12. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

12.1. Пересечение плоскости с поверхностью частного и общего положения

В пересечении поверхностей вращения плоскостью получаются различные плоские кривые линии, проекции которых строятся по проекциям ряда точек, определяемых соответствующими способами. При этом следует стремиться определить прежде всего так называемые характерные (опорные) точки фигуры сечения – верхние и нижние, т.е. точки наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций, и левые и правые, т.е. точки, лежащие на крайних образующих поверхностей. После этого определяется ряд промежуточных точек, которые затем соединяются с характерными плавной кривой линией.

В пересечении кругового цилиндра плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получаться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения цилиндра (рис. 12.1); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра под углом, отличным от прямого (рис. 12.2); прямоугольник, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 12.3).

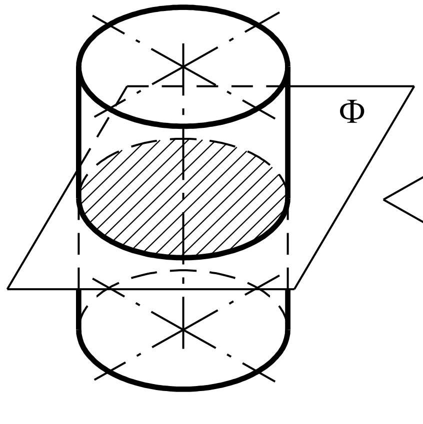

Рис. 12.1

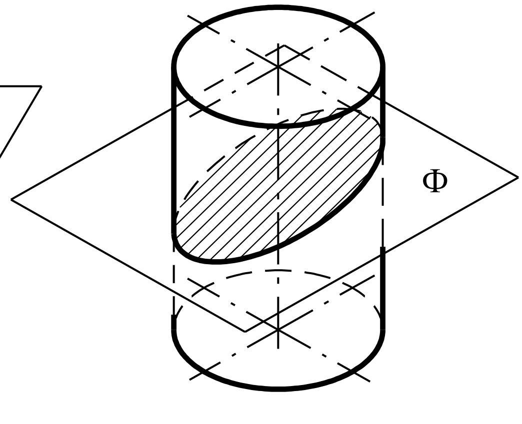

Рис. 12.2

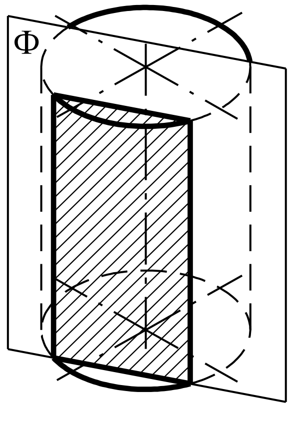

Рис. 12.3

Проекции фигуры сечения цилиндра плоскостью могут быть построены аналогично проекциям фигуры сечения призмы плоскостью. Для этого в цилиндр вписывается многогранная призма, находятся точки встречи ребер этой призмы с секущей плоскостью, которые соединяются плавной кривой линией. В случае, когда цилиндр прямой, построение проекций фигуры сечения может быть выполнено по другому.

На рис. 12.4 показано построение проекций фигуры сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения Ф, заданной треугольником АВС.

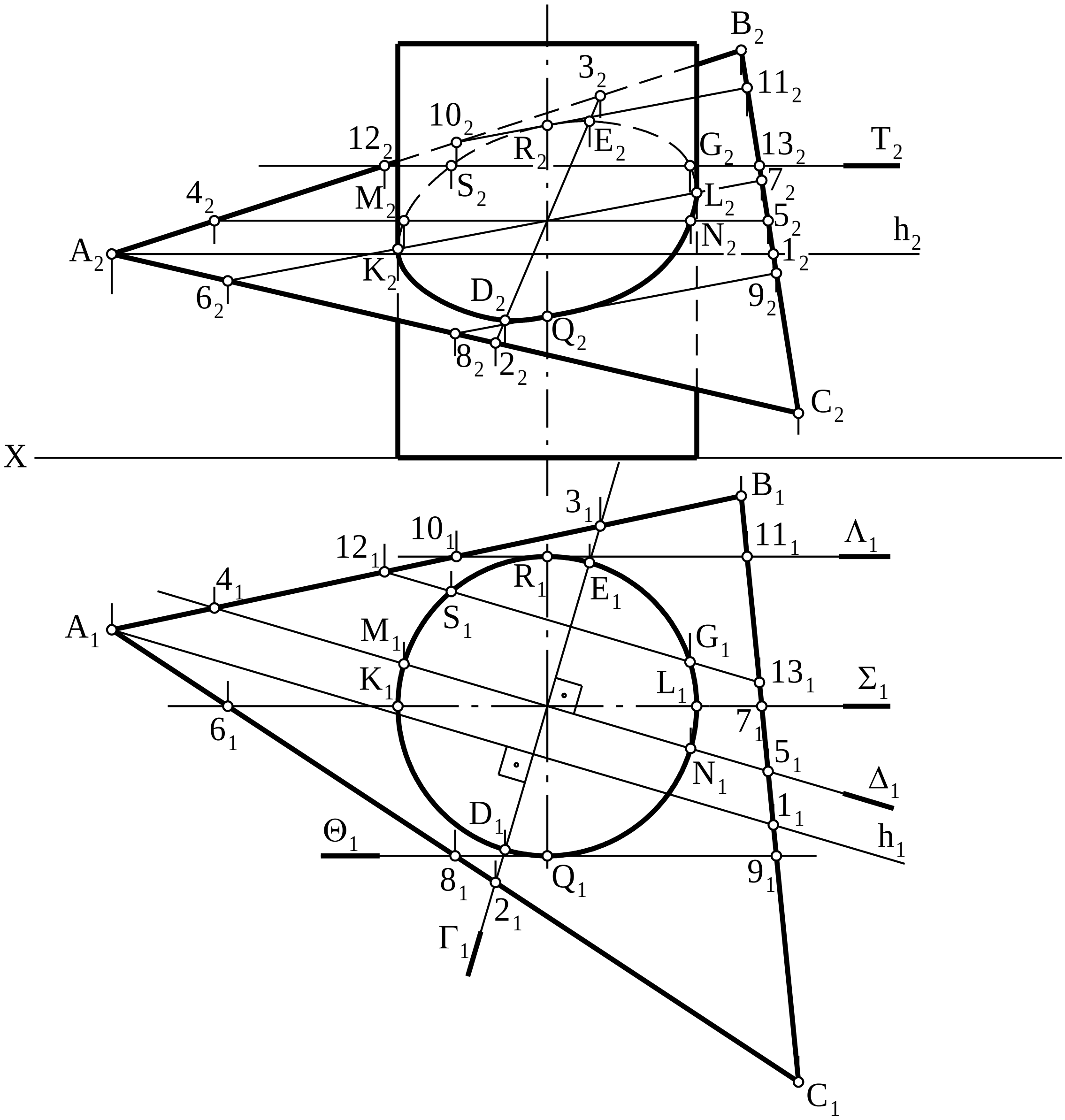

Рис. 12.4

Так, как цилиндр прямой, горизонтальные проекции фигуры сечения и самого цилиндра будут совпадать. Как отмечалось выше, в сечении будет получаться эллипс. Для нахождения точек, ограничивающих большую ось эллипса (нижнюю и высшую), необходимо в плоскости треугольника ABC построить горизонталь h (h_1, h_2), т.к. большая ось совпадает с линией ската плоскости. Затем через ось цилиндра перпендикулярно h_1 проводим линию ската плоскости и заключаем ее в горизонтально-проецирующую плоскость Г ($Г_1$). Плоскость Г пересечет плоскость треугольника ABC по линии 2, 3 ($2_1 3_1$, $2_2 3_2$), а цилиндр по прямоугольнику. Точки, общие для линии пересечения плоскостей и сечения цилиндра плоскостью Г – D и E ($D_1 D_2$, $E_1 E_2$) и будут искомыми. Точки, ограничивающие малую ось эллипса – M и N определим, проведя через ось цилиндра линию перпендикулярно горизонтальной проекции большой оси – 4_1, 5_1 и заключая ее в плоскость Δ. Дальнейшие построения аналогичны приведенным выше. Точки, лежащие на крайних образующих и определяющие границы видимости – K и L ($K_1 L_1$, $K_2 L_2$) определим при помощи фронтальной плоскости уровня Σ ($Σ_1$), а ближнюю и дальнюю точки линии сечения Q и R ($Q_1 R_1$, $Q_2 R_2$) – с помощью плоскостей Θ и λ, проведя их касательно к цилиндру через ближнюю и дальнюю образующие. Промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения R и G ($R_1 G_1$, $R_2 G_2$), определены с помощью горизонтальной плоскости уровня T (T_2).

В пересечении кругового конуса плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получиться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения конуса (рис. 12.5); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса под углом, отличным от прямого и пересекает все образующие конуса (рис. 12.6); гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса (рис. 12.7); парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей конуса (рис. 12.8); треугольник, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 12.9).

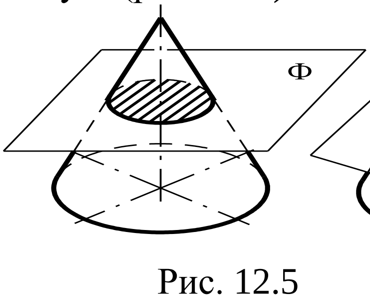

Рис. 12.5

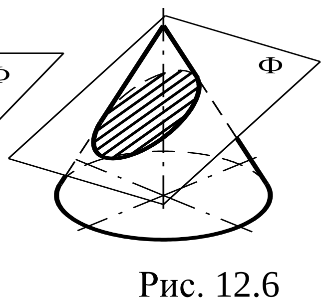

Рис. 12.6

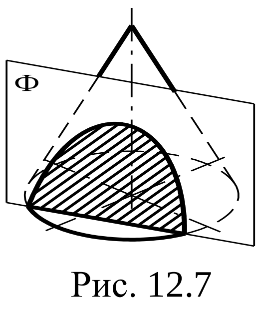

Рис. 12.7

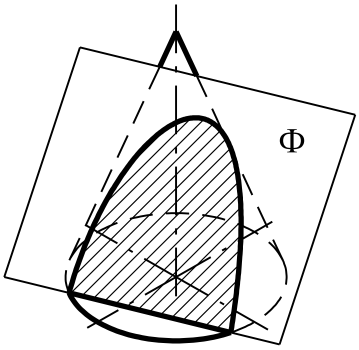

Рис. 12.8

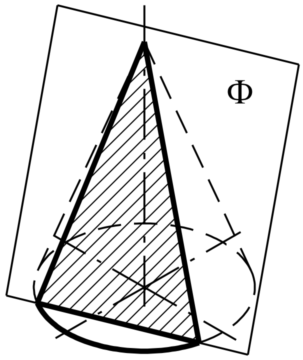

Рис. 12.9

Проекции фигуры сечения конуса плоскостью можно построить аналогично проекциям фигуры сечения пирамиды плоскостью (в конус вписывается многогранная пирамида (рис. 12.10)).

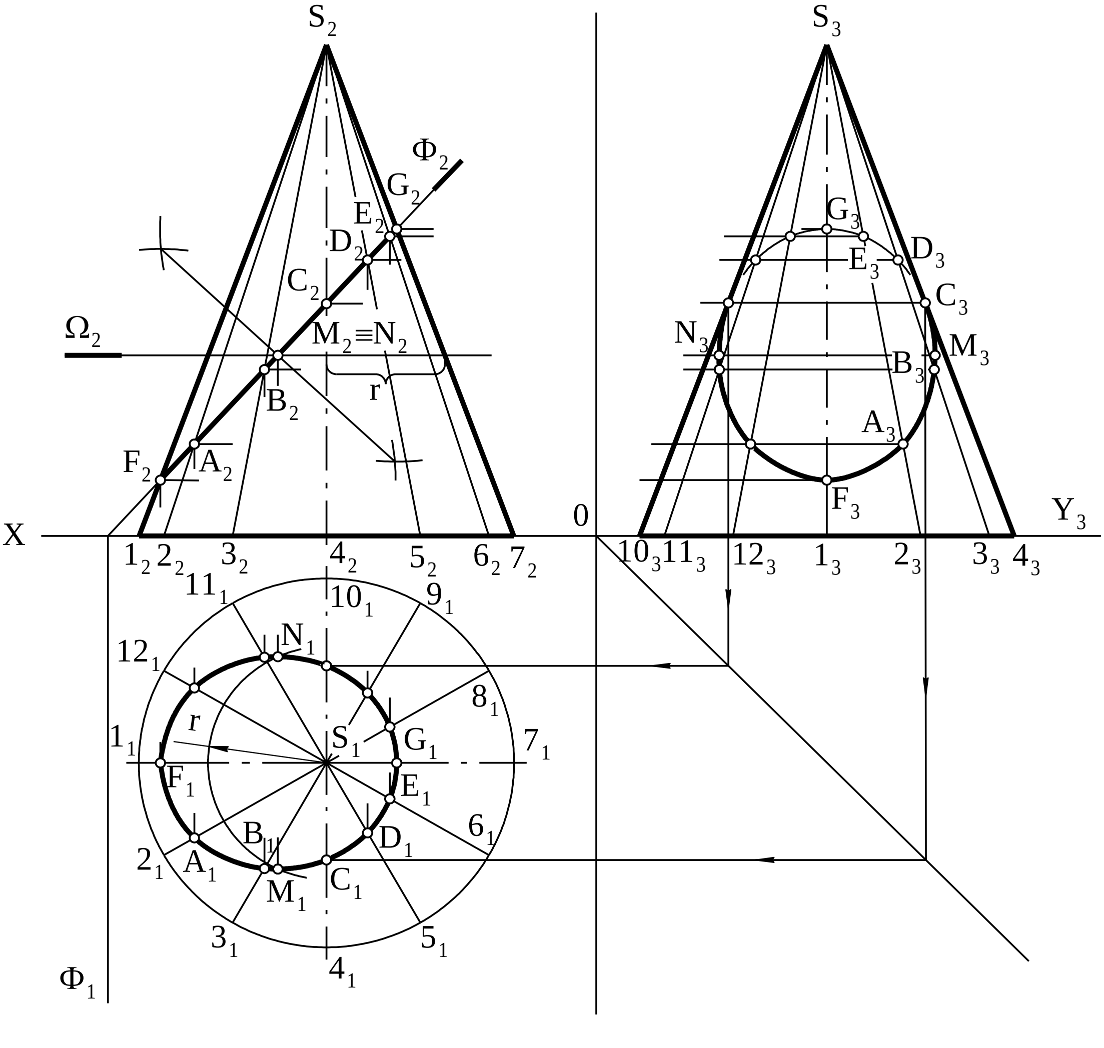

Рис. 12.10

Построение линии пересечения плоскости с конической поверхностью выполняется в следующем порядке. Основание конуса делится на равномерное число частей, в нашем примере 12, проводятся горизонтальные проекции $S_1 1_1$, $S_1 2_1$…, $S_1 12_1$ образующих и строятся их фронтальные и профильные проекции. На фронтальной проекции отмечаются фронтальные проекции точек пересечения построенных образующих на видимой поверхности конуса с секущей плоскостью Ф: A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, а также крайних точек F_2 и G_2. Горизонтальные проекции строятся в проекционной связи на соответствующих проекциях образующих. На профильную проекцию точки переносятся также по линиям связи. Горизонтальная проекция точки C_1 строится после того, как она построена на профильной проекции.

На фронтальной проекции большая ось эллипса F_2G_2 – линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости с конусом – проецируется в натуральную величину. Малая ось MN эллипса перпендикулярна большой и проецируется в точку M_2=N_2 в середине фронтальной проекции F_2G_2 большой оси.

Построение горизонтальной проекции малой оси эллипса выполнено с помощью горизонтальной плоскости уровня Ω (Ω_2), проведенной через малую ось эллипса. Плоскость Ω пересекла конус по окружности радиуса r, точки M_2 и N_2 по линиям связи перенесены на горизонтальную проекцию окружности.

На рис. 12.11 показано построение сечения конуса плоскостью общего положения, заданной следами.

Построение проекций сечения начато с нахождения точек, ограничивающих большую ось эллипса (высшая и низшая точки сечения). Для этого проведена вспомогательная секущая плоскость Г, горизонтально-проецирующая, перпендикулярная следу Φ_1 и проходящая через ось конуса. Плоскость Г пересекает конус по образующим S1 ($S_1 1_1$, $S_2 1_2$) и S2 ($S_1 2_1$, $S_2 2_2$), а плоскость Ф – по линии MN (M_1N_1, M_2N_2). Точки A и B получающиеся в пересечении образующих S1 и S2 с прямой MN, будут искомыми точками. Отрезок AB является большой осью эллипса, получающегося при пересечении данного конуса плоскостью Ф. Проекция A_1B_1 является большой осью эллипса – горизонтальной проекции фигуры сечения. Разделив AB пополам, получим положение малой оси эллипса – точку O (O_1, O_2). Точки C и D (C_1D_1, C_2D_2), ограничивающие малую ось эллипса определим, воспользовавшись горизонтальной плоскостью уровня Θ, проведенной через точку O. Она пересекает поверхность конуса по окружности, а плоскость Ф – по горизонтали. Точки на пересечении этих линий и будут искомыми.

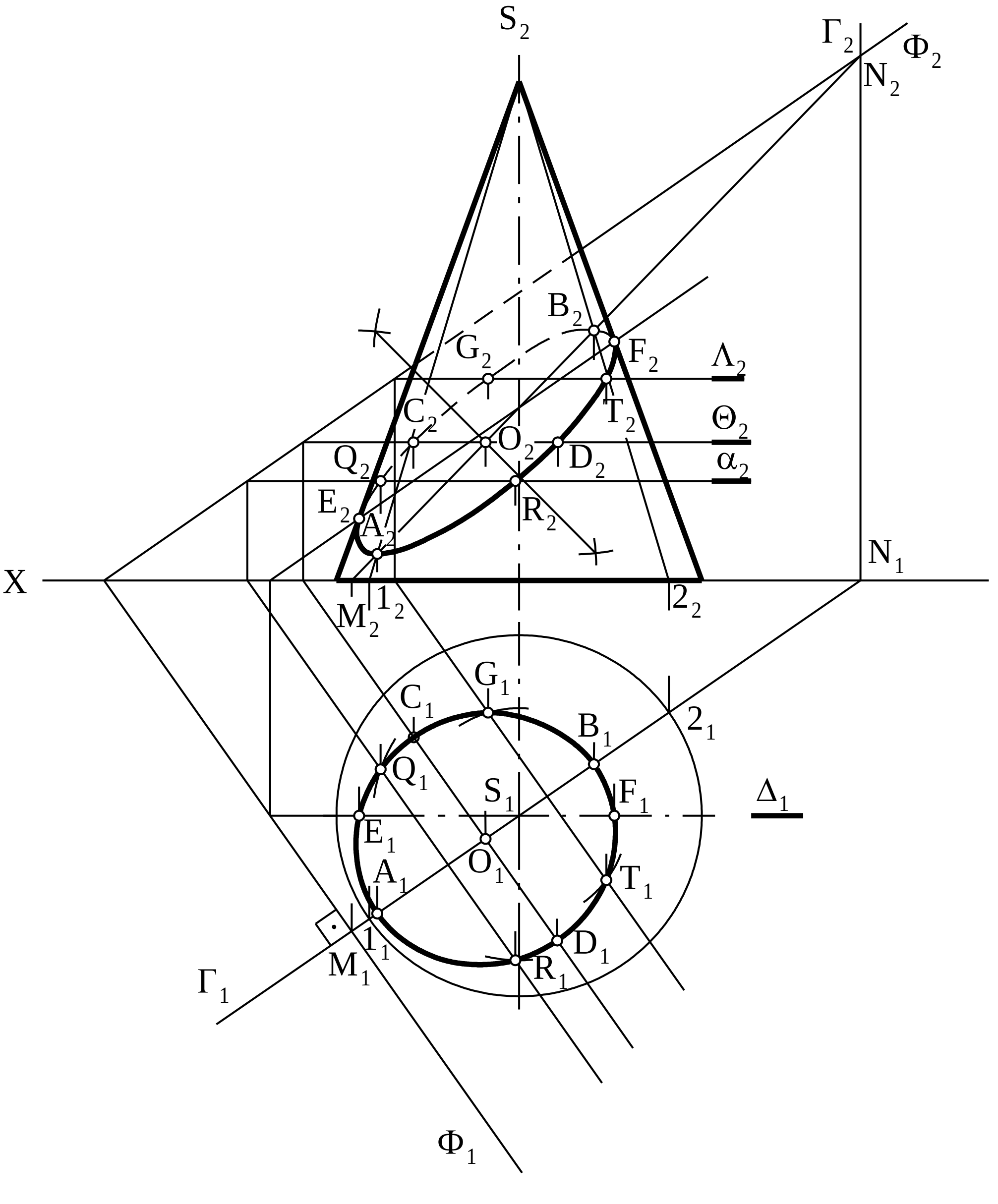

Рис. 12.11

Точки, лежащие на очерке фронтальной проекции конуса и определяющие границы видимости линии пересечения получены при помощи вспомогательной секущей плоскости Δ, проведенной через ось конуса параллельно $П_2$. Плоскость Δ пересекает плоскость Ф по фронтали, а конус по двум образующим. Точки E и F, получающиеся при пересечении фронтали с образующими, принадлежат искомой линии пересечения конуса с плоскостью Ф.

Промежуточные точки линии пересечения удобно построить, использовав горизонтальные секущие плоскости, аналогично построению точек ограничивающих малую ось эллипса.

Задачу можно решить, использовав метод замены плоскостей проекций, с помощью которого привести условие к виду, приведенному на рис. 12.10.

12.2. Плоскости касательные к поверхности

При изображении кривых поверхностей и при выполнении связанных с ними построений может оказаться необходимым проведение плоскости, касательной к поверхности.

Возьмем небольшую часть поверхности и точку на ней. Если через эту точку на поверхности проведем кривые и касательные к ним прямые, то последние оказываются в одной плоскости. Эту плоскость называют касательной к плоскости в данной ее точке.

Рассмотрим несколько примеров построения касательной плоскости к поверхностям.

На рис. 12.11 показано построение плоскости, касательной к сфере в точке A.

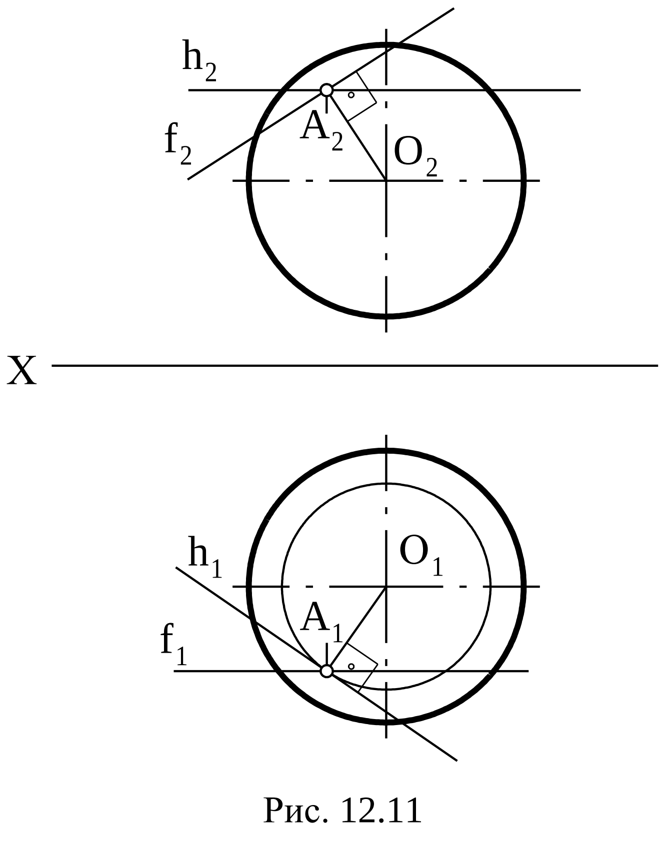

Рис. 12.11

Плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна к радиусу, проведенному в точке касания. Поэтому, проведя радиус OA, строим плоскость, задавая ее горизонталью h и фронталью f. Эти прямые определяют плоскость, касательную к сфере в ее точке A.

В рассмотренном примере касательная плоскость имеет с поверхностью одну общую точку.

На рис. 12.12 показано построение плоскости, касательной к цилиндру в точке C. Здесь плоскость касается поверхности не в одной точке, а во всех точках на образующей.

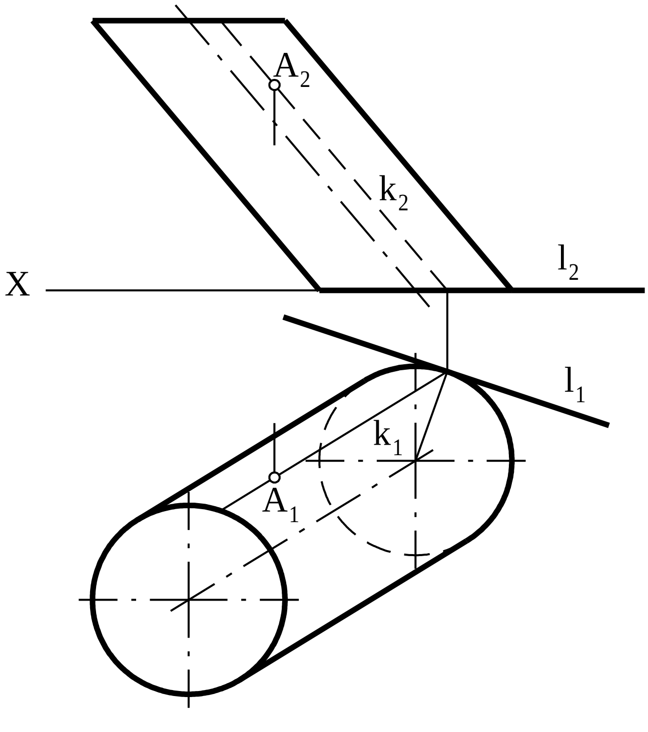

Рис. 12.12

Данная поверхность линейчатая. Поэтому через точку A можно провести образующую k, которая является одной из двух пересекающихся, определяющих касательную плоскость. В качестве второй прямой можно взять касательную l к окружности – горизонтальному следу цилиндрической поверхности. Прямые l и k определяют искомую касательную плоскость. Прямая l является горизонтальным следом этой плоскости.