пунктов, смежных с определяемым, если в группу неизвестных включены координаты лишь одного пункта.

В тех случаях, когда программным путем не удается свести размерность задачи к минимальной и возникает необходимость совместного вычисления координат двух и более определяемых пунктов, то начальные координаты могут быть получены методом слепого поиска. На персональных компьютерах с тактовой частотой 500 МГц можно за реальное время получить начальные координаты однократной засечки, содержащей до 5 пунктов. После слепого поиска применяют методы нелинейного программирования без вычисления производных, например, метод релаксации. При такой постановке задачи в большинстве случаев возможно определение вектора X° без дополнительных априорных сведений о положении пунктов геодезической сети. Достигается это главным образом за счет использования нелинейных уравнений (3) без предварительной их линеаризации.

Когда решение геодезических засечек неоднозначно (например, при вычислении линейной засечки, задачи Лакруа, засечки Лёбеля и др.) вектор X° необходимо знать лишь с той точностью, чтобы координаты определяемых пунктов попали в область сходимости целевой функции к глобальному минимуму. При этом возникает задача минимизации с учетом ограничений на область допустимых значений параметров. Ее решение наиболее просто выполняется методом штрафных функций.

Нормирующие множители c_i, входящие в (2), находят с учетом градиентов функций $\varphi(X)$ под условием

$$c_i S_{ср.} \left\| \nabla \varphi_i (X_j) \right\| = 1, \qquad (4)$$

где $S_{ср.}$ – среднее, соответствующее классу или известное (измеренное) расстояние между пунктами геодезической сети, j – номер приближения.

Формулы для вычисления нормирующих множителей c_i приведены в табл.:

Таблица

Значения нормирующих множителей

Виды измерений	Нормирующие множители c_i
Прямое направление	1
Дирекционный угол	1
Горизонтальный угол	$S_{ср.} / S_{i,\,i+1}$
Расстояние	$1 / S_i$
Угол наклона	$2 / \mathrm{Sin}\, 2\nu_i$,

Здесь ν_i – измеренный угол наклона при $\nu_i \neq 0$.

Основные преимущества применения методов нелинейного программирования для вычисления координат пунктов на ПК заключаются в следующем:

1. По сравнению с методом вычисления координат по формулам различных засечек рационально используются избыточные измерения для обнаружения грубых ошибок в информации и обеспечения необходимой точности координат. Значительно расширены возможности алгоритма при обработке разнообразных геодезических построений. Достигается это тем, что избран подход к решению задачи, не зависящий от вида уравнений (3), а также способа определения пункта (т.е. допустима любая возможная комбинация результатов измерений), размерности пространства и вида поверхности, на которой производятся вычисления. Примером могут служить угловые засечки на плоскости (рис. 1, а) и пространственная засечка двух пунктов по четырем вертикальным и двум горизонтальным углам (рис. 1, б).

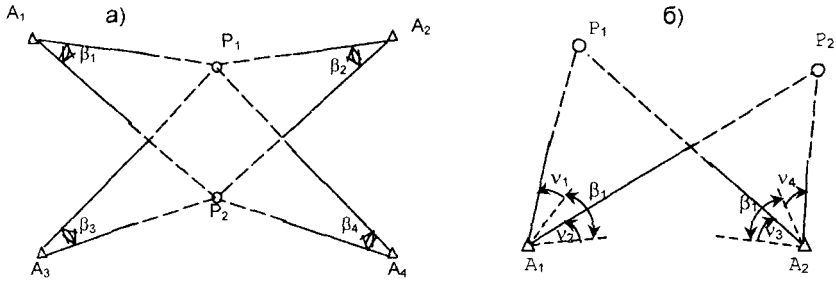

Рис. 1 Угловые засечки двух пунктов:
а – на плоскости; б – в пространстве

Данные засечки так же гармоничны, как и известная задача Ганзена, однако в отличие от нее не имеют замкнутого аналитического решения, т.е. не найдены еще аналитические выражения, по которым возможно вычисление координат пунктов P_1 и P_2 без итераций. Однако методами нелинейного программирования засечки решаются обычным путем. Эффективность метода становится тем выше, чем сложнее вид функций $\varphi(X)$ в уравнении (3). Особенно это заметно при обработке результатов измерений на поверхности трехосного эллипсоида.

2. По сравнению с методом, основанным на уравнивании геодезической сети с использованием линеаризованных параметрических уравнений, требуются меньшие затраты труда на подготовку данных для счета и используется минимальный объем исходной информации, так как начальные координаты могут быть получены программным путем. Кроме того, нелинейными методами можно решать засечки (рис. 2, 3), для которых линейная система нормальных уравнений вырождена.

Для выявления засечек, показанных на рис. 2-3, применены числа обусловленности и введено понятие “относительная обусловленность”.

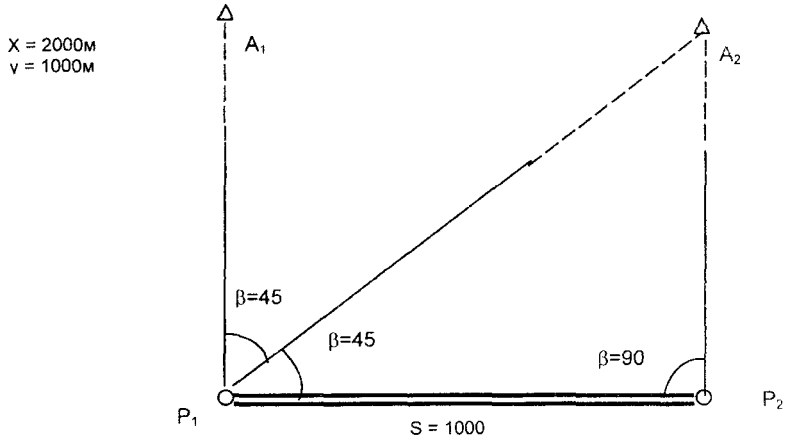

Рис. 2. Линейно-угловая засечка двух пунктов

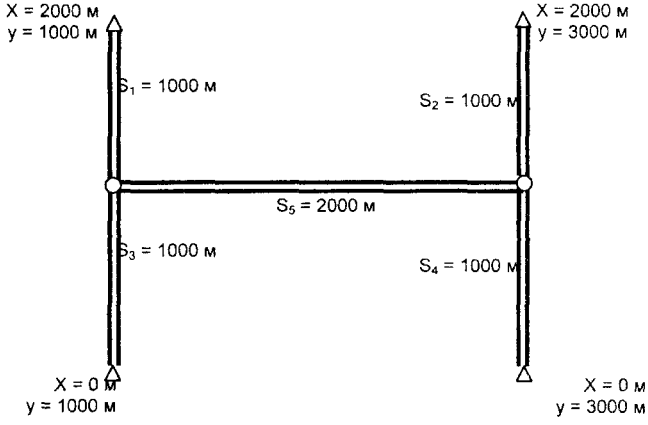

Рис. 3. Линейная засечка двух пунктов

3. Используется общий подход для решения засечек, обладающих свойством двойственности.

4. Избранный метод может быть применен на всех этапах обработки, что позволяет заметно упростить логическую структуру алгоритма.

2. Уравнивание геодезических сетей методами нелинейного программирования

Цель применения методов нелинейного программирования на этапе предварительных вычислений заключалась в поиске вектора координат определяемых пунктов X° с точностью, необходимой для последующего уравнивания геодезической сети с тем, чтобы процесс итераций был сходящимся к вектору оценок параметров $\hat{X}$. Если раньше применялась целевая функция (2), то теперь для решения системы (3) необходимо использовать другую целевую функцию

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \, L_i \, (X)^n, \qquad (5)$$

где $P_i = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_i}\right)^n$, σ – стандарт измерения, n – показатель степени (при $n = 1$ имеем МНМ, при $n = 2$ применяем МНК, возможны разные n ($1 \le n < \infty$). Очевидно, для уравнивания геодезических сетей под любым критерием оптимальности решения можно применять одни и те же методы нелинейного программирования, изменяя лишь вид целевой функции. При выборе алгоритма минимизации существуют ограничения в применении способов в зависимости от числа параметров t и быстродействия ПК. Если $t < 10$, то можно применять метод релаксации. При $t < 100$ рационально воспользоваться нелинейным методом Ньютона с повышенными требованиями о близости компонент вектора X° к $\hat{X}$. Алгоритм минимизации целевой функции (5) по методу Ньютона предусматривает итерационный процесс

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - H^{-1}(X^{(j)}) \, \nabla \Phi(X^{(j)}), \qquad (6)$$

где $X^{(j)}$ — вектор неизвестных в j-том приближении;

$$H(X^{(j)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_1 \partial x_t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_t \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi(X^{(j)})}{\partial x_t^2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Выражение (7) - матрица Гессе вторых частных производных, взятых в точке $X^{(j)}$, а градиент целевой функции выражается вектором

$$\nabla \Phi\left(X^{(j)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi\left(X^{(j)}\right)}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi\left(X^{(j)}\right)}{\partial x_t} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Квадратичные и смешанные вторые, а также первые частные производные предлагаем находить по следующим наилучшим из 16 формул выражениям

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_t^2} = \frac{1}{12\delta^2}\left(-\Phi_{2\delta,0} + 16\Phi_{\delta,0} - 30\Phi_{0,0} + 16\Phi_{-\delta 0} - \Phi_{-2\delta 0}\right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_1 x_t} = \frac{1}{4\delta^2}\left(\Phi_{\delta,\delta} - \Phi_{\delta,-\delta} - \Phi_{-\delta,\delta} + \Phi_{-\delta,-\delta}\right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_t} = \frac{1}{12\delta}\left(-\Phi_{2\delta,0} + 8\Phi_{\delta,0} - 8\Phi_{-\delta,0} + \Phi_{-2\delta,0}\right), \quad (11)$$

где $\Phi_{a\delta,b\delta} = \Phi\left(x_i + a\delta, \quad x_j + b\delta\right)$ – значения целевой функции, возмущенные малым приращением координат. Причем $\Phi_{0,0} = \Phi\left(X^{(j)}\right)$. Специальные исследования на различных объектах показали, что малый шаг δ будет оптимальным, если использовать выражение

$$\delta = 10^{(\lg .|x++10^{\frac{m}{3}-\frac{m}{3}})}, \tag{12}$$

где m – количество знаков в разрядной сетке представления координат x (в расчетах брали двойную точность, m = 16). Формулы (9) и (11) замечательны тем, что с их применением в вычислениях участвуют одни и те же значения целевой функции $\Phi_{a\delta,0}$.

Для целевой функции (5) в диссертации аналитически получена формула линеаризованного метода Ньютона

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \frac{1}{n-1}(A^T C_j A)^{-1} A^T C_j L(X^{(j)}), \tag{13}$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;

$$C_j = P_n (diag\, L(X^{(j)})^{n-2}), \tag{14}$$

P_n – диагональная матрица для указания веса результатов измерений, используемого в (5). Из анализа выражения (13) видно, почему нелинейный метод Ньютона с использованием формул (7) – (12) дает деление на ноль в МНМ при n = 1,0 и устойчив на отрезке $1{,}5 \le n \le 2{,}5$. При n = 2 формула (13) преобразуется в выражение

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T PA)^{-1} A^T PL, \tag{15}$$

соответствующее традиционному алгоритму МНК.

Если вместо (15) записать

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T CA)^{-1} A^T CL(X^{(j)}), \tag{16}$$

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - (A^T CA)^{-1} A^T CL(X^{(j)}), \qquad (16)$$

получим алгоритм Lp-оценок, работающий на интервале $1{,}0 \le n < \infty$. Экспериментальным путем доказано, что с применением критерия

$$\Phi(X^{(j+1)}) < \Phi(X^{(j)}) \qquad (17)$$

для продолжения итерации справедливо неравенство $j \le 6$.

Недостаток метода Lp-оценок заключается в постоянстве показателя степени n для всех разнородных результатов измерений. Для того чтобы в полигонометрии для углов применить одну степень, а для сторон – другую, нами предложена многостепенная целевая функция

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{K} \sum_{i=1}^{N_j} \frac{c_j^{n_j}}{\sigma_i^{n_j}} |L_i(X)|^{n_j}, \qquad (18)$$

где K – число групп измерений с разной степенью n;

$$c_j = \left(\frac{n_j^{\frac{2}{n_j}} \Gamma(\frac{3}{n_j})}{\Gamma(\frac{1}{n_j})} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (19)$$

с использованием гамма-функций. Формула в равенстве (18) для веса результатов измерений в многостепенном случае получена на основе исследований С.Д. Волжанина, И.В. Джуня, Ю.И. Маркузе и др. Минимизацию критериальной функции (18) мы осуществляли нелинейным методом Ньютона (формулы (7) – (12), хотя возможно применение других методов нелинейного программирования.

Если степени n_j определены не средствами математической статистики, а под условием минимума максимальной ошибки положения пункта в слабом месте, то получим многокритериальную оптимизацию, так как в поиске решения участвуют два критерия, выраженный в (18) и

$$\Phi_2(X) = \min(\max M) \tag{20}$$

Чтобы воспользоваться этим выражением на практике, необходимо учитывать особенности оценки точности результатов уравнивания при различных n.

3. Оценка точности результатов уравнивания методами нелинейного программирования

Если координаты пункта, определенного геодезической засечкой на плоскости, эллипсоиде или в пространстве, получены путем минимизации целевой функции (5), то эллипс (эллипсоид) погрешностей может быть найден по изолинии (изоповерхности) критериальной функции путем одномерной минимизации функции

$$G(X) = |\Phi(X) - \Phi(\hat{X}) - \Delta\Phi| \tag{21}$$

по полуосям эллипса (эллипсоида) ошибок. Направления полуосей также отыскиваются прямым поиском. Целевая функция (21) универсальна и позволяет находить длины полуосей при любом n в зависимости от выбора $\Delta\Phi$. Как доказано П. Веркмейстером (1920 г.), для среднего квадратического эллипса ошибок (n = 2,0) $\Delta\Phi = \mu^2$. Такой же результат получен Х. Вольфом (1968 г.) для среднего квадратического эллипсоида погрешностей.

Если координаты пунктов геодезической сети получены при $n = 2$ путем минимизации целевой функции (5), то гиперэллипсоид погрешности может быть определен в соответствии с теоремой Х. Вольфа (1968 г.)

$$\Phi(X) = \frac{N-t+1}{N-t}\sum_{i=1}^{N} P_i V_i^2 = const\,. \qquad (22)$$

Зная, что в точке минимума $V = L\left(\hat{X}\right)$, имеем

$$\Phi(\hat{X}) = \sum_{i=1}^{N} P_i V_i^2\,, \qquad (23)$$

далее найдем приращение критериальной функции из точки минимума до изоповерхности, соответствующей среднему квадратическому гиперэллипсоиду ошибок, определяя разность (22) – (23)

$$\Delta\Phi = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i V_i^2}{N-t} = \mu^2\,. \qquad (24)$$

Формулы (24) и (21) лучше (22), поскольку позволяют выполнять не только апостериорную, но и априорную оценку точности. Но найти полуоси гиперэллипсоида и их ориентировку прямым поиском проблематично.

После уравнивания геодезической сети фрагмент обратной матрицы весов для любого определяемого пункта можно получить способом, который был разработан З. Адамчевским (1971 г.) для метода наименьших квадратов и обобщен Г.В. Макаровым (1981 г.) для любой целевой функции. Сущность этого метода заключается в следующем:

1. Задают приращения δ в координаты для временно считающегося исходным определяемого пункта и вычисляют изменения целевой функции $\Delta\Phi$.
2. Находят фрагмент обратной матрицы

$$N_{11} = \frac{\Delta\Phi_1}{\delta_1^2}; \qquad N_{22} = \frac{\Delta\Phi_2}{\delta_2^2};$$

$$N_{12} = \frac{\Delta\Phi_{12} - \Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2}{2\delta_1\delta_2},$$

$$Q = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{25}$$

Приращения δ_i можно вычислить по формуле (12). Положительной особенностью этого метода является повышение эффективности его применения с увеличением t, но с его помощью нельзя получить полную матрицу Q. В последнем случае оценку точности можно выполнить на основе фундаментальной теоремы переноса ошибок, для которой справедливо равенство

$$Q = FP_n^{-1}F^T, \tag{26}$$

где F – матрица первых частных производных; P_n – диагональная матрица весов измерений при заданном n.

Матрицу F можно вычислить по формуле

$$F = (A^T CA)^{-1} A^T C, \tag{27}$$

где C определяется равенством (14).

Если (27) подставить в (26) и преобразовать матричное выражение, то получим известную формулу, опубликованную С.Д. Волжаниным (1984 г.)

$$Q = \Gamma^{-1} A^T DA\Gamma^{-1}, \tag{28}$$

где $\Gamma = A^T CA$ – информационная матрица Фишера;

$$D = P_n (diag|V_n{}^{2(n-2)}) . \qquad (29)$$

Формула (28) в вычислительном отношении является самой простой, т.к. матрицы Г и $A^T DA$ имеют гораздо меньший размер, чем матрица F. Однако равенство (26), в отличие от выражения (28), можно применять при многостепенной (многокритериальной) оптимизации. В этом случае матрицу F возможно получить по формуле Ю.П. Андреева следующим путем:

1. Вычисляют уравненные значения параметров $\hat{X}$.
2. Изменяя i-тое измерение на малую величину δ_i, вновь выполняют уравнивание, получая вектор оценок параметров $\hat{X}_i$.

Тогда элементы одного столбца матрицы F можно получить из выражения

$$F_{K,i} = \frac{(\hat{X}_i)_K - (\hat{X})_K}{\delta_i} . \qquad (30)$$

Для получения полной матрицы F этой формулой пользуются N раз. Для вычисления малого шага δ_i предлагаются вместо (12) формулы:

– для введения поправки в измеренную сторону

$$\delta_S = 10^{(\lg \sqrt{S} - \frac{m}{3})} , \qquad (31)$$

где S – длина стороны в метрах;

– для поправки в измеренное направление

$$\delta''_H = \frac{\delta_S \rho''}{S} . \qquad (32)$$

Если матрица Q известна, то оценку точности функций измеренных и уравненных величин можно выполнить при любом n по формулам

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}; \qquad \mu = \sqrt{\frac{V_n^T P_n \bar{V}_n}{N-t}}; \qquad \frac{1}{P_F} = fQf^T,$$

где f – вектор-строка коэффициентов весовой функции; $V_n = L(\hat{X})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты выполненных исследований заключаются в следующем:

1. На основе теории нелинейного программирования разработан универсальный метод вычисления координат, позволяющий находить их, используя минимум исходной информации [1, 2, 7].
2. Этот нелинейный метод распространен не только на решение по единому алгоритму засечек на плоскости, но и засечек на эллипсоиде и в системе пространственных координат [1, 2, 21].
3. Разработанный нелинейный алгоритм позволяет находить координаты из решения засечек группы пунктов без каких-либо сведений о начальных координатах определяемых пунктов [3, 10].
4. Для случаев, когда засечки имеют двойственность в решении, предложен способ их решения на основе теории штрафных функций [2].
5. Получены формулы для вычисления размера шага при численном отыскании первых и вторых частных производных в нелинейном методе Ньютона [7].
6. Показано, что нелинейный алгоритм позволяет находить решение в тех случаях, когда для линеаризованного варианта определитель системы линейных нормальных уравнений равен нулю [5, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20].
7. Предложены целевые функции, позволяющие выполнять уравнивание нелинейными методами с учетом закона распределения погрешностей измеренных величин [8].
8. Для случая определения одиночного пункта на поверхности или в пространстве разработан и экспериментально проверен метод

вычисления элементов эллипса или эллипсоида погрешностей по изолиниям или изоповерхностям целевой функции [4, 6].

9. Разработан нелинейный метод оценки точности геодезических сетей, не зависящий от вида целевой функции и алгоритма уравнивания результатов измерений [8].
10. Разработаны целевые функции, позволяющие выполнять многокритериальную оптимизацию при уравнивании геодезических построений [24].

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

Научные монографии:

1. Применение геодезических засечек, их обобщенные схемы и способы машинного решения / Баран П.И., Мицкевич В.И., Полищук Ю.В. и др. – М.: Недра, 1986. – 166 с.
2. Мицкевич В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования. – Новополоцк: ПГУ, 1997. – 64 с.

Научные статьи:

1. Мицкевич В.И. Вычисление различных видов засечек на ЭЦВМ методом сверхрелаксации // Геодезия и картография. – 1974. – № 10. – С. 36 – 40.
2. Мицкевич В.И. Общий алгоритм вычисления пространственных засечек на ЭВМ методом релаксации // Геодезия и картография. – 1978. – № 2. – С. 25 – 28.
3. Мицкевич В.И. Применение нелинейного программирования при обработке результатов геодезических измерений // Тез. докл. Всесоюзной конф. “Совершенствование построения геодезических сетей”. – Новосибирск, 1979. – С. 90 – 92.
4. Мицкевич В.И. Об оценке точности при определении положения пункта из решения системы нелинейных уравнений // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1980. – № 5. – С. 21 – 25.

5. Лапина А.В., Мицкевич В.И. Вычисление и предрасчет точности определения площадей // Геодезия и картография. – 1993. – № 8. – С. 59.
6. Мицкевич В.И., Абу Дака Имад. Оценка точности пространственных засечек методами нелинейного программирования // Геодезия и картография. – 1994. – № 1. – С. 22 – 24.
7. Мицкевич В.И., Хасан Ахмад Али. Исследование области сходимости при вычислении координат способом линеаризованных итераций // Геодезия и картография. – 1994. – № 6. – С. 14 – 16.
8. Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения // Геодезия и картография. – 1994. – № 7. – С. 14 – 16.
9. Мицкевич В.И. Исследование влияния некоторых ошибок на результаты уравнивания сплошных геодезических сетей // Геодезия и картография. – 1995. – № 3. – С. 11 – 13.
10. Мицкевич В.И. Исследование взаимосвязи чисел обусловленности // Геодезия и картография. – 1995. – № 1. – С. 8 – 11.
11. Мицкевич В.И., Маковский С.В. Оценка качества построения геодезических сетей с помощью относительной обусловленности // Геодезия и картография. – 1995. – № 11. – С. 16 – 17.
12. Зуева Л.Ф., Мицкевич В.И. Два способа учета ошибок исходных данных // Вести Полоцкого гос. ун-та. Прикладные науки. – 1995. – Т. 1, № 1. – С. 63 – 66.
13. Мицкевич В.И., Левданский П.М. К вопросу оценки качества построения геодезических сетей на ЭВМ // Геодезия и картография. – 1996. – № 6. – С. 19 – 21.
14. Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Особенности уравнивания геодезических сетей по методу наименьших модулей // Геодезия и картография. – 1997. – № 5. – С. 23 – 24.
15. Мицкевич В.И., Черкас Л.А. Анализ качества построения плановых геодезических сетей, характеризующихся плохо обусловленной матрицей нормальных уравнений // Материалы между-

нар. конф. “Землеустройство: прошлое, настоящее, будущее”, г. Горки, Республика Беларусь, 1999. – С. 242 – 243.

16. Бондаренко В.А., Зуева Л.Ф., Мицкевич В.И. Новый метод формирования начальной обратной матрицы при рекуррентном способе учета ошибок исходных данных // Вести Полоцкого гос. ун-та. – 2000. – С. 24–28.
17. Мицкевич В.И., Левданский П.М., Стержанов В.Г. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных геодезических сетей // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2 (4). – С. 35 – 36.
18. Левданский П.М., Мицкевич В.И., Стержанов В.Г. О вычислении начальных координат пунктов для получения однозначного решения в избранной системе отсчета при использовании различных методов уравнивания нуль-свободных геодезических сетей // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 3 (5). – С. 24 – 25.
19. Абу Дака Имад, Залесский М.А., Мицкевич В.И., Черкас Л.А. Проектирование GPS-сетей с применением относительной обусловленности // Геодезия и картография. – 2001. – № 8. – С. 14 – 16.
20. Мицкевич В.И., Строк А.В., Черкас Л.А. Взаимосвязь допусков на развитие геодезических сетей с допусками на относительную обусловленность, характеризующую качество построения этих сетей // Труды междунар. науч.-техн. конф. “Геодезия, картография, кадастры и экология”, Полоцкий гос. ун-т. - 2001. - С. 141 – 144.
21. Мицкевич В.И., Зуева Л.Ф., Черкас Л.А. Об оценке качества построения геодезических сетей, развитых на эллипсоиде вращения // Труды междунар. науч.-техн. конф. “Геодезия, картография, кадастры и экология”, Полоцкий гос. ун-т. – 2001. – С. 77 – 79.
22. Дегтярева Е.В., Мицкевич В.И. К вопросу применения матричной алгебры в уравнительных вычислениях // Геодезия и картография. – 2001. – № 11. – С. 25 – 26.

23. Синякина Н.В., Мицкевич В.И. Улучшение качества построения вытянутых и изломанных ходов полигонометрии посредством измерения замыкающих сторон // Вестник Брестского гос. техн. ун-та. – 2002. – № 1. – С. 129 – 131.
24. Мицкевич В.И., Скорик О.Г., Ялтыхов В.В. Поиск оптимальных весов результатов измерений в условиях многокритериальной оптимизации // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2003. – № 11. – С. 19.