

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

для студентов специальностей

**1-48 01 03, 1-40 01 01, 1-40 02 01, 1-39 01 01, 1-36 04 02**

Составители: В.А. Лубченко, А. Н. Селицкий

Новополоцк 2013

УДК 514.18 (075.8)  
ББК 22.151.3 (4 Бей) я73  
Н 36

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Галай В. А, доцент каф. начертательной геометрии и графики УО «ПГУ»  
Е.З. Зевелева, доцент каф. начертательной геометрии и графики УО «ПГУ»

Рекомендован к изданию методической комиссией  
инженерно-технологического факультета

**Н 36** Начертательная геометрия и инженерная графика: Конспект лекций для студ. спец. 1-48 01 03, 1-40 01 01, 1-40 02 01, 1-39 01 01, 1-36 04 02./ Сост. Лубченко В.А., Селицкий А. Н.; – Новополоцк: УО «ПГУ», 2013. – 113 с.

ISBN 985-418-152-9  
ISBN 985-418-330-0

В краткой и доступной форме приведены основные положения курса начертательной геометрии в соответствии с действующей учебной программой.

Для студентов химических, информационных и радиотехнических специальностей очной и заочной форм обучения.

УДК 514.18 (075.8)  
ББК 22.151.3 (4 Бей) я73

ISBN 985-418-152-9  
ISBN 985-418-330-0

© УО «ПГУ», 2013  
© В.А. Лубченко, А.Н. Селицкий, сост., 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Лекция 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ.....	8
1.1. Центральное проецирование.....	8
1.2. Параллельное проецирование.....	9
1.3. Ортогональное проецирование.....	10
1.4. Проекция точки на двух плоскостях проекций.....	10
1.5. Проекция точки на трех плоскостях проекций.....	14
1.6. Прямая. Положение прямой относительно плоскостей проекций.....	18
Лекция 2. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ.....	24
2.1. Принадлежность точки прямой. Деление отрезка прямой линии в данном отношении.....	24
2.2. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций.....	25
2.3. Следы прямой линии.....	27
2.4. Взаимное положение прямых.....	30
2.5. Проекция плоских углов.....	32
2.6. Изображение плоскости на чертеже.....	33
2.7. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.....	36
2.8. Прямая и точка в плоскости.....	40
2.9. Главные линии плоскости.....	41
Лекция 3. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ.....	46
3.1. Прямая параллельная плоскости.....	46
3.2. Построение точки пересечения прямой и плоскости.....	47
3.3. Параллельные плоскости.....	52
3.4. Пересекающиеся плоскости.....	54
Лекция 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПЛОСКОСТИ.....	60
4.1. Прямая, перпендикулярная плоскости.....	60
4.2. Определение расстояния от точки до плоскости.....	61
4.3. Взаимно перпендикулярные плоскости.....	64
Лекция 5. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА.....	68
5.1. Метод замены плоскостей проекций.....	68
5.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.....	74
Лекция 6. МНОГОГРАННИКИ.....	79
6.1. Способы задания многогранников и построение их проекций.....	79

6.2. Пересечение многогранников с плоскостью.....	80
6.3. Пересечение прямой линии с поверхностью многогранников.....	86
6.4. Развертка пирамиды и призмы.....	87
Лекция 7. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.....	90
7.1 Цилиндр. Конус. Сфера.....	90
7.2 Пересечение поверхностей вращения плоскостью.....	92
7.3 Пересечение прямой линии с поверхностями цилиндра и конуса.....	99
7.4 Развертка цилиндра и конуса.....	101
Лекция 8. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	103
8.1 Способ вспомогательных секущих плоскостей.....	103
Лекция 9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	109
9.1. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка.....	109
9.2. Способ сфер.....	112
ЛИТЕРАТУРА.....	116



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Конспект лекций предназначен для студентов химических, информационных и радиотехнических специальностей вузов и соответствует программе курса «Начертательная геометрия».

Раздел «Начертательная геометрия» изучается в первом семестре первого курса. Лекционный материал курса разбит на 9 лекций согласно количеству недель в семестре в соответствии с учебными календарными планами.

Весь материал курса начертательной геометрии изложен в краткой доступной форме и сопровождается большим количеством рисунков.

В основу конспекта лекций положен УМК «Начертательная геометрия и инженерная графика» для студ. спец. 1-70 02 01, 1-70 04 02, 1-70 04 03. Ч. 1: Начертательная геометрия / Сост. Артемьева Т.Я., Лубченко В.А., Махова Т.С., Яромлович С.В.; под общ. ред. С.В. Яромловича.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время нельзя представить работу и развитие любой отрасли, а также науки и техники без чертежей. На вновь создаваемые приборы, машины, сооружения, сначала разрабатывают чертежи. По чертежам определяют их достоинства и недостатки, вносят изменения в их конструкцию. Только после обсуждения чертежей изготавливают опытные образцы.

Инженер должен уметь читать чертежи, чтобы понять как конструкцию, так и работу изображенного изделия, а также изложить свои технические мысли, используя чертежи.

В число учебных дисциплин, составляющих основу подготовки специалистов с высшим инженерным образованием, входит курс «Начертательная геометрия». Этот курс готовит студентов к выполнению и чтению чертежей как в процессе обучения в университете, так и в последующей инженерной деятельности.

Начертательная геометрия является тем разделом геометрии, в котором изучаются методы изображения пространственных форм на чертежах и алгоритмы решения позиционных и метрических задач.

Условимся позиционными называть задачи на взаимную принадлежность и пересечение геометрических фигур, метрическими – задачи на определение расстояний и натуральных величин геометрических фигур.

Изучение начертательной геометрии способствует развитию пространственного воображения и навыков правильного логического мышления.

В основу построения любого изображения положена операция проецирования. Основным методом проецирования является ортогональное проецирование. Этот метод основан на проецировании пространственного объекта на две взаимно перпендикулярные плоскости лучами, перпендикулярными (ортогональными) к этим плоскостям.

Основными задачами курса «Начертательная геометрия и инженерная графика» являются:

а) научить выполнять простые чертежи, т.е. изображать несложные изделия на комплексном чертеже и в аксонометрических проекциях;

б) научить читать чертежи, т.е. привить навыки мысленного представления форм и размеров изделий по их изображениям на чертеже;

в) рассмотреть графические способы решения отдельных задач, связанных с геометрическими образами и их взаимным расположением в пространстве;

г) ознакомиться с основными требованиями стандартов ЕСКД к чертежам и схемам;

д) развить навыки техники выполнения чертежей.

В начертательной геометрии чертежи являются тем инструментом, с помощью которого осуществляется непосредственное изучение геометрических форм предмета и выполняется решение пространственных задач. Поэтому к чертежам предъявляют следующие требования:

а) чертеж должен быть наглядным, т.е. он должен вызывать пространственное представление об изображаемом предмете;

б) чертеж должен быть обратимым, т.е. он должен точно определять форму, размеры и положение изображаемого предмета;

в) чертеж должен быть простым для его графического выполнения;

г) изображение предмета должно быть удобным для чтения размеров.

Чертежи, выполненные методом проецирования, называются проекционными.

Возникновение начертательной геометрии относится к глубокой древности, появление ее обусловилось потребностями строительства, а несколько позже – развитием искусств и техники.

С развитием методов построения изображений пространственных форм на плоскости связаны имена таких ученых древности как Эсхил, Демокрит, Евклид, Витрувий.

Значительных успехов в своем развитии начертательная геометрия достигает в эпоху Возрождения.

Однако творцом начертательной геометрии по праву считается французский инженер и ученый Гаспар Монж (1746-1818), в изложении которого эта наука получила не только свое название, но подлинно научный смысл и значение.

В 1798 году Гаспар Монж опубликовал свой главный научный труд «Начертательная геометрия».

В вузах России начертательная геометрия стала изучаться с 1810 года. Первым русским профессором начертательной геометрии и крупным ученым-исследователем в этой области стал Яков Александрович Севастьянов (1796 - 1849).

Значительный вклад в развитие начертательной геометрии внесли русские ученые: Н.И. Макаров, В.И. Курдюмов, Н.А. Рынин, А.И. Добряков, Н.Ф. Четверухин и многие другие.

Позднее продолжили свои исследования в этой области такие ученые, как В.О. Гордон, С.А. Фролов, А.В. Бубенников, Н.Н. Крылов и др.

## ЛЕКЦИЯ 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

- 1.1. Центральное проецирование.
- 1.2. Параллельное проецирование.
- 1.3. Ортогональное проецирование.
- 1.4. Проекция точки на двух плоскостях проекций.
- 1.5. Проекция точки на трех плоскостях проекций.
- 1.6. Эпюр прямой.
- 1.7. Положение прямой относительно плоскостей проекций.

### 1.1. Центральное проецирование

Пусть в пространстве задана плоскость  $\Pi_1$ , которую будем называть плоскостью проекций.

Выберем какую-либо точку  $S$ , не лежащую на плоскости проекций. Эту точку будем называть центром проецирования.

Заданную точку  $A$  пространства будем проецировать на плоскость проекций  $\Pi_1$ . Для этого через точку  $A$  из центра проекций  $S$  проведем прямую  $l$ . Эта прямая будет называться проецирующей прямой. Затем находим точку пересечения  $A_1$  проецирующей прямой  $SA$  с плоскостью проекций  $\Pi_1$ . Точка  $A_1$  будет называться проекцией точки  $A$  (рис 1.1). Аналогично выполним построение проекции  $B_1$  точки  $B$ .

Очевидно, что каждой точке пространства будет однозначно соответствовать своя собственная проекция. Однако на рис 1.2 мы видим, что проекцией точки  $A$  и точки  $C$  является точка пересечения их общей проецирующей прямой с плоскостью проекций.

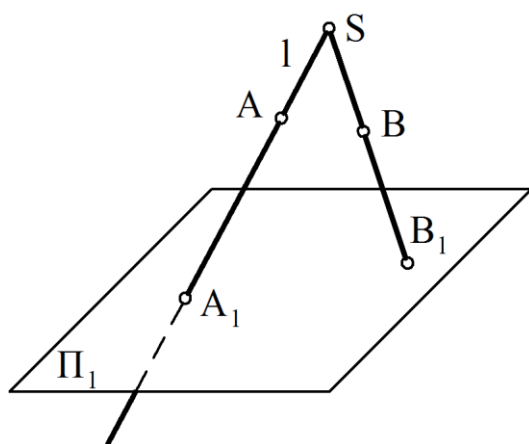


Рис 1.1

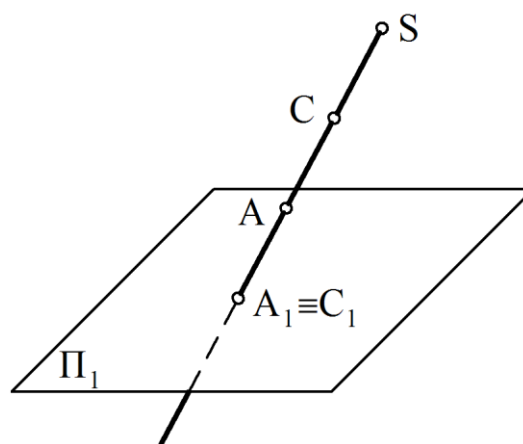


Рис 1.2

Следовательно, такое изображение не является взаимно однозначным, и судить о положении точек  $A$  и  $C$  в пространстве по одной проекции нельзя, потому что одним из требований, предъявляемых к чертежам, является точное определение положения пространственного объекта по его изображению, по его проекциям.

## 1.2. Параллельное проецирование

Если центр проецирования  $S_\infty$  удален в бесконечность (рис. 1.3), то проецирующие лучи станут параллельны друг другу. Такое проецирование называется параллельным.

Проецирующие лучи, исходящие из бесконечного далека, могут быть наклонены под любым углом к плоскости проекций.

При заданном аппарате проецирования можно построить параллельную проекцию любой точки пространства. Для этого через заданную точку  $A$  проведем проецирующую прямую, параллельную направлению  $s$ , и найдем точку  $A_1$  – точку пересечения этой прямой с плоскостью проекций  $\Pi_1$ .

Через точку  $A$  параллельно заданному направлению в пространстве можно провести только одну прямую, следовательно, каждая точка пространства имеет одну и только одну параллельную проекцию.

Точки  $A$  и  $B$  принадлежат одному и тому же проецирующему лучу, параллельному направлению  $s$  (рис. 1.4). Поэтому проекции этих точек  $B_1$  и  $A_1$  совпадают. Отсюда следует, что по одной заданной проекции положение в пространстве точек  $B$  и  $A$  определить невозможно.

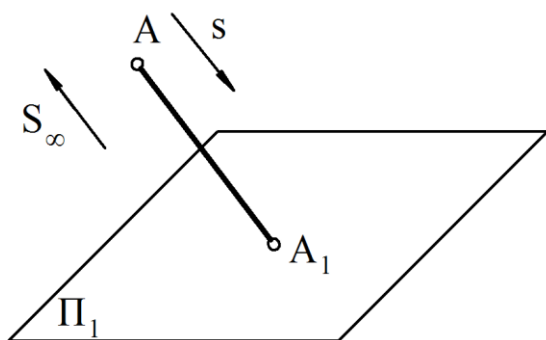


Рис. 1.3

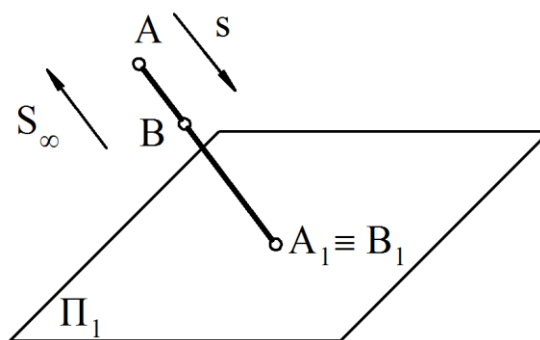


Рис. 1.4

### 1.3. Ортогональное (прямоугольное) проецирование

Ортогональное (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного проецирования, при котором направление проецирования  $s$  выбирается перпендикулярным плоскости проекций  $\Pi_1$ , т.е.  $s \perp \Pi_1$  (рис 1.5).

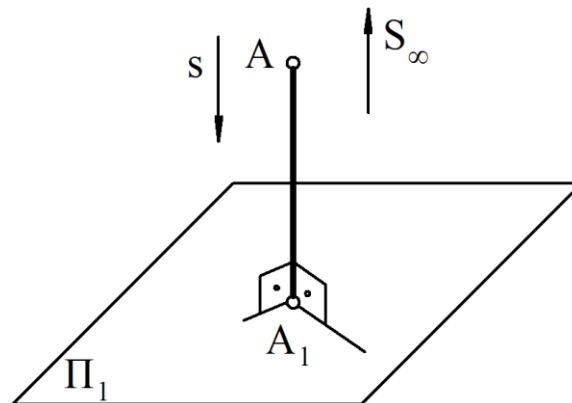


Рис. 1.5

Такое проецирование является наиболее простым и удобным из всех других существующих видов проецирования. Оно обеспечивает простоту определения проекций геометрических объектов, а также позволяет сохранить на проекциях их форму и размеры.

Прямоугольное проецирование имеет те же недостатки, что и центральное и параллельное проецирование: одна прямоугольная проекция не дает возможности определить положение геометрического объекта в пространстве.

Для того чтобы получить так называемый «обратимый чертеж», который позволит определить любые геометрические параметры объекта, надо иметь хотя бы две связанные между собой прямоугольные проекции.

### 1.4. Проекция точки на двух плоскостях проекций

На рис. 1.6 изображена система из двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, одна из которых  $\Pi_1$  расположена горизонтально, а вторая  $\Pi_2$  - вертикально. Здесь  $\Pi_1$  - горизонтальная плоскость проекций,  $\Pi_2$  - фронтальная плоскость проекций. Линия пересечения плоскостей - ось проекций - X. Это система  $\frac{\dot{I}}{\dot{I}_2}$ .

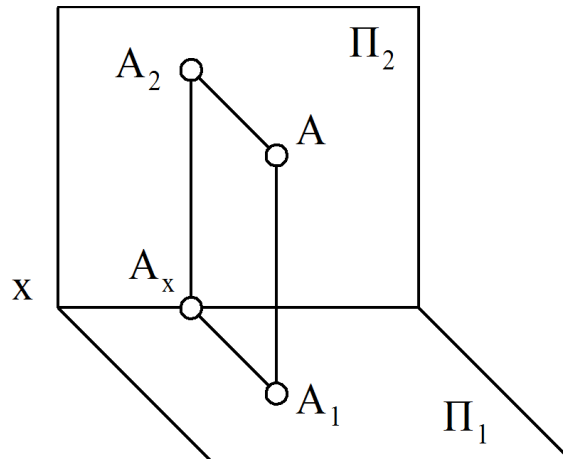


Рис. 1.6

Внутри двугранного угла, образованного плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  помещена некоторая точка  $A$ , из которой опущены перпендикуляры (проецирующие лучи) на плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  до пересечения с ними в точке  $A_1$  и  $A_2$  ( $A_1$  — горизонтальная проекция точки  $A$ ;  $A_2$  - фронтальная проекция точки  $A$ ). Фронтальная и горизонтальная проекции некоторой точки находятся на перпендикулярах к оси проекции  $X$ , пересекающих ее в точке  $A_x$ .

Теперь повернем плоскость проекций  $\Pi_1$  вокруг оси  $X$  на угол  $90^\circ$  в направлении, указанном стрелкой (рис. 1.7), до совпадения с плоскостью проекций  $\Pi_2$ . При этом фронтальная проекция точки  $A$  не изменит своего положения, а горизонтальная будет находится под осью  $X$  на одной прямой с фронтальной проекцией точки - на линии связи, перпендикулярной к оси проекций  $X$ .

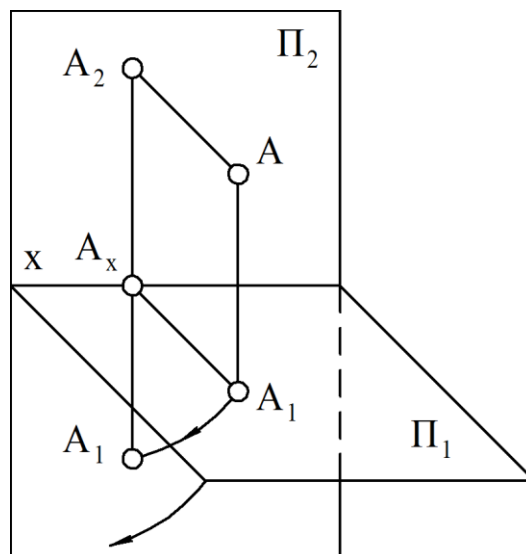


Рис. 1.7

Проекционный чертеж, на котором плоскости проекций со всем тем, что на них изображено, совмещены определенным образом одна с другой, называется эпюром. На рис. 1.8 показан эпюр точки  $A$ .

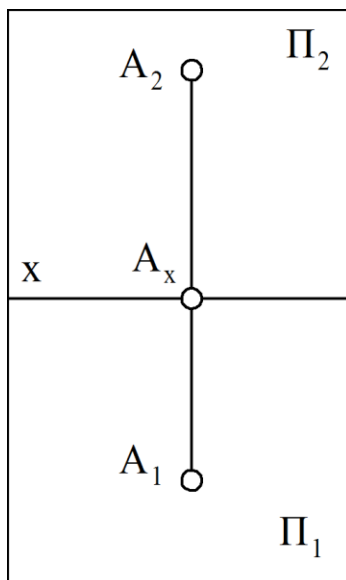


Рис. 1.8

Плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  при продлении образуют четыре четверти (рис. 1.9). Каждая четверть имеет свой порядковый номер, в соответствии с рис. 1.9.

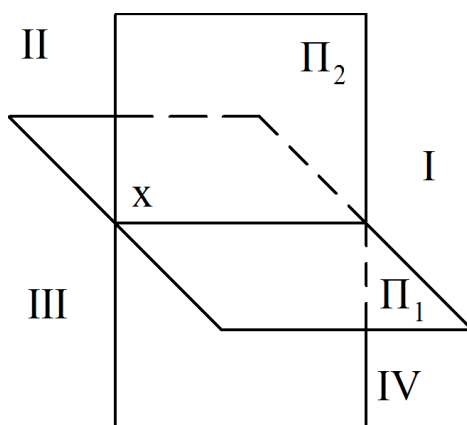


Рис. 1.9

Ось проекций делит каждую из плоскостей проекций на две полуплоскости - полу: плоскость  $\Pi_1$  - на переднюю и заднюю полу, плоскость проекций  $\Pi_2$  - на верхнюю и нижнюю полу.



При переходе от пространственного изображения к эпюру, т.е. при совмещении горизонтальной плоскости проекций с фронтальной, передняя пола плоскости  $\Pi_1$  будет перемещаться на  $90^\circ$  вокруг оси  $X$  вниз, а задняя - вверх. Поэтому фронтальная и горизонтальная проекция точки, находящейся во второй четверти, окажутся над осью  $X$ , фронтальная проекция точки, находящейся в третьей четверти, окажется над осью  $X$ , а горизонтальная - над осью  $X$ , фронтальная и горизонтальная проекция точки, находящейся в четвертой четверти, — под осью  $X$ .

На рис. 1.10, 1.11, 1.12 даны пространственные изображения и эпюры точек  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , находящихся в различных четвертях пространства: точка  $B$  находится во второй четверти,  $C$  - в третьей,  $D$  - в четвертой. Эпюр точки  $A$ , находящейся в первой четверти показан на рис. 1.8.

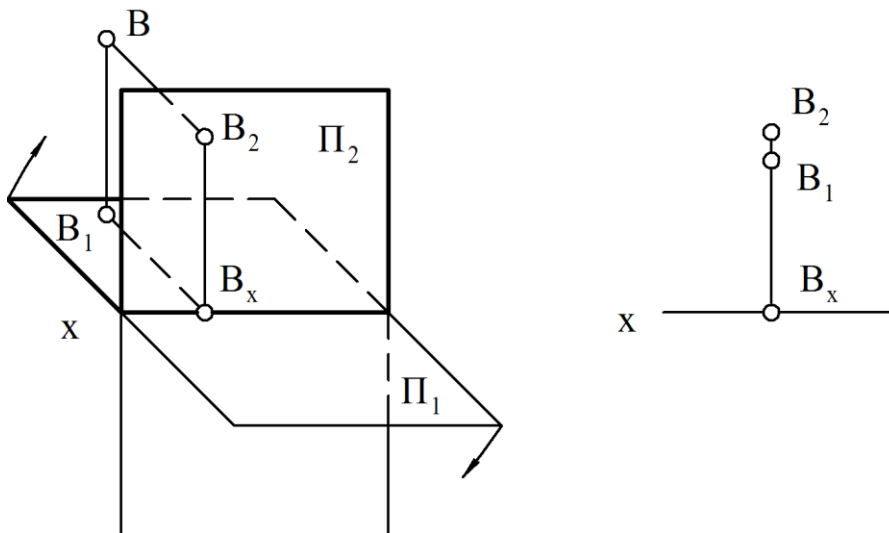


Рис. 1.10

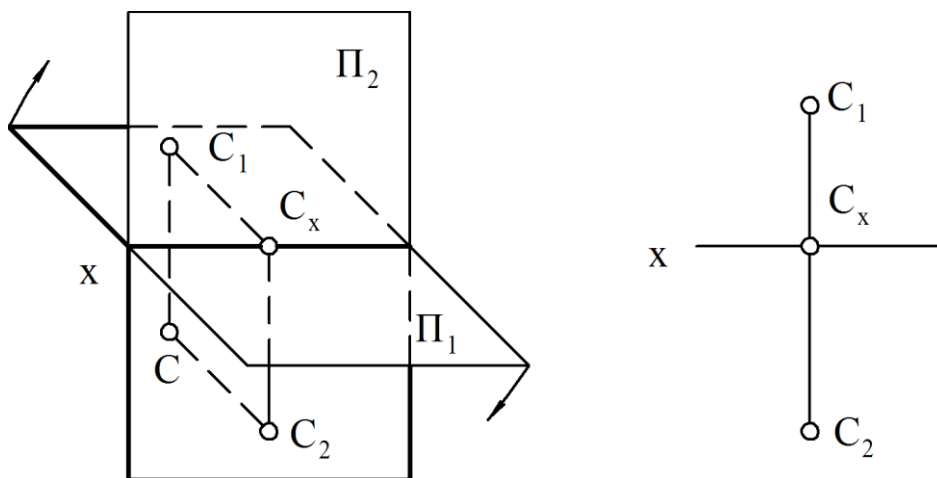


Рис. 1.11

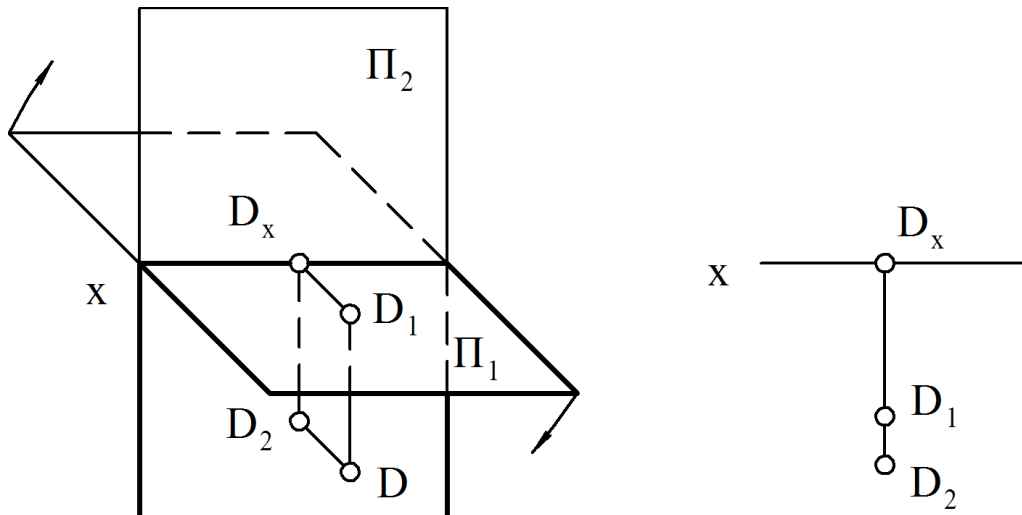


Рис. 1.12

Если точка находится в плоскости проекций, то одна ее проекция будет совпадать с точкой, а вторая находится на оси X (рис. 1.13).

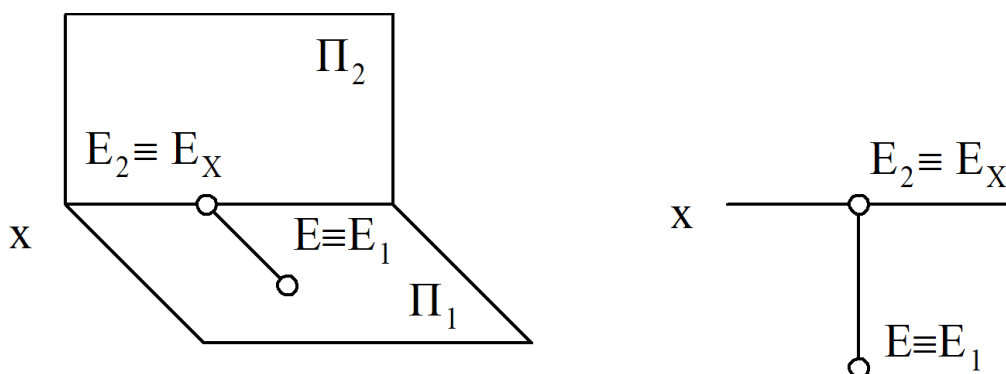


Рис. 1.13

### 1.5 Проекция точки на трех плоскостях проекций

Две проекции точки определяют ее положение в пространстве. Однако в практике изображения деталей машин и различных инженерных конструкций возникает необходимость в создании дополнительных проекций. Поступают так с единственной целью - сделать проекционный чертеж более ясным, удобочитаемым.

Третья плоскость, перпендикулярная и  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  обозначается буквой  $\Pi_3$  и называется профильной.

Модель трех плоскостей проекций показана на рис. 1.14.

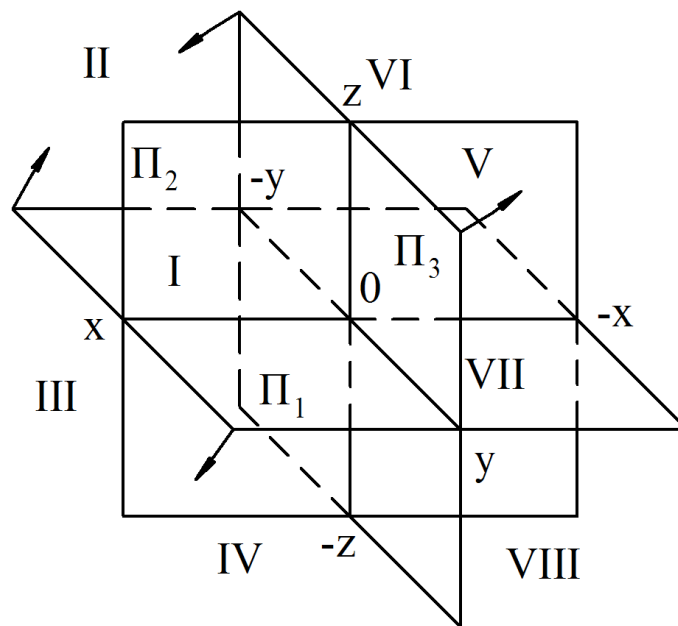


Рис. 1.14

Проекции точек на эту плоскость будут также именоваться профильными.

Линии пересечения этих плоскостей называют осями проекций (координатными).  $Ox$  - ось абсцисс;  $Oy$  - ось ординат;  $Oz$  - ось аппликат и рассматривают как систему прямоугольных декартовых координат.

Три плоскости проекций делят пространство на восемь трехгранных углов - это так называемые октанты. Нумерация октантов дана на рис. 1.14.

Будем считать, что зритель, рассматривающий предмет, находится в первом октанте.

Построим проекции точки  $A$  расположенной в первом октанте. Для этого опустим из точки  $A$  перпендикуляры на плоскости проекций. Основания перпендикуляров и будут являться проекциями данной точки:

$A_1$  - горизонтальная проекция точки;

$A_2$  - фронтальная проекция точки;

$A_3$  - профильная проекция точки.

Для получения более удобного чертежа необходимо совместить плоскости проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$  вместе с изображением на них данной точки  $A$  с плоскостью проекций  $\Pi_2$  поворотом их вокруг осей  $Ox$  и  $Oz$  в направлении, указанном стрелкой (рис. 1.15). На рис. 1.16 дан совмещенный чертеж точки  $A$  (эпюр точки  $A$ ).

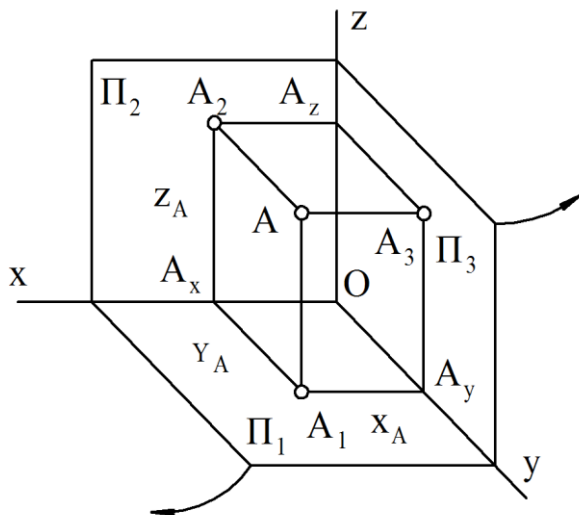


Рис. 1.15

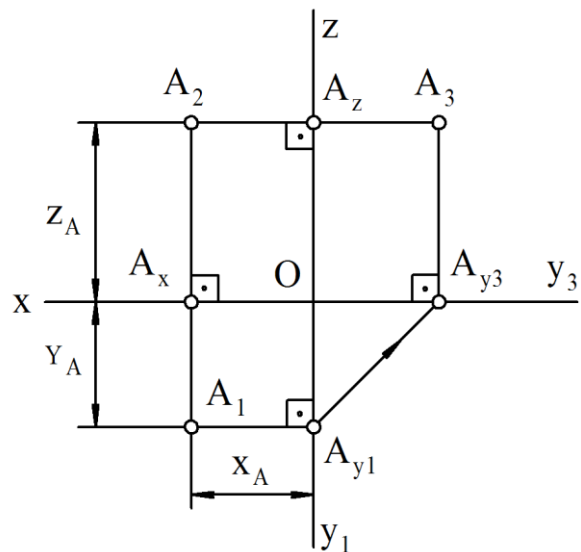


Рис. 1.16

Из чертежа видно, что горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси  $OX$ , а фронтальная и профильная проекции - на одном перпендикуляре к оси  $OZ$ .

Прямая, которая соединяет на чертеже две проекции одной и той же точки, называется линией связи.

$A_1A_2$  - всегда перпендикулярна оси  $OX$ ;

$A_2A_3$  - всегда перпендикулярна оси  $OZ$ .

Расстояние от заданной точки  $A$  до плоскостей определяется ее координатами, т.е. числами, показывающими на каком расстоянии находится точка от той или иной плоскости проекций:

$|AA_3|$  - абсцисса точки  $A(X)$ ;

$|AA_2|$  - ордината точки  $A(Y)$ ;

$|AA_3|$  - аппликата точки  $A(Z)$ .

Каждая проекция точки определяется двумя координатами:  $A_1(X, Y)$ ;  $A_2(X, Z)$ ;  $A_3(Y, Z)$ , а две любые проекции определяются тремя координатами, следовательно, для задания точки достаточно двух проекций.

Если все три координаты точки отличны от нуля, точка находится в пространстве (см. рис. 1.15 и рис. 1.16).

Если одна из координат равна нулю, точка находится в плоскости проекций, например, точка  $B$  лежит в плоскости  $\Pi_1$  поэтому координата  $Z=0$  (рис. 1.17).

Если точка лежит на оси, то нулю равны две ее координаты (точка  $C$  лежит на оси  $OZ$ , см. рис. 1.17). Координаты  $X$  и  $Y$  равны 0. Если все три координаты равны нулю, точка совпадает с началом координат.

По двум известным проекциям всегда можно построить третью (рис. 1.18).

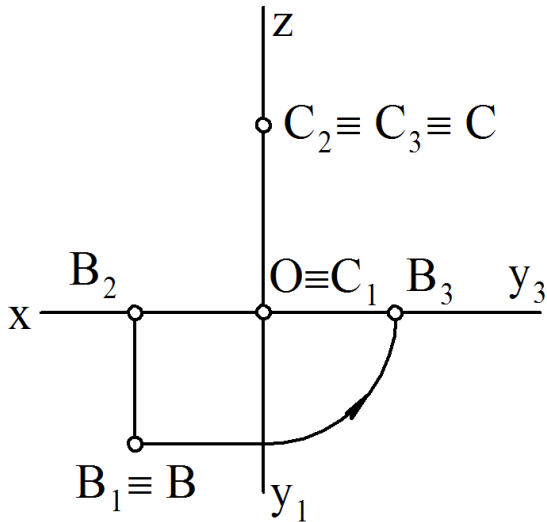


Рис. 1.17

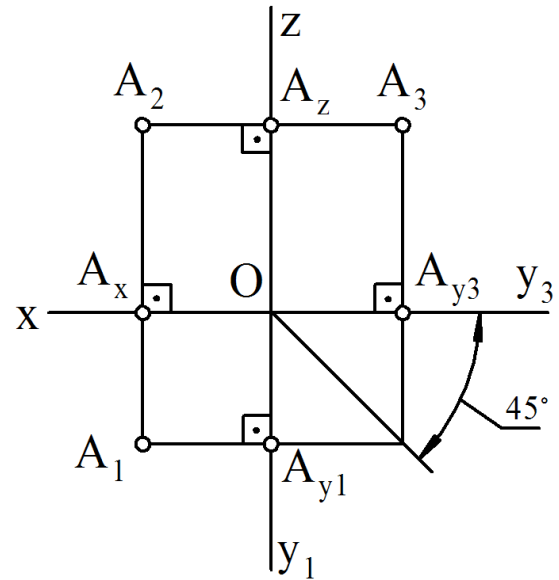


Рис. 1.18

Например, чтобы построить профильную проекцию  $A_3$  точки  $A$  по данным горизонтальной  $A_1$  и фронтальной  $A_2$  проекциям, необходимо:

1) из точки  $A_1$  провести прямую, перпендикулярную  $OY$ , до пересечения с постоянной линией чертежа, проведенной под углом  $45^\circ$  к осям  $y_1$  и  $y_2$ ;

2) из полученной точки восстановить перпендикуляр к оси проекций  $OY_3$ ;

3) из фронтальной проекции  $A_2$  провести прямую, перпендикулярную оси  $OZ$ , и продолжить ее до пересечения с построенной ранее прямой из точки  $A_{y3}$ . На пересечении этих прямых находится искомая проекция  $A_3$  точки  $A$ .

Любая точка пространства  $A$ , заданная координатами, будет обозначаться:  $A(x,y,z)$ . Пусть задана точка  $A(6,4,5)$ . Эта запись означает, что положение точки  $A$  в пространстве определяется координатами:  $x=6$ ,  $y=4$ ,  $z=5$ .

Построение изображения самой точки и ее проекций на пространственной модели осуществляют следующим образом: на осях координат от точки  $O$  откладывают отрезки, соответственно равные 6, 4, 5 единицам длины (рис. 1.19). На этих отрезках ( $OA_x$ ,  $OA_y$ ,  $OA_z$ ), как на ребрах, стро-

ят параллелепипед. Вершина его, противоположная началу координат, определяет положение заданной точки  $A$ . Из рис. 1.19 видно, что для определения положения точки  $A$  достаточно построить только три ребра параллелепипеда, например,  $OA_x$ ,  $A_xA_1$  и  $A_1A$ .

Эпюр точки представлен на рис. 1.20.

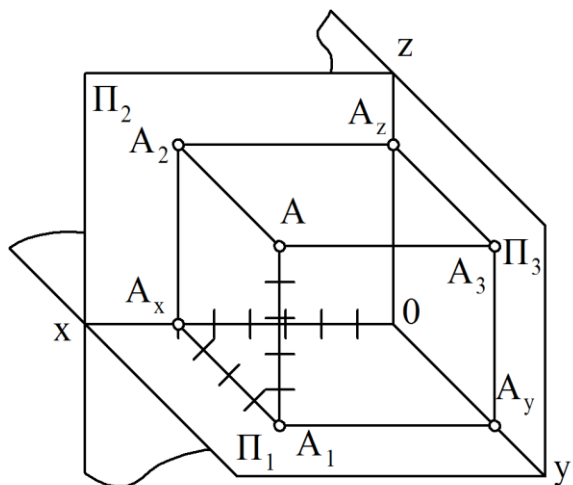


Рис. 1.19

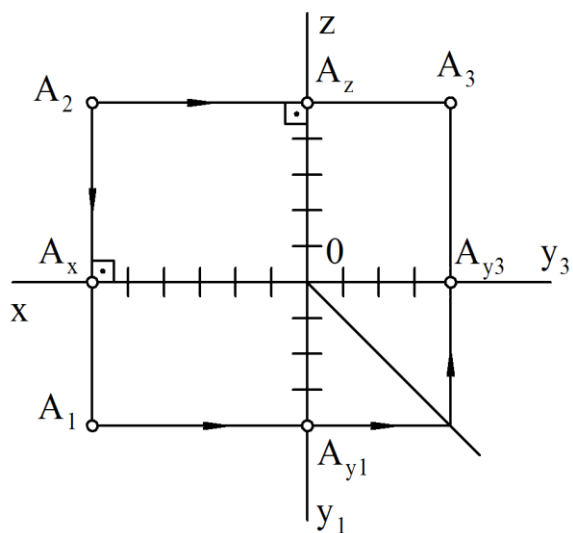


Рис. 1.20

Построение эпюров точек, расположенных в других октантах, в данном пособии не рассматривается.

## 1.5 Прямая.

### Положение прямой относительно плоскостей проекции

Эпюром прямой называется проекционный чертеж, на котором проекции точек, принадлежащих прямой, находятся в проекционной связи.

Положение прямой линии в пространстве определяется двумя точками или точкой и направлением. На эпюре прямую можно задать проекциями ее отрезка (рис. 1.21), проекциями некоторой произвольной части прямой, не указывая концевых точек этой части (рис. 1.22), или указывая одну точку этой прямой (рис. 1.23).

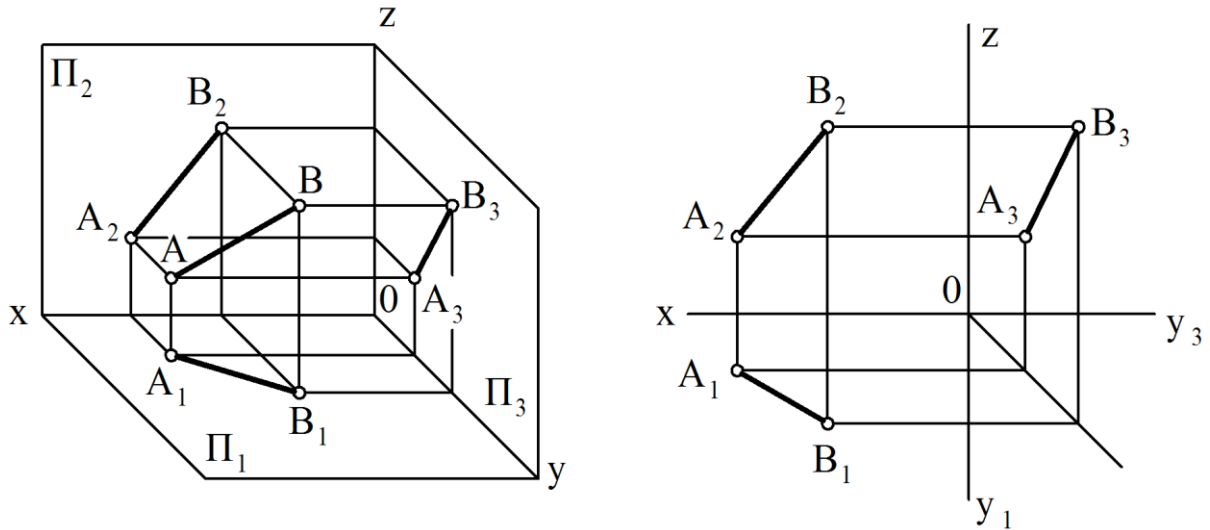


Рис. 1.21

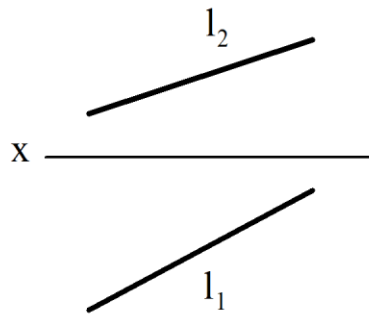


Рис. 1.22

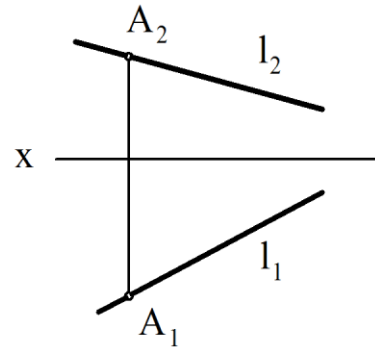


Рис. 1.23

Относительно плоскостей проекций прямая может занимать семь различных положений.

Прямая, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения (рис. 1.21).

Прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций называют прямыми частного положения.

Прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций, а с двумя другими плоскостями образующая произвольные углы, называется прямой уровня. Различают три линии уровня:

- 1) прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций, называют горизонтальной или горизонталью  $h$  (рис. 1.24, а, б);
- 2) прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют фронтальной или фронталью  $f$  (рис. 1.25, а, б);

3) прямую, параллельную профильной плоскости проекций, называют профильной  $p$  (рис. 1.26, а, б).

Каждая линия уровня будет проецироваться в натуральную величину на ту плоскость проекций, которой она параллельна, углы наклона ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), которые эта прямая образует с двумя другими плоскостями проекций, также будут проецироваться на эту плоскость без искажения (рис. 1.24-1.26).

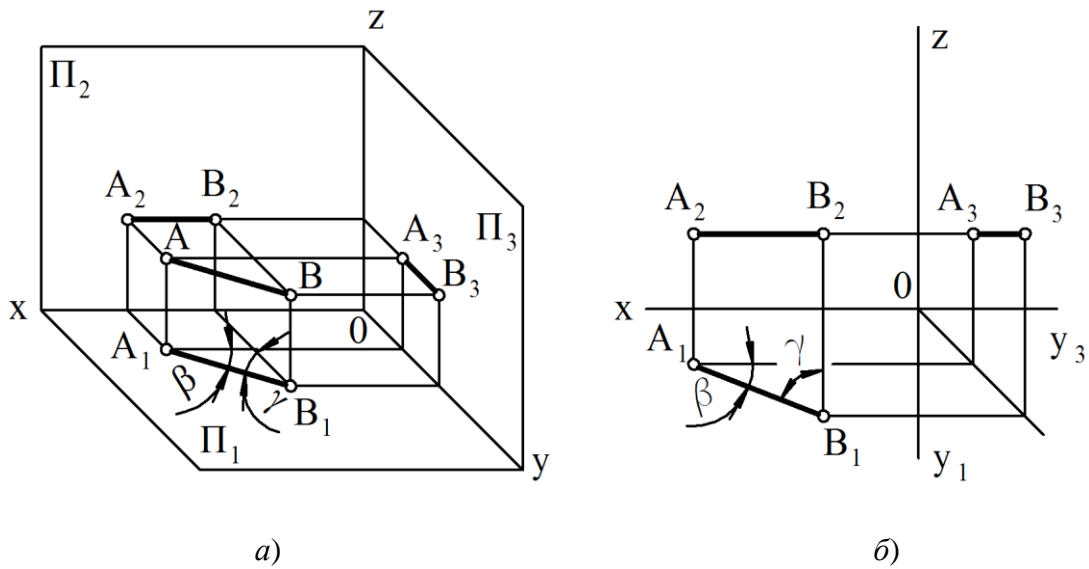


Рис. 1.24

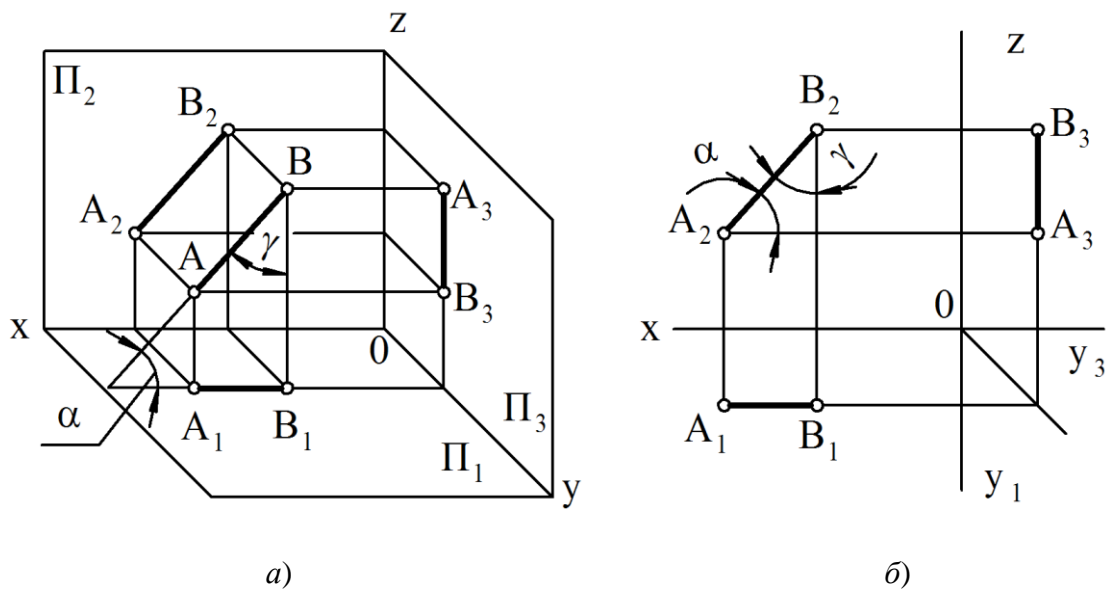


Рис. 1.25



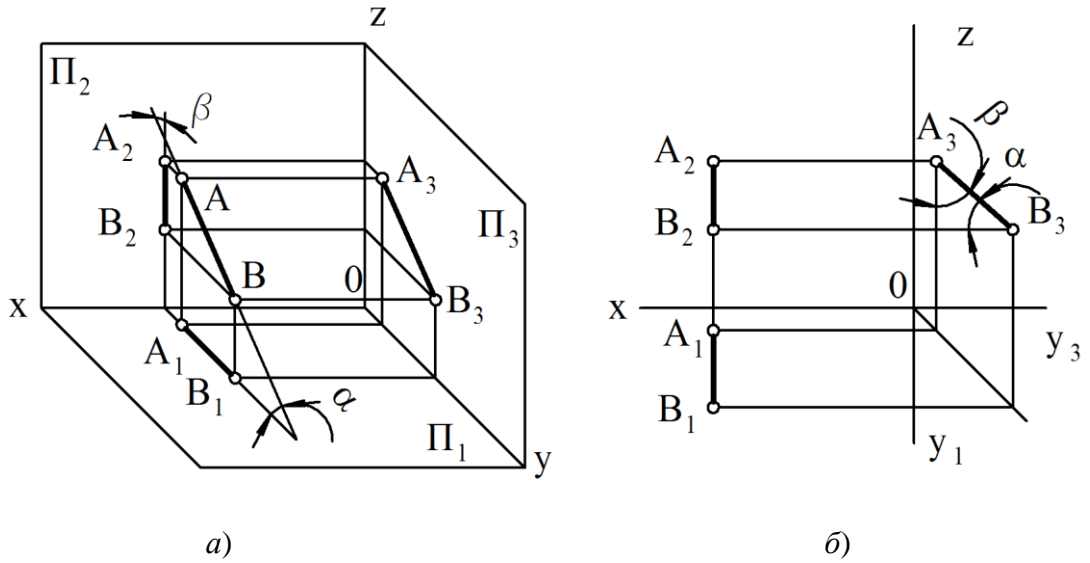


Рис. 1.26

На рис. 1.24 видно, что все точки горизонтальной прямой АВ удалены на одинаковые расстояния от плоскости  $\Pi_1$  поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси ОХ, а профильная проекция параллельна оси ОУ. Величины фронтальной и профильной проекций будут меньше натуральной величины самой прямой.

Эти отличительные особенности характерны и для фронтальной и профильной прямых.

Прямые уровня могут принадлежать плоскостям проекций. Такие прямые называют нулевой горизонталью и нулевой фронталью (рис. 1.27).

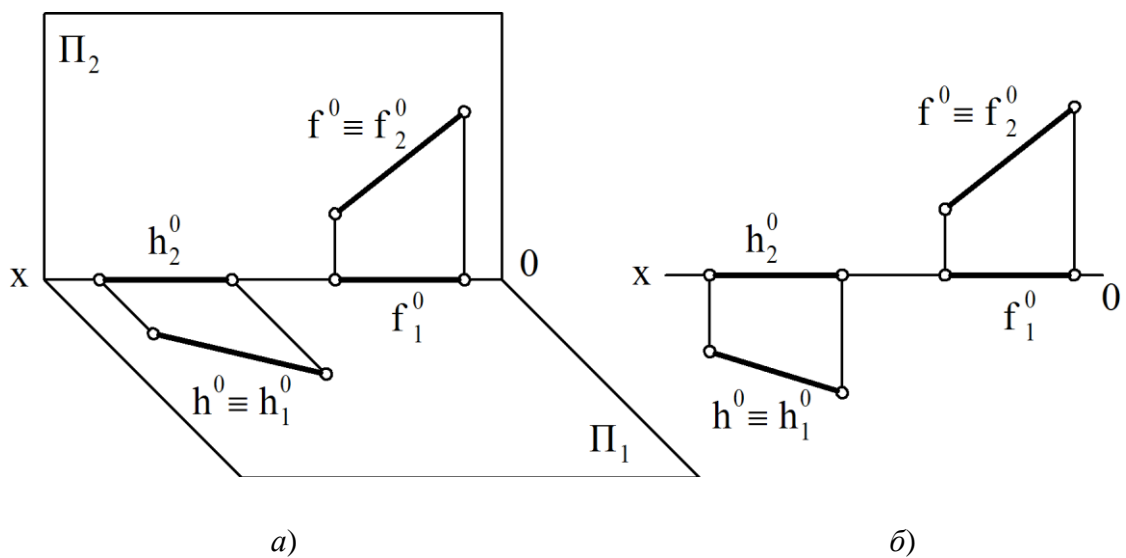


Рис. 1.27

Прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций (параллельные двум другим), называются проецирующими:

1) горизонтально-проецирующая - прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рис. 1.28, а, б)

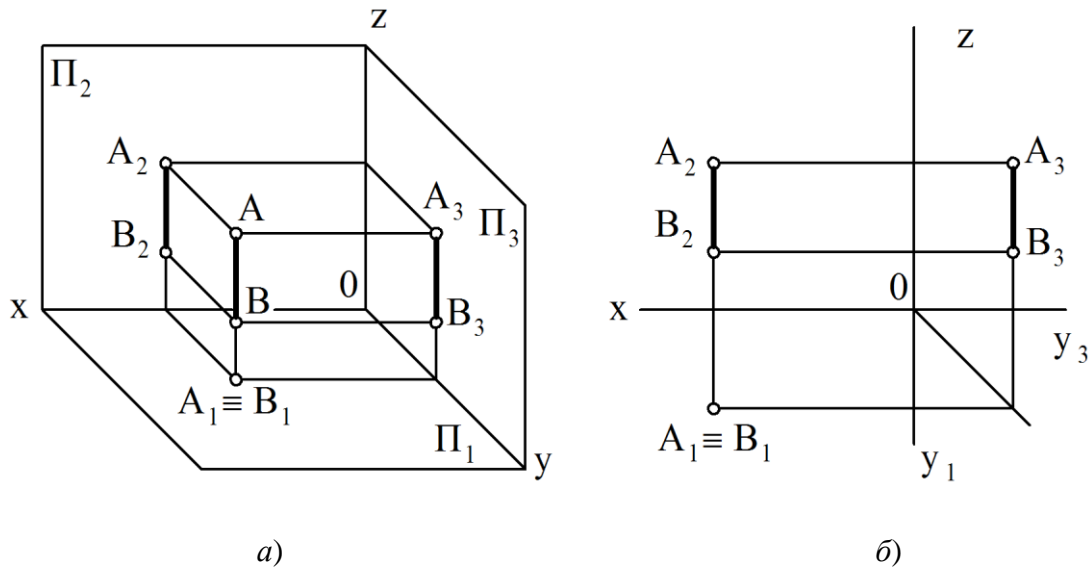


Рис. 1.28

2) фронтально-проецирующая - прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекции (рис. 1.29, а, б)

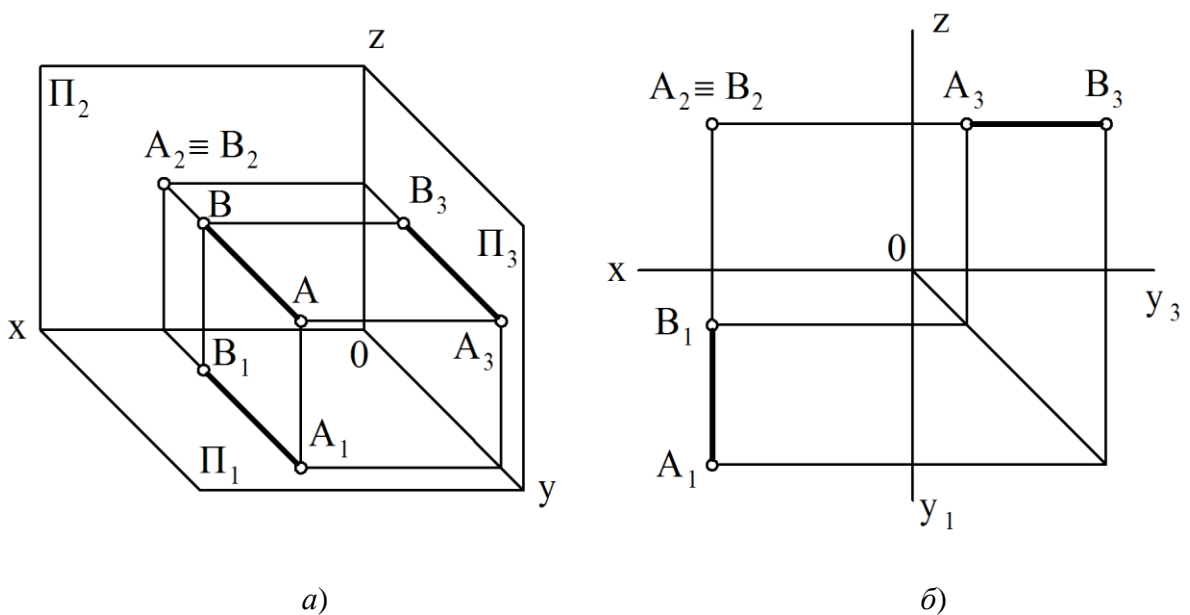


Рис. 1.29

3) профилно-проецирующая - прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций (рис. 1.30, а, б)

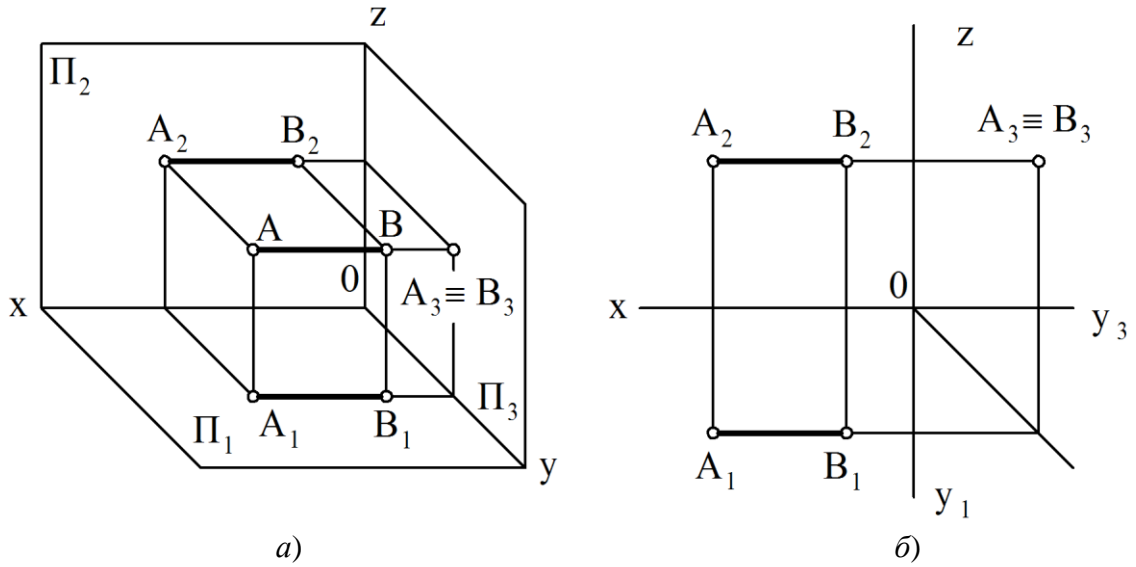


Рис. 1.30

На рис. 1.28-1.30 видно, что проекции прямых, перпендикулярных плоскостям проекций, на этих плоскостях представляют собой точки, а на тех плоскостях, которым прямые параллельны, проекции прямых будут перпендикулярны осям и равны по величине самим прямым.

## ЛЕКЦИЯ 2. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ

- 2.1. Принадлежность точки прямой. Деление отрезка прямой линии в данном отношении.
- 2.2. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций.
- 2.3. Следы прямой линии.
- 2.4. Взаимное положение прямых.
- 2.5. Проекции плоских углов.
- 2.6. Изображение плоскости на чертеже.
- 2.7. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.
- 2.8. Прямая и точка в плоскости.
- 2.9. Главные линии плоскости.

### 2.1. Принадлежность точки прямой. Деление отрезка прямой линии в данном отношении

Если точка лежит на прямой, то ее проекции будут лежать на одноименных проекциях этой прямой.

На рис. 2.1 изображена прямая и три точки:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Точка  $A$  принадлежит прямой  $\ell$ , т.к.  $A_2 \in \ell_2$ ,  $A_1 \in \ell_1$ , точки  $C$  и  $B$  – не принадлежат, т.к.  $C_1 \notin \ell_1$ , а  $B_2 \notin \ell_2$ .

На рис. 2.2 показано построение точки  $C$ , принадлежащей профильной прямой  $AB$ , если известна фронтальная проекция точки  $C$ . Для построения неизвестной горизонтальной проекции используется профильная проекция  $A_3B_3$  отрезка прямой  $AB$ .

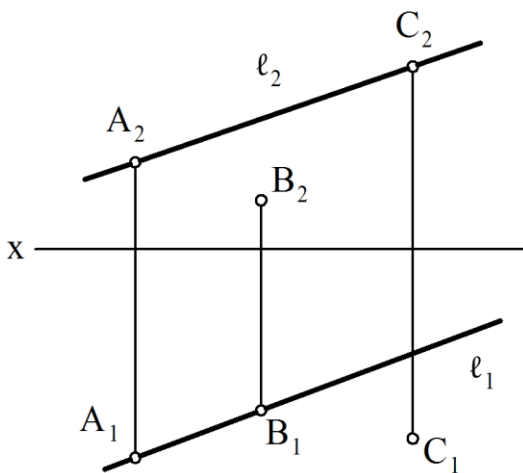


Рис. 2.1

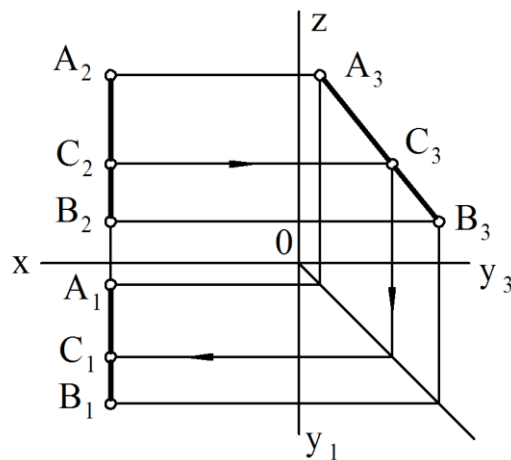


Рис. 2.2

Чтобы разделить отрезок прямой в данном отношении, достаточно разделить в этом отношении одну из проекции заданного отрезка, а потом с помощью линии связи перенести делящую точку на другие проекции отрезка.

На рис. 2.3 точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении 2:3. Для этого из точки  $A$  проведена вспомогательная прямая, на которой отложено 5 равных отрезков произвольной длины.

Если необходимо разделить отрезок профильной прямой  $AB$  точкой  $C$ , заданной фронтальной проекцией  $C_2$ , то выполняют следующие построения: из точки  $B_1$  проводят произвольную вспомогательную прямую, откладывают на ней  $B_11 = B_2C_2$  и  $1-2 = C_2A_2$ . Соединяют точки 2 и  $A_1$  и параллельно прямой 2- $A_1$  через точку 1 проводят прямую до пересечения с  $A_1B_1$  в точке  $C_1$ . Это и будет недостающая проекция точки  $C$  (рис. 2.4).

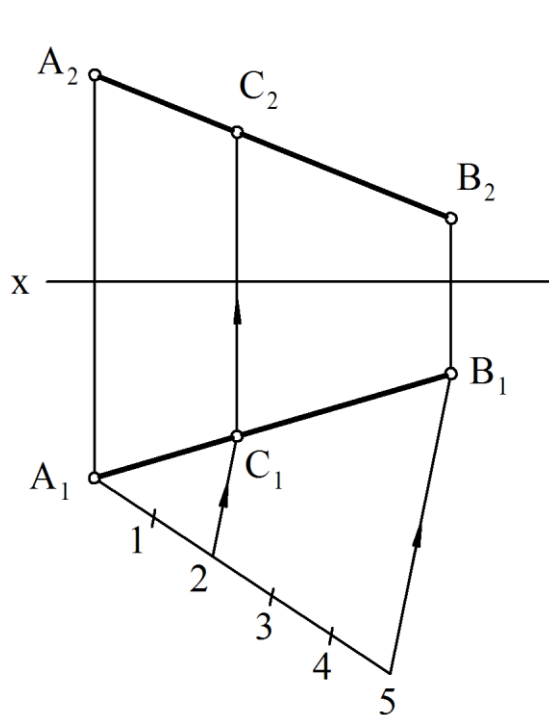


Рис. 2.13

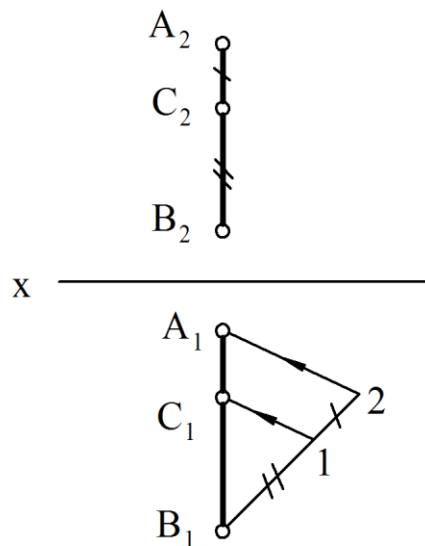


Рис. 2.14

## 2.2. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций

Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения необходимо построить на чертеже прямоугольный треугольник, одним катетом которого является проекция отрезка на какую-

либо плоскость проекций, а величина другого катета равна разности расстояний концов отрезка от плоскости проекций, на которой взяли первый катет. Натуральная величина отрезка прямой будет равна гипотенузе этого треугольника. Угол между катетом-проекцией и гипотенузой равен углу наклона отрезка к этой плоскости проекций.

На рис. 2.5 показано проецирование отрезка  $AB$  на горизонтальную плоскость  $\Pi_1$ . Через точку  $A$  проведена прямая  $AB'$ , параллельная горизонтальной проекции отрезка  $A_1B_1$ . В полученном прямоугольном треугольнике  $ABB'$  катет  $AB'$  равен проекции  $A_1B_1$ , а  $BB'$  равен разности расстояний концов отрезка от плоскости проекций  $\Pi_1$  ( $\Delta z$ ). Гипотенуза этого треугольника равна длине отрезка  $AB$ . Угол  $\alpha$  в треугольнике  $ABB'$  является углом наклона отрезка прямой  $AB$  к плоскости  $\Pi_1$ .

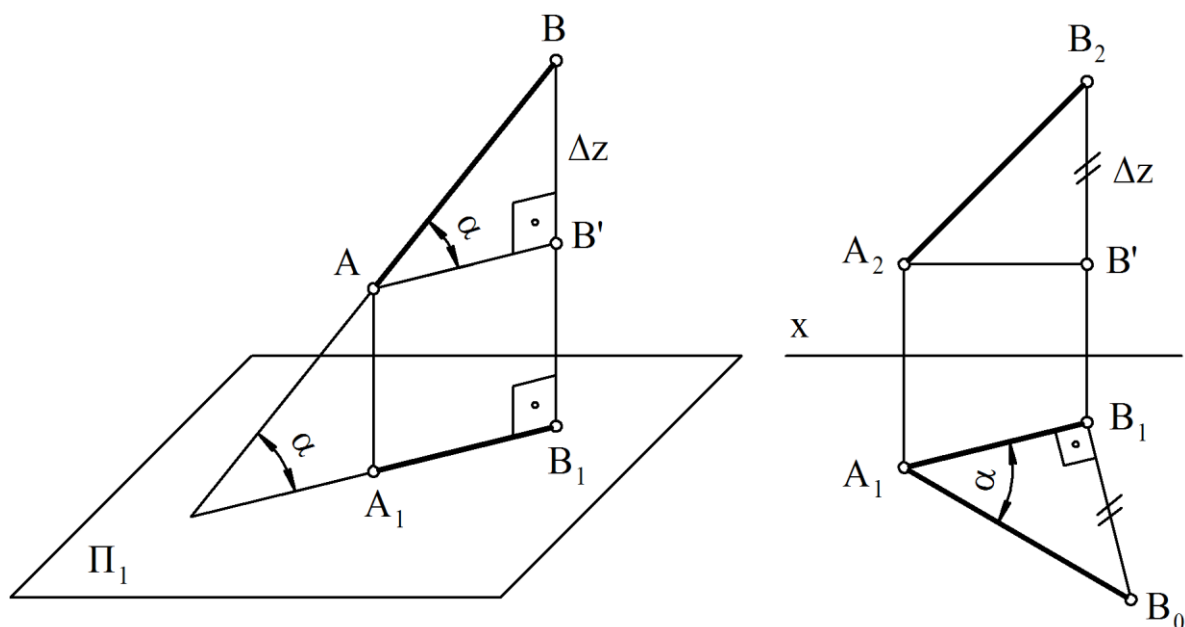


Рис. 2.5

Для определения угла наклона отрезка прямой  $AB$  на фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  строят прямоугольный треугольник аналогичным путем: через точку  $B$  проводят прямую  $BA'$ , параллельную  $A_2B_2$ . Катет  $BA' = A_2B_2$ , а второй катет  $AA'$  равен  $\Delta y$  – разности расстояний точек  $A$  и  $B$  от плоскости  $\Pi_2$  (рис. 2.6).

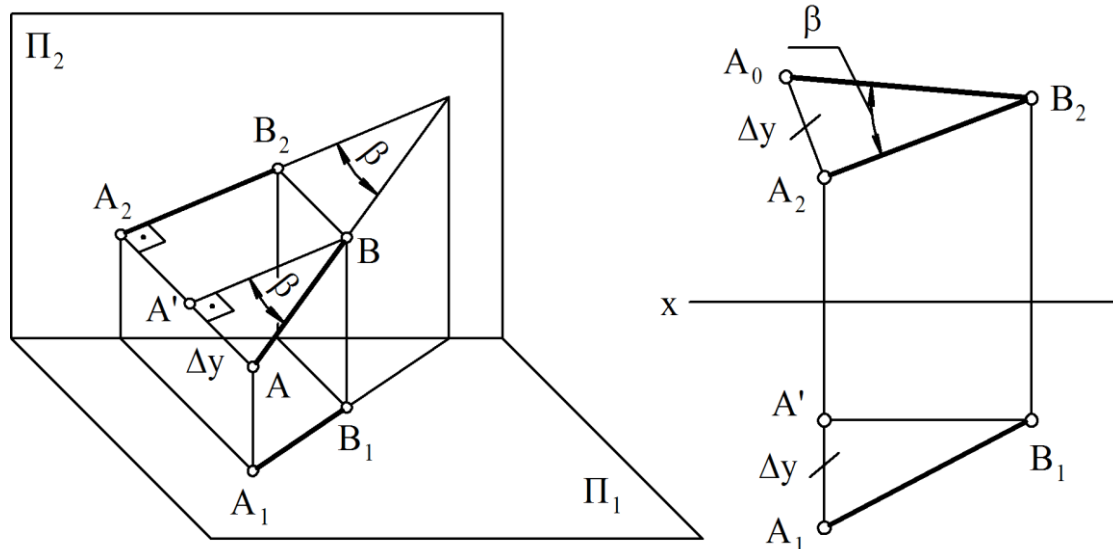


Рис. 2.16

Угол  $\beta$  в этом же треугольнике  $A'B'A$  является углом наклона прямой  $AB$  к плоскости  $\Pi_2$ .

### 2.3. Следы прямой линии

Прямая общего положения пересекает все плоскости проекций. Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называются следами прямой. Точка  $M$  – горизонтальный след прямой, точка  $N$  – фронтальный. Горизонтальная проекция  $M_1$  горизонтального следа прямой совпадает с самим следом – точкой  $M$ , а фронтальная проекция этого следа  $M_2$  лежит на оси  $OX$  (рис. 2.7). Фронтальная проекция  $N_2$  фронтального следа прямой совпадает с точкой  $N$ , а горизонтальная проекция  $N_1$  лежит на оси  $OX$ .

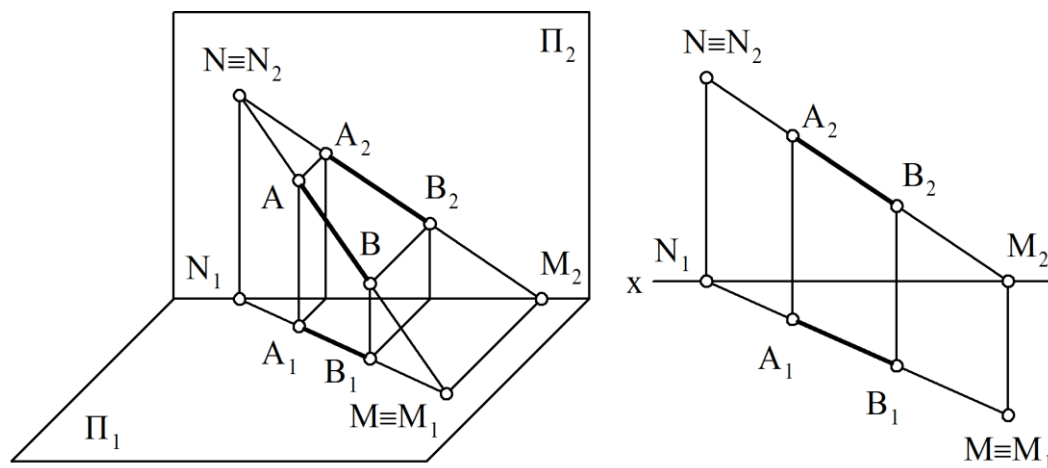


Рис. 2.7

Для построения горизонтального следа  $M$  прямой необходимо продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью  $OX$  и в этой точке восстановить перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

Для построения фронтального следа прямой продолжаем горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью  $OX$  и восстанавливаем перпендикуляр к оси до пересечения с фронтальной проекцией прямой. С помощью этих правил на рис. 2.8 и рис. 2.9 построены следы прямых  $a$  и  $b$ .

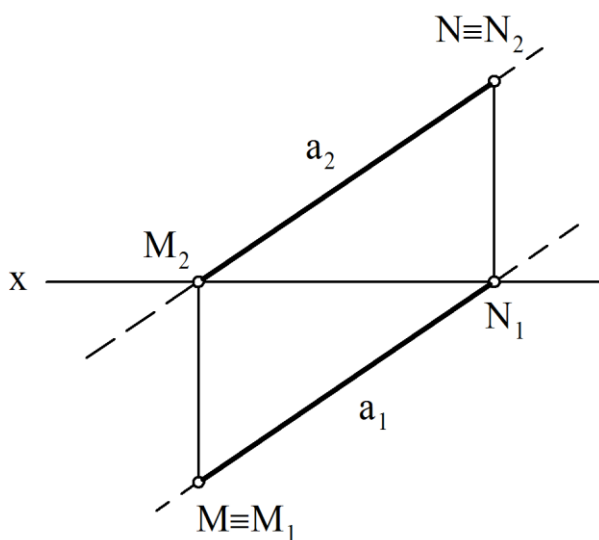


Рис. 2.8

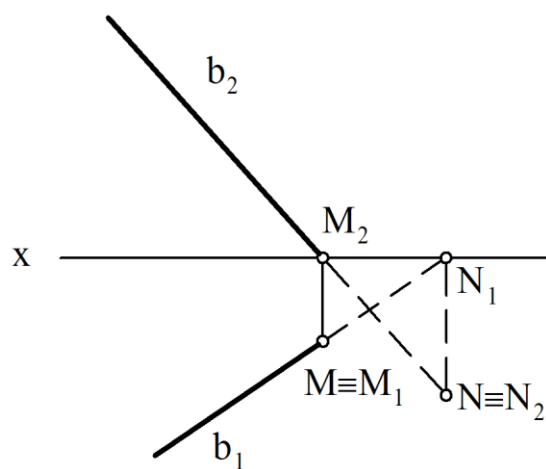


Рис. 2.9

Так как следы прямых – точки, в которых прямая переходит из одной четверти в другую, то они позволяют определить видимость этой прямой. Та часть прямой, которая расположена в пределах первого октанта, будет видимой. Проекции видимой части прямой изображаются сплошными линиями, а невидимой – штриховыми.

На рис. 2.10 показано построение следов прямой  $a$  в системе трех плоскостей проекций.

Построение горизонтального и фронтального следов выполняют по правилам, указанным выше, профильный след  $P$  находят как точку пересечения прямой  $a$  с профильной плоскостью проекций. Профильная проекция профильного следа прямой совпадает с самим следом, горизонтальная проекция этого следа  $P_1$  лежит на оси  $OY$ ; фронтальная проекция  $P_2$  лежит на оси  $OZ$ . Чтобы построить профильный след прямой,



продолжают фронтальную проекцию прямой  $a$  до пересечения с осью  $OZ$ . Отмечают точку  $P_2$  и из этой точки проводят перпендикуляр к оси  $OZ$  до пересечения с профильной проекцией прямой. Эта точка и будет искомым следом  $P$ , с которым совпадает  $P_3$ . Горизонтальная проекция  $P_1$  определяется как пересечение горизонтальной проекции прямой с осью  $OY$  (рис. 2.11).

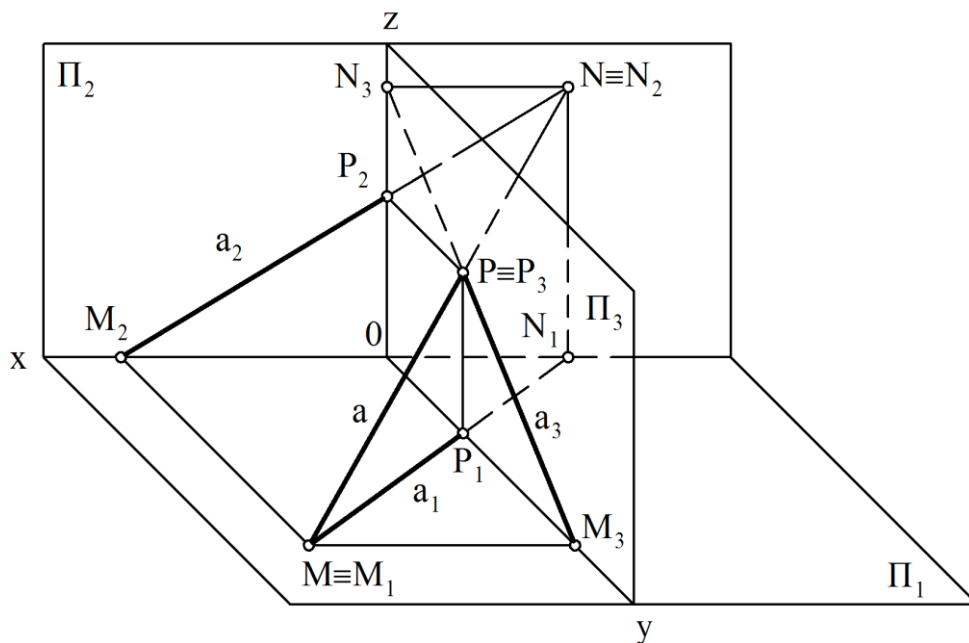


Рис. 2.10

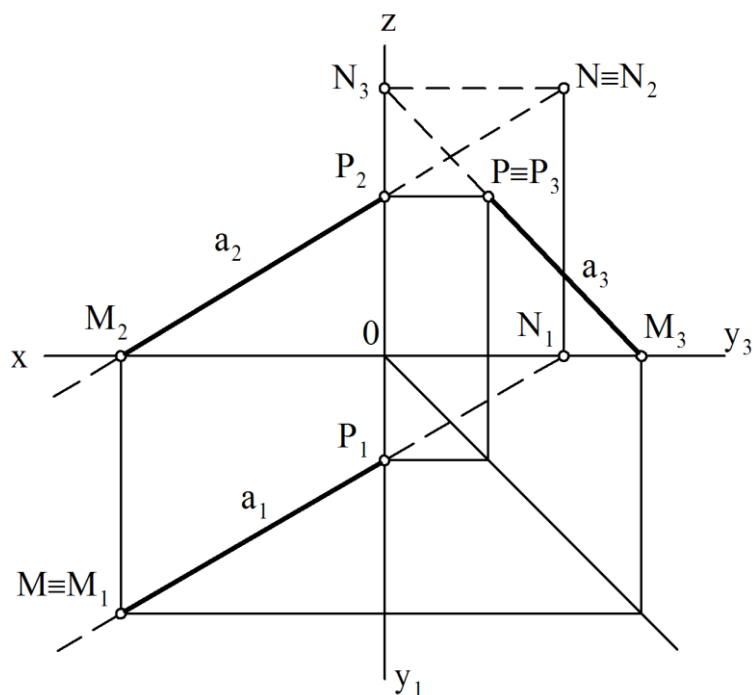


Рис. 2.11

## 2.4. Взаимное положение прямых

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение. Они могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на эпюре их одноименные проекции пересекаются, и точки пересечения проекций этих прямых лежат на одной линии связи (рис. 2.12).

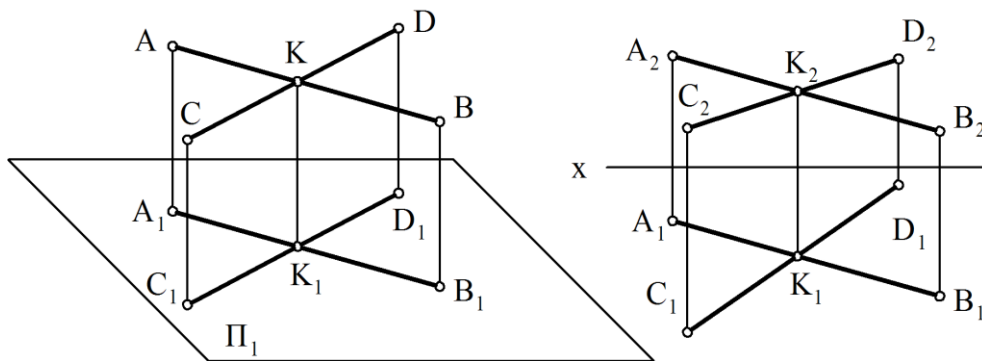


Рис. 2.12

Если прямые в пространстве параллельны, то на эпюре их одноименные проекции параллельны. На рис. 2.13 изображены прямые общего положения AB и CD, их горизонтальные и фронтальные проекции параллельны между собой. Можно утверждать, что и в пространстве эти прямые параллельны. Но для профильных прямых этого условия недостаточно.

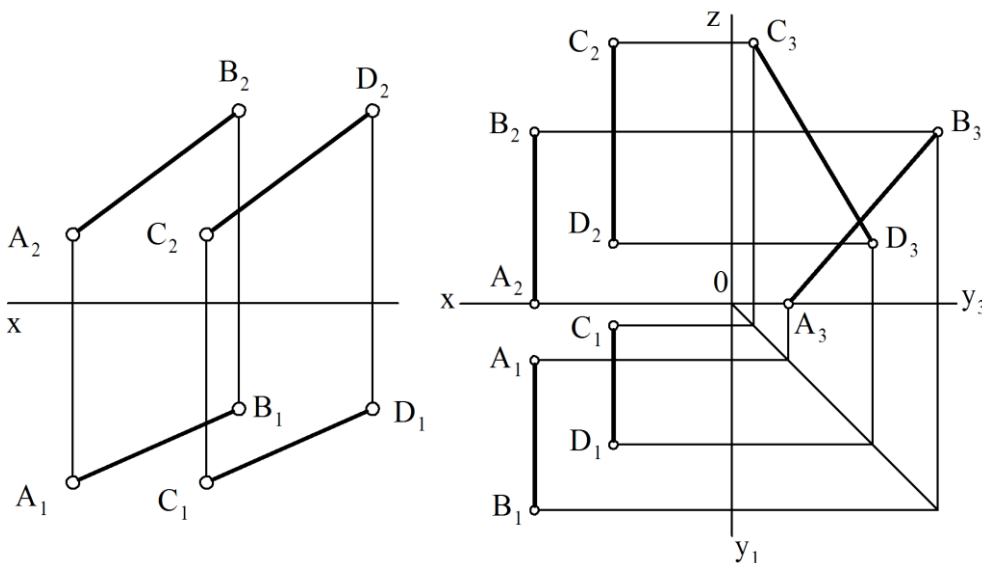


Рис. 2.13

Рис. 2.14

Для определения их взаимного положения необходимо построить профильные проекции прямых. На рис. 2.14 горизонтальные и фронтальные проекции прямых CD и EF параллельны, но эти прямые не параллельны, что следует из взаимного положения их профильных проекций.

Если прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны между собой, то такие прямые называются скрещивающимися (рис. 2.15).

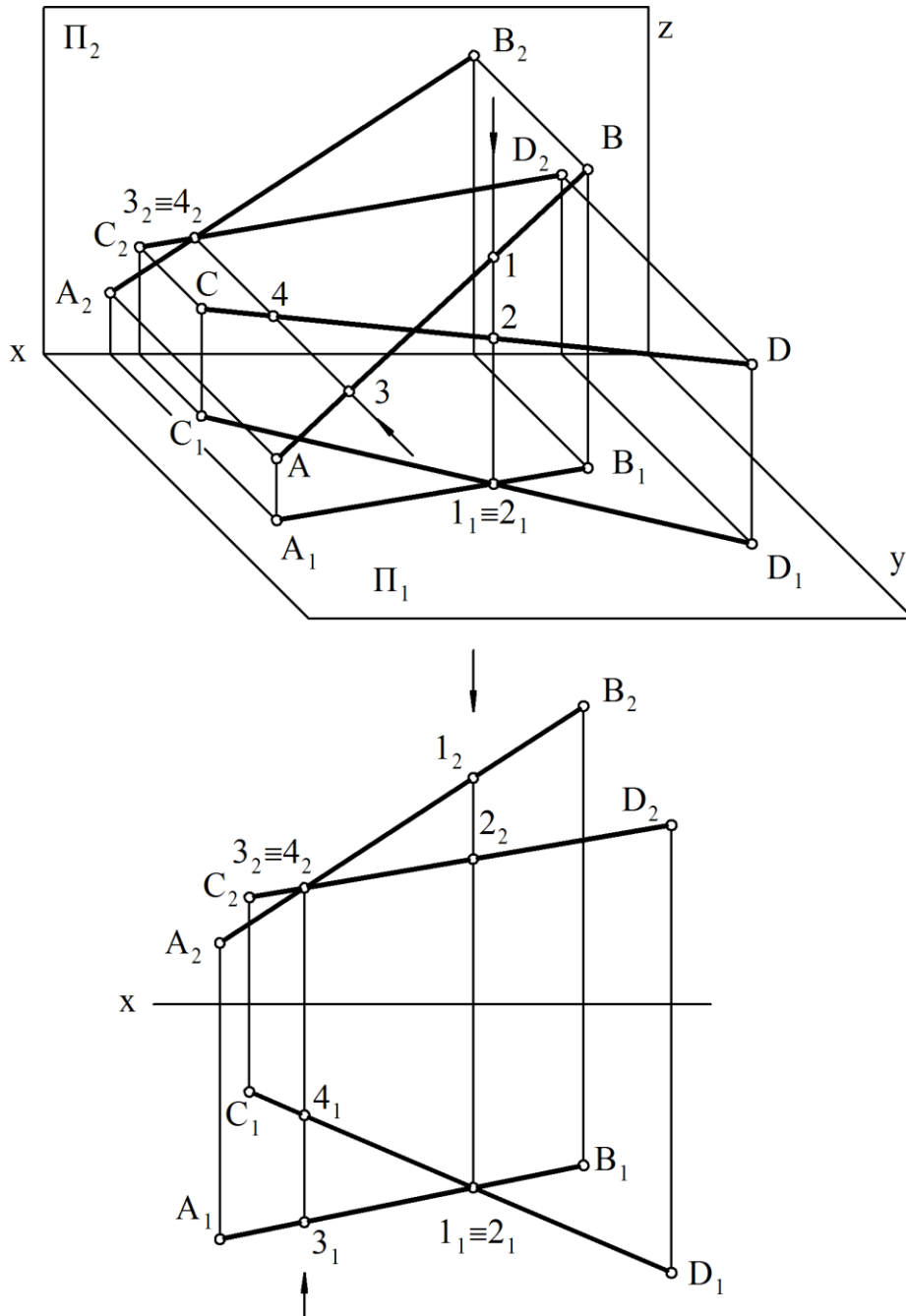


Рис. 2.15

На эюре точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для двух прямых. Точка пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых является на эюре проекцией двух конкурирующих точек, принадлежащих заданным прямым.

Конкурирующие точки – это точки, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости проекций. На эюре (см. рис. 2.15) горизонтальные проекции конкурирующих точек  $1_1$  и  $2_1$  совпадают, но точка 1 принадлежит прямой АВ, а точка 2 – прямой CD.

Из чертежа видно, что расстояния от плоскости  $\Pi_1$  до точек 1 и 2 различны. Фронтальная проекция перпендикуляра, обозначенная стрелкой, позволяет определить, какая из точек расположена ниже. В данном примере точка 2, лежащая на прямой CD, расположена ниже, чем точка 1, лежащая на прямой АВ. Следовательно, прямая CD проходит под прямой АВ.

Точке пересечения фронтальных проекций соответствуют точки 3 и 4, расположенные на прямых АВ и CD. Горизонтальная проекция перпендикуляра, отмеченная стрелкой, позволяет определить, какая из этих точек ближе к наблюдателю. Из чертежа видно, что точка 3 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 4. Поэтому прямая АВ проходит перед CD.

## 2.5. Проекция плоских углов

Плоский угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если его стороны параллельны этой плоскости проекций.

Для того чтобы прямой угол проецировался на плоскость в натуральную величину, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна, а другая не перпендикулярна плоскости проекций. Изображенный на рис. 2.16 угол ABC – прямой, одна его сторона (AB) параллельна плоскости проекций  $\Pi_1$ , поэтому на эту плоскость он спроецировался в виде прямого угла, т.е. в натуральную величину.

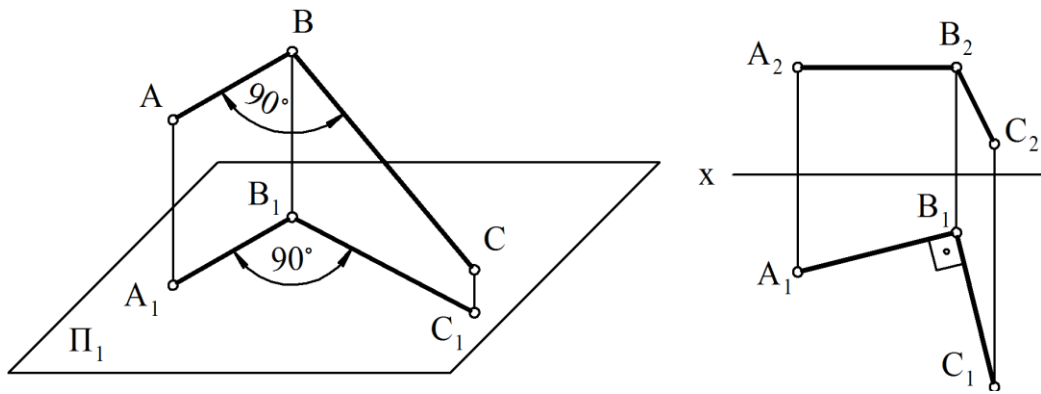


Рис. 2.16

## 2.6. Изображение плоскости на чертеже

Плоскость следует рассматривать как частный случай поверхности, которая на всем своем протяжении имеет одинаковое направление. Это двумерный геометрический образ. Плоскость считается бесконечной, не имеющей толщины и непрозрачной. Примером получения плоскости в пространстве может служить параллельное перемещение одной прямой по второй неподвижной прямой. Простейшими плоскостями считаются плоские геометрические фигуры (треугольник, круг и т.п.)

Плоскость на чертеже может быть задана (рис. 2.17):

- проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (см. рис. 2.17, а);
- проекциями отрезка прямой и точкой, не лежащей на прямой (см. рис. 2.17, б);
- проекциями двух пересекающихся отрезков прямых (см. рис. 2.17, в);
- проекциями двух отрезков параллельных прямых (см. рис. 2.17, г);
- проекциями плоской фигуры (треугольника) (см. рис. 2.17, д);

Соединяя проекции точек на первых четырех рисунках, можно перейти к изображению в виде треугольника или других плоских фигур.

На рис. 2.17, е изображена в пространстве плоскость, заданная треугольником ABC. Эта же плоскость показана на чертеже (см. рис. 2.17, д) двумя ее проекциями.

Плоскость на чертеже также может быть задана следами плоскости. Следами плоскости называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций (рис. 2.18, а, б).

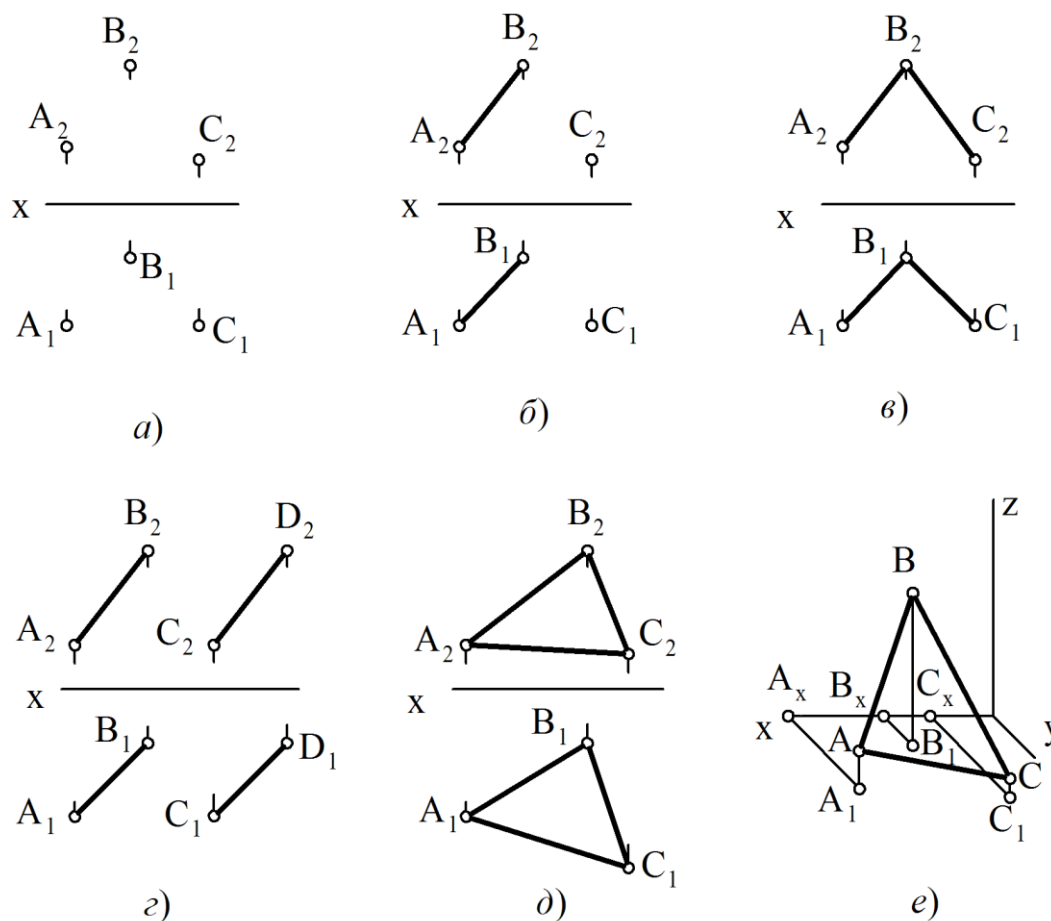


Рис. 2.17

Плоскость  $P$  (см. рис. 2.18) образует с плоскостями проекций  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$  трехгранный угол, вершина которого находится в пересечении следов. Две грани этого угла совпадают с плоскостями проекций и находятся между осью  $X$  и следами плоскости ( $h_{op}$  и  $f_{op}$ ), а третий угол – между следами  $h_{op}$  и  $f_{op}$ , – всегда меньше суммы двух других углов. Это значит, что на чертеже угол, заключенный между следами  $h_{op}$  и  $f_{op}$  (см. рис. 2.18, б), всегда больше угла, заключенного между этими следами в пространстве (см. рис. 2.18, а).

На рис. 2.18, а показаны горизонтальный  $h_{op}$  и фронтальный  $f_{op}$  следы. Точка пересечения следов, расположенная на оси  $X$ , называется точкой схода следов ( $X_p$ ). Так как след плоскости является прямой, лежащей в плоскости проекций, то горизонтальная проекция фронтального следа  $f_{1p}$  будет находиться на оси  $X$ . Здесь же будет находиться и фронтальная проекция  $h_{2p}$  горизонтального следа плоскости  $P$ . Обычно эти проекции следов не используются при решении задач и поэтому их можно не изображать и не обозначать.

Целесообразно следы плоскости обозначить на чертежах по наименованию самих плоскостей проекций ( $\Pi_1, \Pi_2$ ) или по обозначению их индексов, например,  $P_{\pi 1}$  и  $P_{\pi 2}$ , или же  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 2.19). Такое обозначение более удобно при решении задач. Следует иметь в виду, что со следами плоскости совпадают (сливаются) их проекции. Так, с горизонтальным следом плоскости  $\Gamma_1$  совпадает горизонтальная проекция этого следа, а с фронтальным следом плоскости  $\Gamma_2$  совпадает фронтальная проекция этого следа.

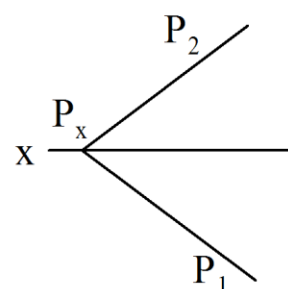
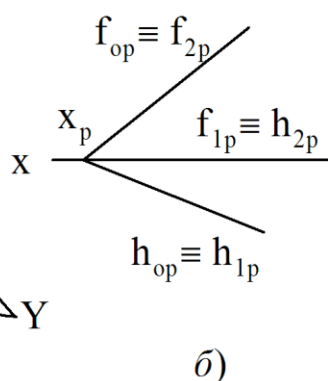
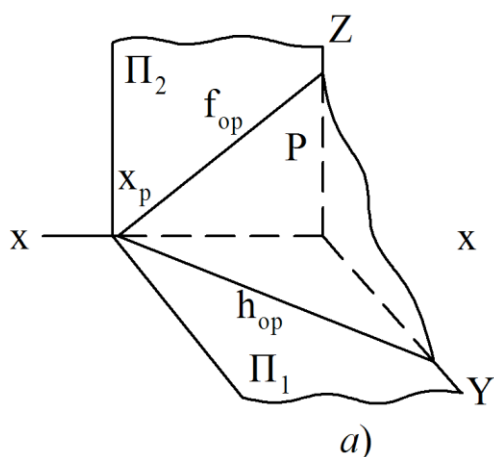


Рис. 2.18

Рис. 2.19

Построение следов плоскости  $\Gamma$ , заданной двумя пересекающимися прямыми  $a \cap b$  ( $a_1 \cap b_1$  и  $a_2 \cap b_2$ ), показано на рис. 2.20. Чтобы построить фронтальный след плоскости  $\Gamma_2$ , необходимо найти фронтальные следы  $N$  и  $N'$  прямых  $a$  и  $b$ . Здесь же будут находиться и их фронтальные проекции  $N_2$  и  $N_2'$ . Соединив данные следы прямой линией, получим фронтальный след плоскости  $\Gamma_2$ . Определив горизонтальные следы  $M \equiv M_1$  и  $M' \equiv M_1'$  прямых  $a$  и  $b$  и соединив их прямой линией, получим горизонтальный след плоскости  $\Gamma_1$ . Из рис. 2.20 видно, что для построения следа  $\Gamma_1$  достаточно найти один след  $M$  прямой  $a$  и соединить эту точку с точкой схода следов  $\Gamma_x$ .

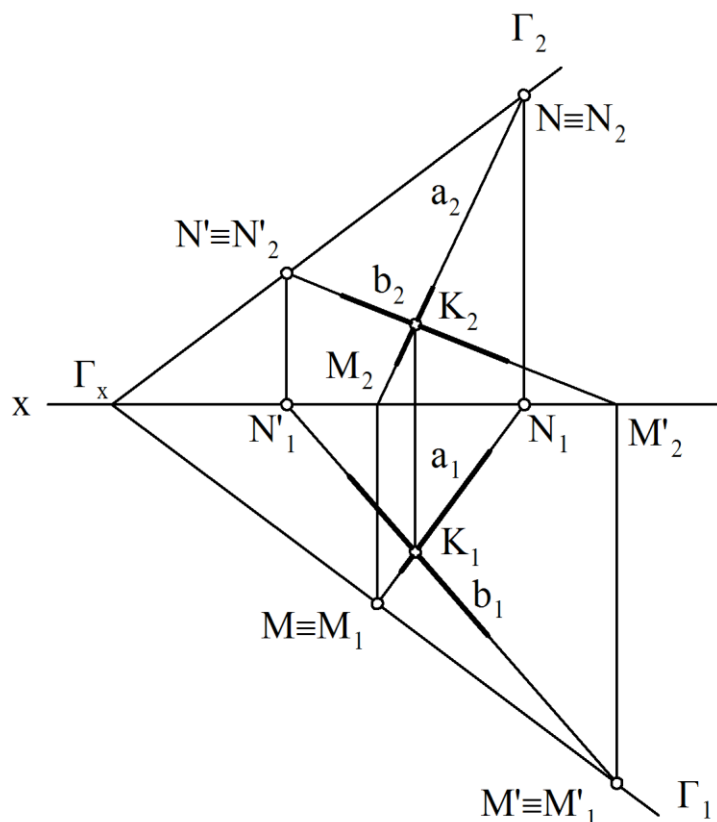


Рис. 2.20

## 2.7. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость в пространстве может занимать относительно плоскостей проекций  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  следующие положения: наклонно ко всем плоскостям проекций – плоскость общего положения (см. рис. 2.18, 2.19), перпендикулярно к одной из плоскостей проекций – проецирующая плоскость, перпендикулярно одновременно к двум плоскостям проекций, т.е. параллельно третьей плоскости проекций – плоскость уровня.

Проецирующие плоскости: горизонтально-проецирующая (перпендикулярна к  $\Pi_1$ ), фронтально-проецирующая (перпендикулярна к  $\Pi_2$ ), профильно-проецирующая (перпендикулярна к  $\Pi_3$ ).

В горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 2.21, а, б) фронтальный след  $\Gamma_2$  расположен перпендикулярно к плоскости проекций  $\Pi_1$  и к оси  $OX$ , а горизонтальный след может быть расположен под любым углом, кроме прямого. Горизонтальный след обладает собирательным свойством, т.е. любая точка, фигура, находящаяся в плоскости  $\Gamma$ , всегда проецируется на горизонтальный след  $\Gamma_1$ , это относится и к точке  $A$  (см. рис. 2.21, а, б), принадлежащей плоскости  $\Gamma$ .



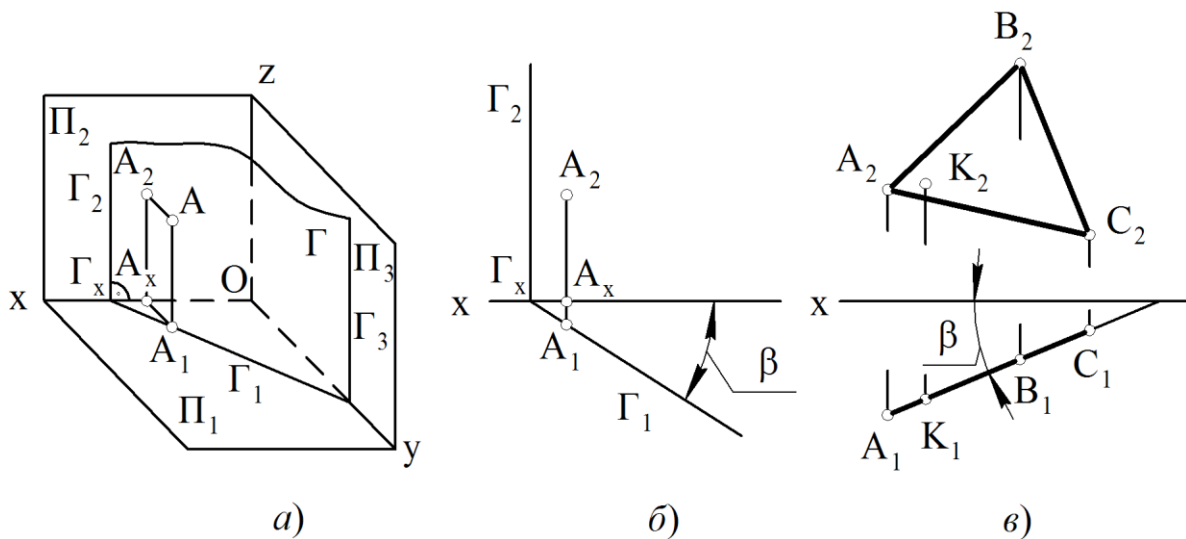


Рис. 2.21

На рис. 2.21, в изображен треугольник  $ABC$ , который занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ . Точка  $K$  принадлежит данному треугольнику. Горизонтальная проекция  $K_1$  проецируется на горизонтальную проекцию треугольника  $A_1B_1C_1$ . Угол  $\beta$ , заключенный между осью  $X$  и горизонтальным следом плоскости  $\Gamma_1$ , а также между горизонтальной проекцией треугольника  $A_1B_1C_1$  и осью  $X$ , есть угол наклона плоскостей  $\Gamma$  и треугольника  $ABC$  к фронтальной плоскости проекций.

Фронтально-проецирующие плоскости  $P$ , изображенные наглядно следами  $P_2, P_1$  и треугольником  $B_1C_1D_1$  ( $B_2C_2D_2$ ), показаны на рис. 2.22,  $a, б, в$ .

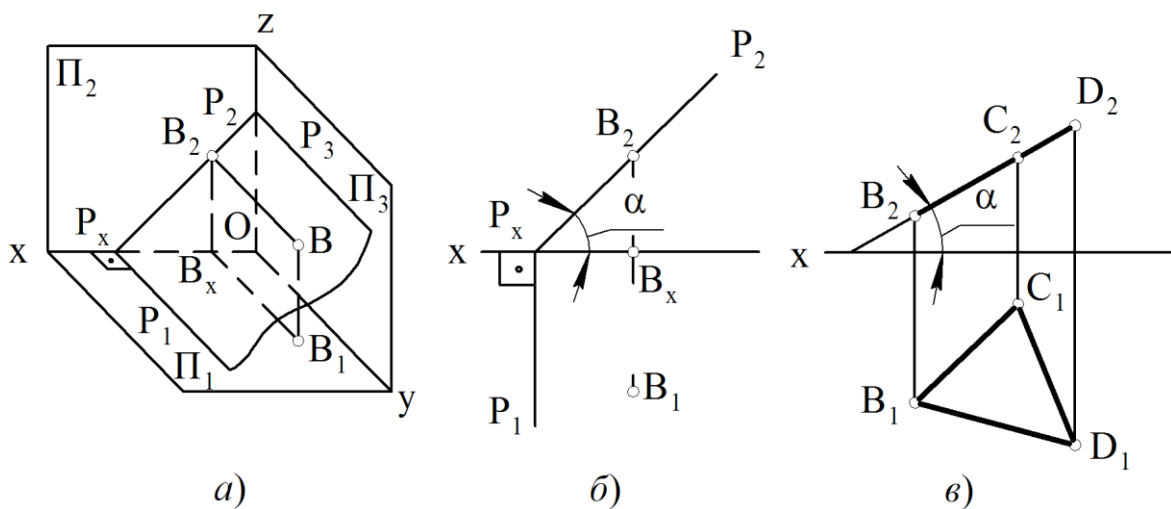


Рис. 2.22

В данном случае (см. рис. 2.22, *a* и *б*) горизонтальный след  $P_1$  расположен перпендикулярно  $\Pi_2$  и оси  $X$ . Точка  $B$ , находящаяся в плоскости  $P$ , спроецируется обязательно на фронтальный след  $P_2$ . Треугольник  $BСD$  (см. рис. 2.22, *в*) занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ , поэтому фронтальная его проекция изобразится в виде отрезка прямой  $B_2C_2D_2$ .

Угол  $\alpha$  (см. рис. 2.22, *б*, *в*), заключенный между  $P_2$  и осью  $X$ , а также между  $B_2C_2D_2$  и осью  $X$ , есть угол наклона плоскостей  $P$  и  $BСD$  к плоскости проекций  $\Pi_1$ .

Профильно-проецирующая плоскость показана на рис. 2.23. На рис. 2.23, *a* показано наглядное изображение профильно-проецирующей плоскости  $\Phi$ , точка  $A$ , принадлежащая этой плоскости и ее проекции. Профильная проекция точки  $A_3$  находится на профильном следе  $\Phi_3$ . На рис. 2.23, *б* и рис. 2.23, *в* изображены профильно-проецирующие плоскости, заданные следами плоскости  $\Phi$  ( $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ) и треугольником  $CDE$  ( $C_1D_1E_1; C_2D_2E_2; C_3D_3E_3$ ).

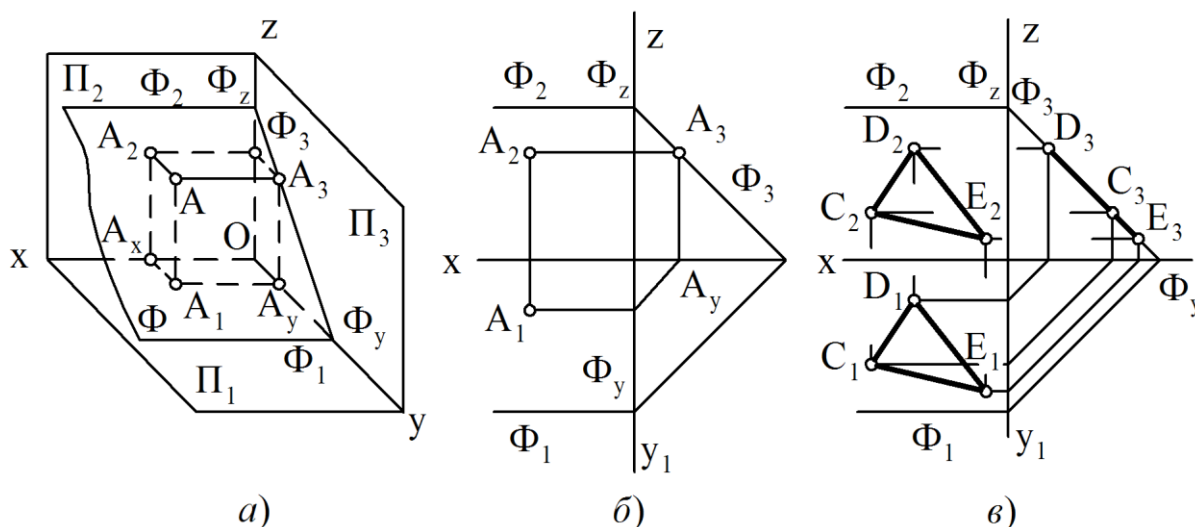


Рис. 2.23

Профильно-проецирующая плоскость, проходящая через ось  $X$ , называется осевой, а если она делит двугранный угол между плоскостями проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  пополам, то она еще называется биссекторной.

Плоскости уровня. К ним относятся горизонтальная плоскость – параллельная  $\Pi_1$ , фронтальная – параллельная  $\Pi_2$  и профильная – параллельная  $\Pi_3$ . Плоскости уровня перпендикулярны одновременно двум другим плоскостям проекций. Например, горизонтальная плоскость

перпендикулярна одновременно фронтальной и профильной плоскостям проекций.

На рис. 2.24, *а* показано наглядное изображение горизонтальной плоскости  $\Gamma$  ( $\Gamma_2, \Gamma_3$ ) в системе плоскостей проекций  $\Pi_1, \Pi_2$  и  $\Pi_3$ , а на рис. 2.24, *б* – чертеж данной плоскости, изображенный фронтальным и профильным следами ( $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ ). Показано также, как точка  $A$ , находящаяся в плоскости  $\Gamma$ , проецируется на плоскости проекций.

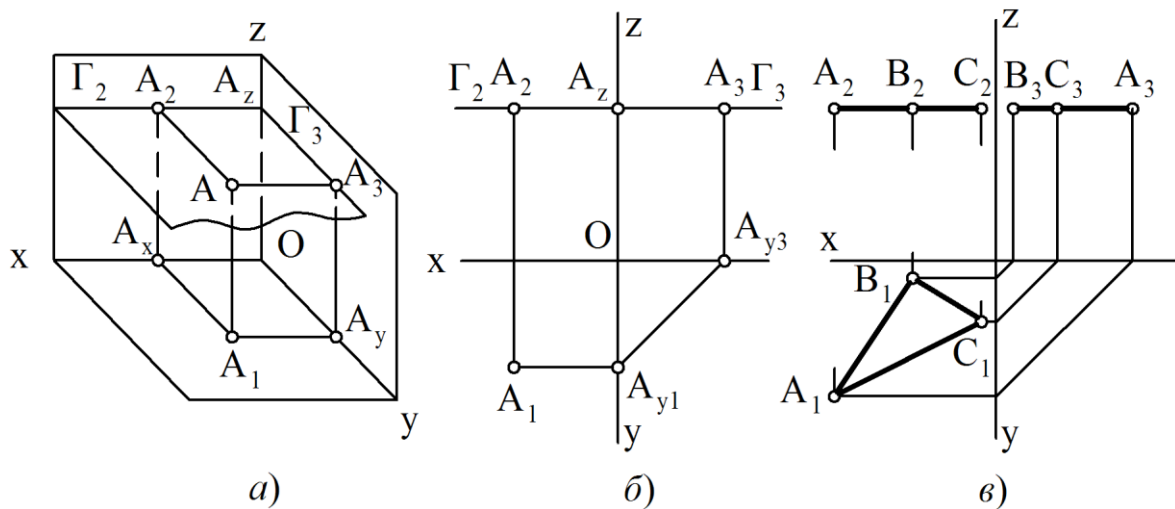


Рис. 2.24

Горизонтальная плоскость, заданная треугольником  $ABC$  (см. рис. 2.24, *в*), изображена проекциями  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$  и  $A_3B_3C_3$ . При этом фронтальная и профильная проекции изображаются отрезками прямых линий, а горизонтальная – треугольником, который равняется истинной величине треугольника  $ABC$ , т.к. он в пространстве занимает параллельное положение относительно плоскости проекций  $\Pi_1$ .

На рис. 2.25, *а* и *б* изображена фронтальная плоскость  $\Phi$ , где показаны горизонтальный  $\Phi_1$  и профильный  $\Phi_3$  следы этой плоскости, а также проекции точки  $A$ , принадлежащей этой плоскости. В данном случае горизонтальная и профильная проекции точки  $A$  совпадают с соответствующими следами.

Проекция треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  также изображают фронтальную плоскость треугольника  $ABC$ . Горизонтальная проекция  $A_1B_1C_1$  проходит параллельно оси  $X$ , тогда фронтальная проекция  $A_2B_2C_2$  проецируется в натуральную величину:  $A_2B_2C_2 = ABC$ .

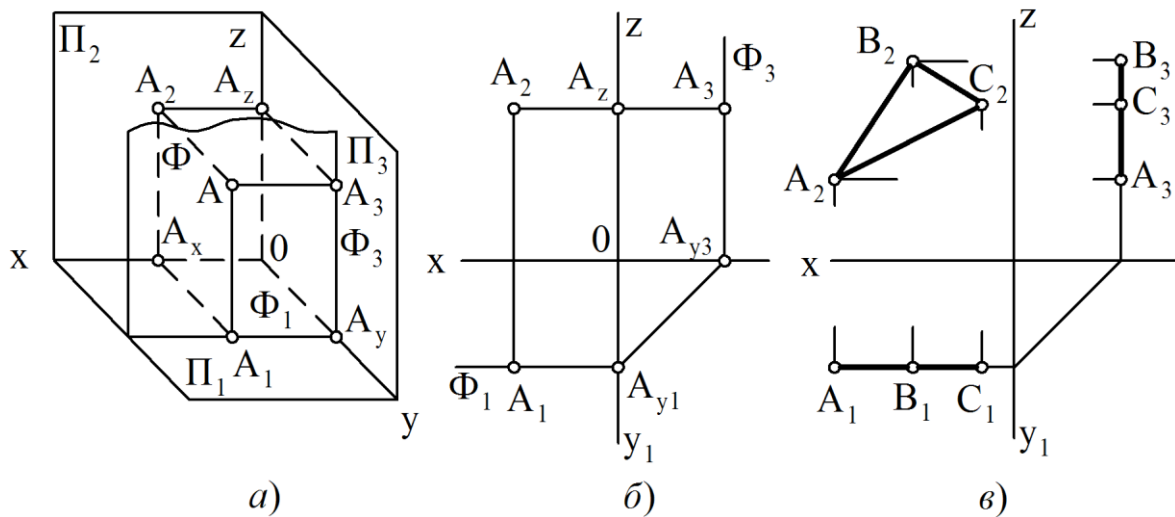


Рис. 2.25

## 2.8. Прямая и точка в плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, находящиеся в этой плоскости, или если она проходит через одну точку плоскости и параллельна прямой, принадлежащей данной плоскости (рис. 2.26).

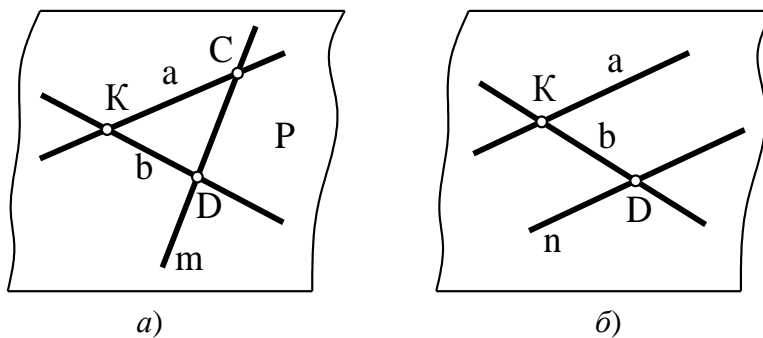


Рис. 2.26

На рис. 2.26, *a* плоскость *P* задана двумя пересекающимися прямыми *a* и *b*. Чтобы прямая принадлежала этой плоскости, необходимо на прямых *a* и *b* взять точки, например *C* и *D*, и через них провести прямую *m*. На рис. 2.26, *б* прямая *n* принадлежит плоскости, так как она проходит через точку *D*, принадлежащую плоскости  $a \cap b$  и параллельна прямой *a*.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, находящейся в этой плоскости. На рис. 2.27 показано построение проекции точки  $D$  на чертеже, заданном треугольником  $ABC$ .

Для решения задачи проводим в плоскости, заданной треугольником  $ABC$ , прямую  $n$  ( $n_1$  и  $n_2$ ), проходящую через произвольно выбранные точки  $A$  и  $1$  ( $A_1I_1$  и  $A_2I_2$ ) и принадлежащую плоскости треугольника. На прямой  $n$  в произвольном месте берем точку  $D$ . Фронтальная проекция точки  $D_2$  находится на фронтальной проекции прямой  $n_2$ , а горизонтальная проекция точки  $D_1$  – на горизонтальной проекции прямой  $n_1$ . Точку  $D$  можно было взять и на любой из сторон треугольника  $ABC$ .

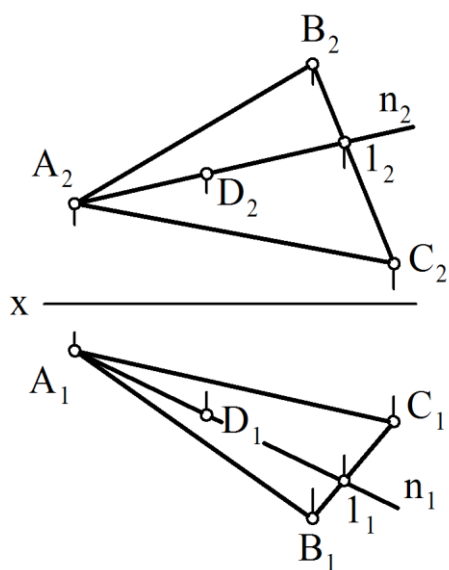


Рис 2.27

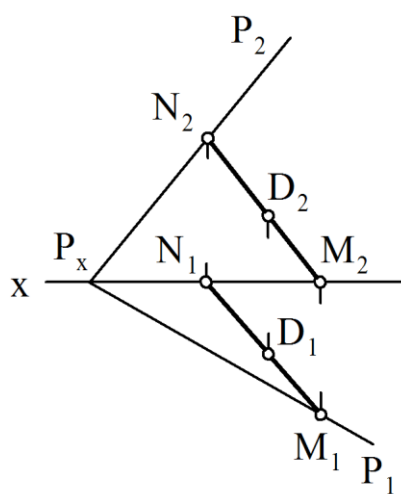


Рис. 2.28

Чтобы построить проекции точки  $D$ , принадлежащей плоскости  $P$ , заданной следами (рис. 2.28), проводим в этой плоскости произвольно фронтальную и горизонтальную проекции прямой  $MN$  ( $M_1N_1$  и  $M_2N_2$ ), принадлежащей плоскости  $P$ , и на соответствующих проекциях прямой отмечаем проекции точек  $D_2$  и  $D_1$ .

## 2.9. Главные линии плоскости

К главным линиям плоскости относятся горизонтали ( $h$ ), фронтали ( $f$ ), профильные прямые ( $p$ ) и линии наибольшего наклона к плоскостям проекций.

Горизонталью  $h$  ( $h_1$  и  $h_2$ ) плоскости называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций

(рис. 2.29). Так как горизонталь плоскости параллельна горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ , то фронтальная ее проекция будет параллельна оси  $X$ . Для построения проекций горизонтали проводим через точку  $A_2$  прямую, параллельную оси  $X$ . Это будет фронтальная проекция горизонтали ( $h_2$ ). Горизонтальную проекцию горизонтали ( $h_1$ ) находим по линии связи.

На рис. 2.30. показано наглядное изображение плоскости  $P$  ( $P_1$  и  $P_2$ ) и горизонтали  $h$  с ее проекциями  $h_2$  и  $h_1$ . При построении проекций горизонтали на чертеже плоскости, заданной следами  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 2.30, а, б), проводим через произвольно выбранную точку  $N$  (проекция  $N_2$ ) на следе  $P_2$  прямую  $m$  параллельно оси  $X$ . Горизонтальная проекция горизонтали ( $h_1$ ) пройдет через точку  $N_1$  параллельно горизонтальному следу  $P_1$ .

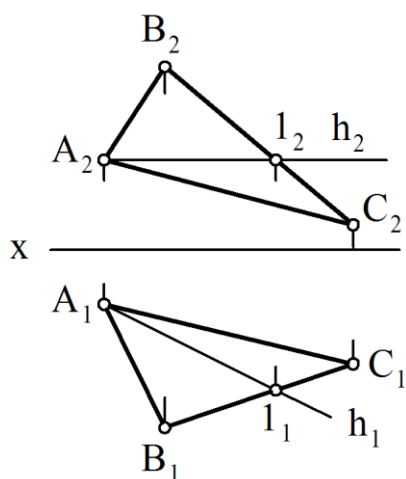


Рис. 2.29

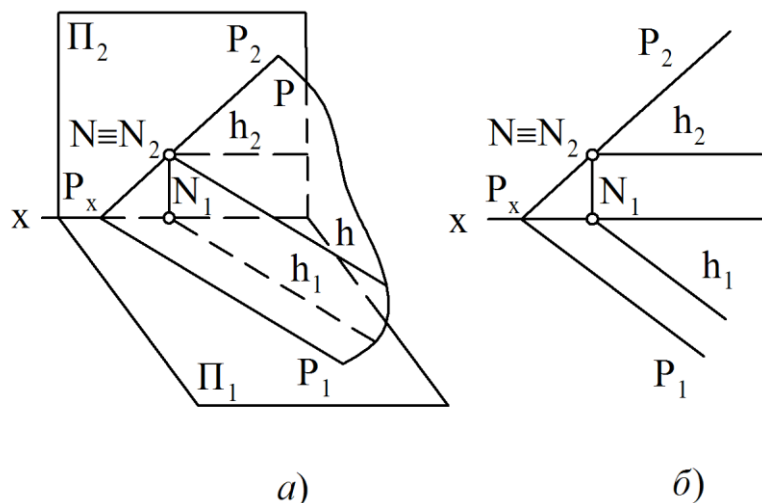


Рис. 2.30

Фронталью плоскости  $f$  ( $f_1$  и  $f_2$ ) называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали на чертеже параллельна оси  $X$ , а фронтальную проекцию фронтали находим при помощи линии связи (рис. 2.31).

На рис. 2.32, а показано наглядное изображение плоскости  $\Gamma$  ( $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ) и фронтали  $f$  с ее проекциями  $f_1$  и  $f_2$ , а на рис. 2.32, б представлен чертеж плоскости, заданной следами, и горизонтальная и фронтальная проекции фронтали этой плоскости.

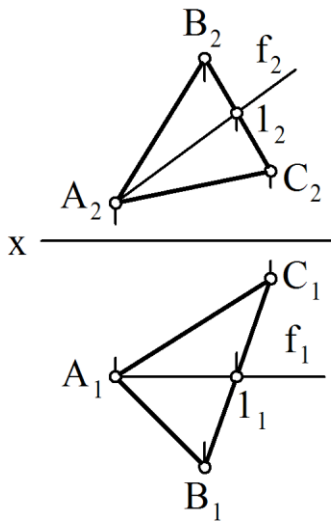


Рис. 2.31

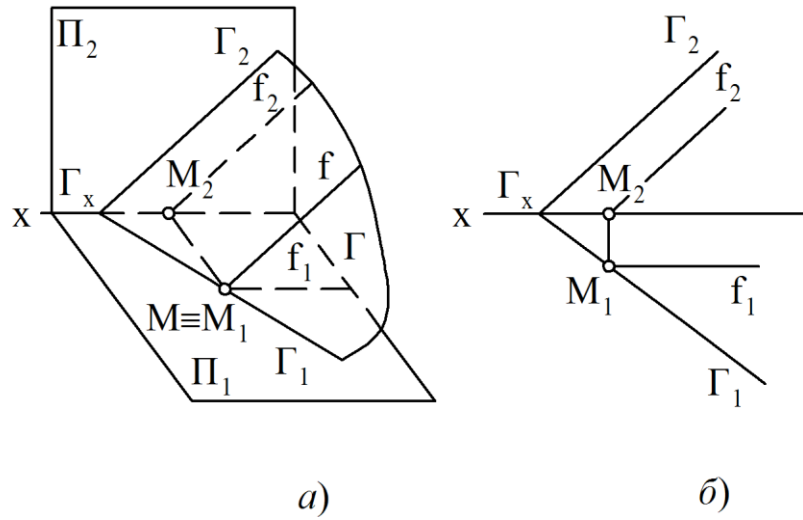


Рис.2.32

Профильной прямой  $p$  ( $p_1, p_2, p_3$ ) называется прямая линия, принадлежащая плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рис. 2.33).

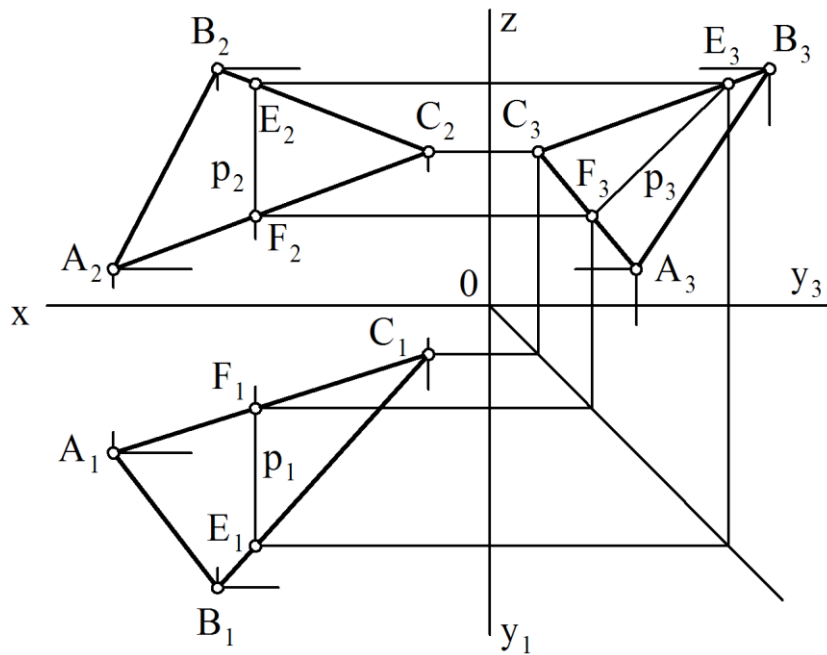


Рис. 2.33

В этом случае фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой  $p$  ( $E_1F_1$  и  $E_2F_2$ ) параллельны  $\Pi_3$ , а профильная проекция  $E_3F_3 = EF$ , т.е. равняется натуральной величине отрезка  $EF$ .

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций (горизонтальной, фронтальной и профильной) называются прямые, принадлежащие этой плоскости и перпендикулярные фронталям, горизонталям, профильным прямым плоскости, или же соответствующим следам плоскости. Линию наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций чаще всего называют линией ската.

Так, если в точку  $A$  плоскости  $\Gamma$  (рис. 2.34, *a*) поместить шарик, то траектория его движения определится прямой линией  $AM$  ( $A_1M_1$ ,  $A_2M_2$ ), т.е. линией ската, перпендикулярной к горизонтали  $h$  ( $h_1$ ,  $h_2$ ), а также к горизонтальному следу  $\Gamma_1$  плоскости  $\Gamma$ .

Чтобы в плоскости  $\Gamma$  ( $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ) (рис. 2.34, *б*), заданной следами, провести линию ската, необходимо на этой плоскости взять произвольную точку  $A$  ( $A_1$ ,  $A_2$ ) и через ее горизонтальную проекцию  $A_1$  провести линию перпендикулярно горизонтальному следу либо горизонтальной проекции горизонтали ( $h_1$ ). Прямой угол между  $h_1$  и  $M_1N_1'$  спроецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, так как одна из его сторон, а именно горизонталь, параллельна горизонтальной плоскости проекций, но  $h_1$  параллельна  $\Gamma_1$ , следовательно, угол между  $\Gamma_1$  и  $M_1N_1$  тоже прямой.

Как видно из рис. 2.34, *a*, линейный угол  $AM_1A_1$ , заключенный между линией ската  $AM_1$  и ее горизонтальной проекцией  $M_1A_1$ , равняется двугранному углу, образованному плоскостями  $\Gamma$  и  $\Pi_1$ .

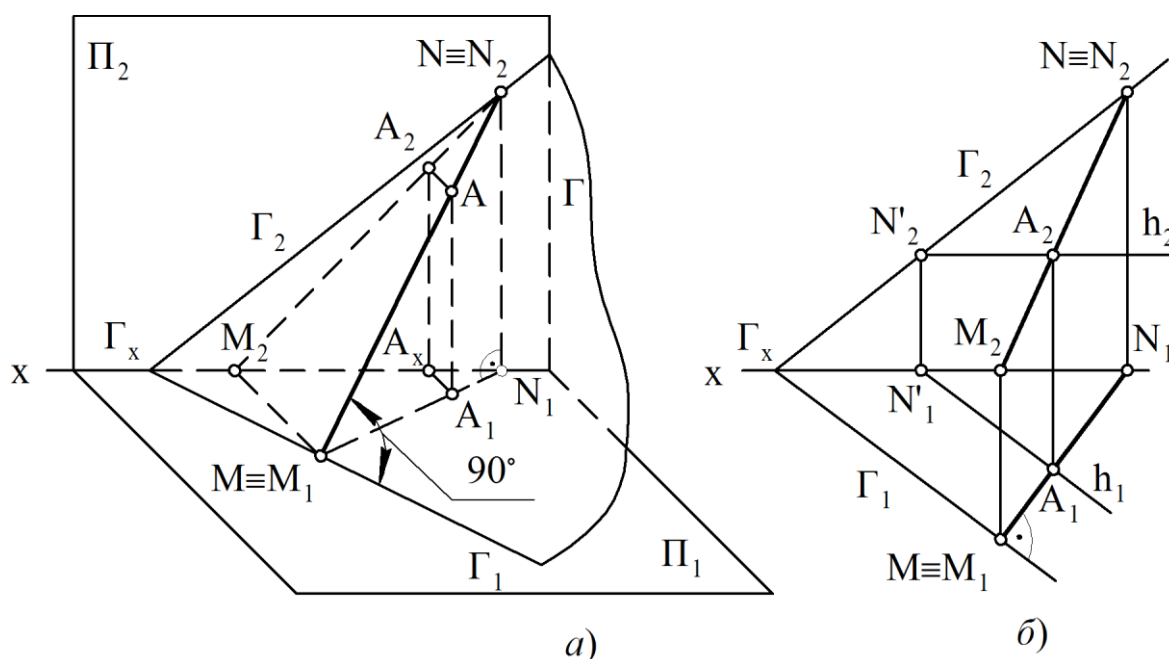


Рис. 2.34



Чтобы определить угол наклона плоскости, заданной треугольником  $ABC$ , к плоскости проекций  $\Pi_1$  (рис. 2.35), необходимо выполнить следующее: провести в плоскости треугольника  $ABC$  горизонталь  $h$  ( $h_1$  и  $h_2$ ), затем из точки  $B_1$  провести горизонтальную проекцию линии ската ( $B_1K_1$ ) перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали и по линии связи определить фронтальную проекцию линии ската ( $B_2K_2$ ). Построив на горизонтальной проекции линии ската  $B_1K_1$  прямоугольный треугольник  $B_1K_1B_0$ , одним катетом которого является горизонтальная проекция линии ската  $B_1K_1$ , а вторым – превышение ( $\Delta z$ ) точки  $B$  ( $B_2$ ) над точкой  $K$  ( $K_2$ ) относительно горизонтальной плоскости проекций, получим угол  $\alpha$ , заключенный между горизонтальной проекцией линии ската и ее натуральной величиной. Это и есть угол наклона треугольника  $ABC$  к плоскости проекций  $\Pi_1$ .

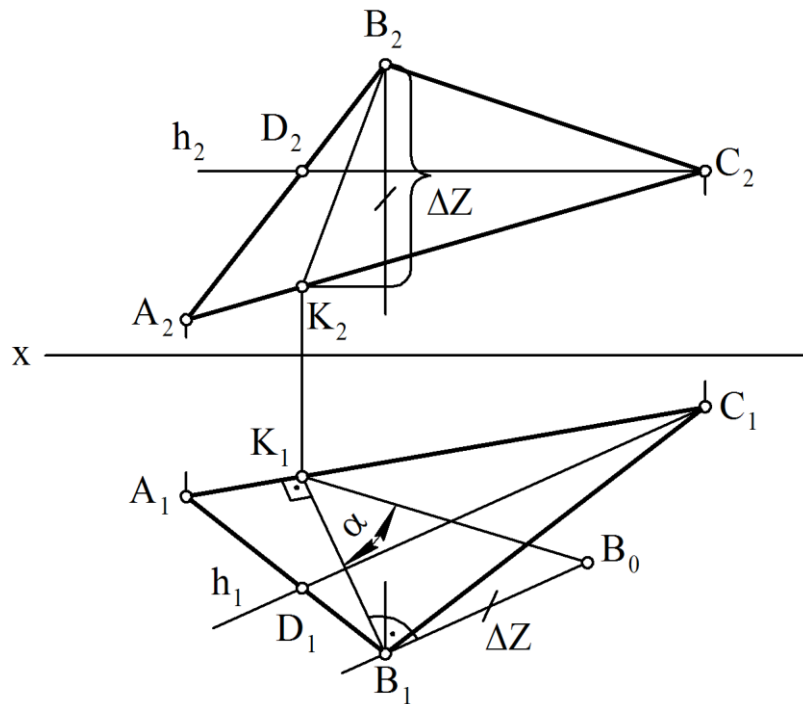


Рис. 3.14

Определение угла наклона плоскости к плоскостям проекций  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  производится аналогичным образом. Для этого необходимо провести фронталь в плоскости, а затем линию перпендикулярно к ней, или же профильную прямую и перпендикуляр к ней.

## ЛЕКЦИЯ 3. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ.

- 3.1. Прямая параллельная плоскости.
- 3.2. Построение точки пересечения прямой и плоскости.
- 3.3. Параллельные плоскости.
- 3.4. Пересекающиеся плоскости.

### 3.1. Прямая, параллельная плоскости

Прямая линия относительно плоскости может занимать следующие положения: находиться в плоскости, быть параллельной плоскости и пересекаться с плоскостью.

Из геометрии известно, что прямая линия параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, находящейся в этой плоскости. Пусть требуется через точку  $D$  ( $D_1, D_2$ ) провести прямую, параллельную плоскости, заданной треугольником  $ABC$  ( $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ ) (рис. 3.1).

В треугольнике  $ABC$  проводим произвольно отрезок  $BK$  ( $B_2K_2$  и  $B_1K_1$ ), а через точку  $D$  ( $D_1, D_2$ ) проводим прямую  $m$ , параллельную данному отрезку, т.е.  $m_2 \parallel B_2K_2$ , а  $m_1 \parallel B_1K_1$ . Через данную точку  $D$  можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных плоскости треугольника  $ABC$ , в том числе и параллельных сторонам треугольника.

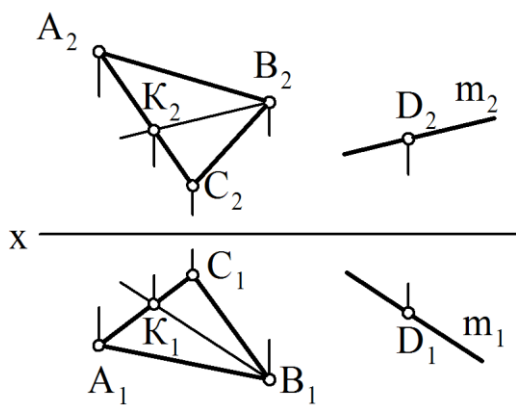


Рис. 3.1

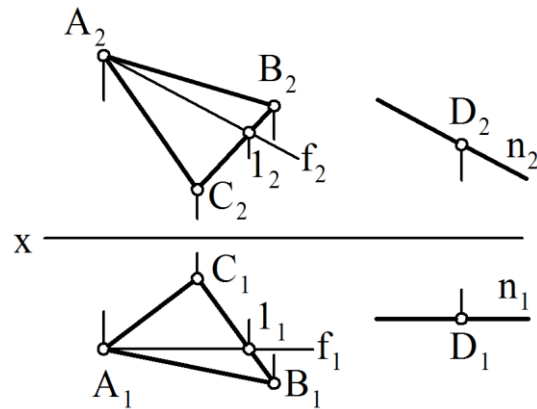


Рис. 3.2

Если бы была поставлена задача провести через точку  $D$  прямую, параллельную треугольнику  $ABC$  и фронтальной плоскости проекций, то в данном случае можно провести только одну прямую, параллельную и треугольнику и  $\Pi_2$ . Для этого в треугольнике проводим фронталь  $f$  ( $f_1, f_2$ ), а

через точку  $D (D_1, D_2)$  – прямую  $n (n_1, n_2)$ , параллельную фронтали ( $n_1 \parallel f_1, n_2 \parallel f_2$ ), (рис. 3.2).

В случае построения прямой, параллельной плоскости  $P$ , заданной следами, необходимо в плоскости  $P$  провести произвольно прямую или горизонталь (фронталь), а затем провести проекции прямой, проходящей через точку  $D (D_2, D_1)$ , параллельные соответствующим проекциям прямых, взятых в плоскости  $P$  (рис. 3.3).

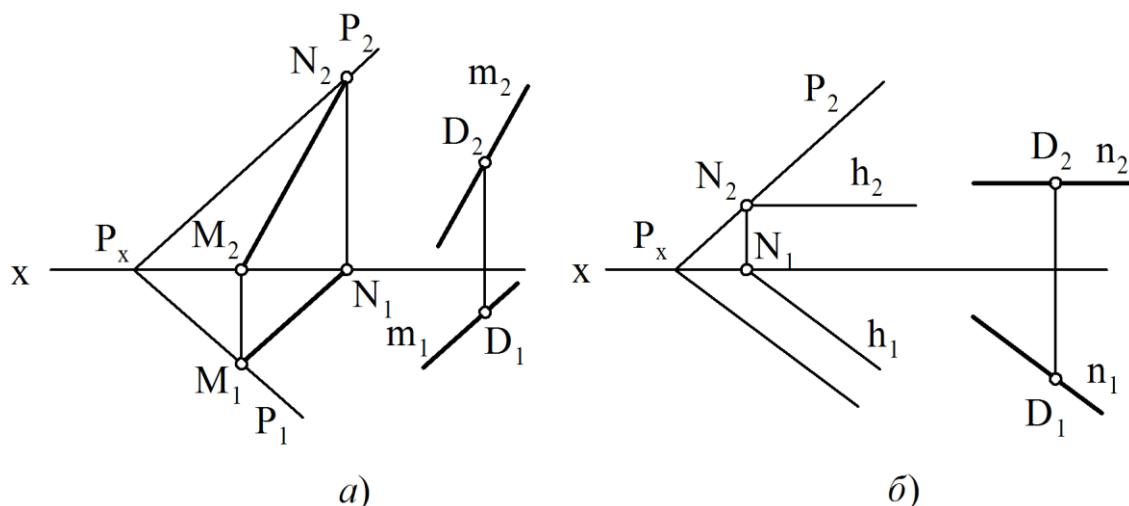


Рис. 3.3

На рис. 3.3, *а*, в плоскости  $P$  проведен отрезок произвольной прямой  $MN (M_1N_1, M_2N_2)$ , а через точку  $D$  – прямая  $m (m_1, m_2)$ , одноименные проекции которой параллельны проекциям отрезков, взятых в плоскости, т.е.  $m_1 \parallel M_1N_1, m_2 \parallel M_2N_2$ .

На рис. 3.3, *б* в плоскости  $P$  проведена горизонталь  $h (h_1, h_2)$ , а через  $D_1$  – прямая  $n_1$ , параллельная  $h_1$ , и через  $D_2$  проведена прямая  $n_2$ , параллельная  $h_2$ .

### 3.2. Построение точки пересечения прямой и плоскости

Точку пересечения (встречи) прямой линии с плоскостью частного положения определяют непосредственно из чертежа, без дополнительных построений, так как известно, что следы плоскостей частного положения обладают собирательным свойством, и любая точка, находящаяся в плоскости, обязательно проецируется на один из следов плоскости; вторая проекция точки находится по линии связи. Подробно это рассмотрим на примере пересечения отрезка  $AB$  с горизонтально проецирующей плоскостью  $\Gamma$  (рис. 3.4).

Отрезок АВ пересекается с плоскостью  $\Gamma$  ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) в точке К, горизонтальная ее проекция  $K_1$  находится на следе  $\Gamma_1$ , как точка, принадлежащая этой плоскости. Фронтальная проекция  $K_2$  определяется по линии связи (см. рис. 3.4, а и б). Часть отрезка КВ ( $K_2B_2$ ) на фронтальной плоскости проекций, а именно, за точкой пересечения К, закрыта плоскостью, поэтому она изображается штриховой линией.

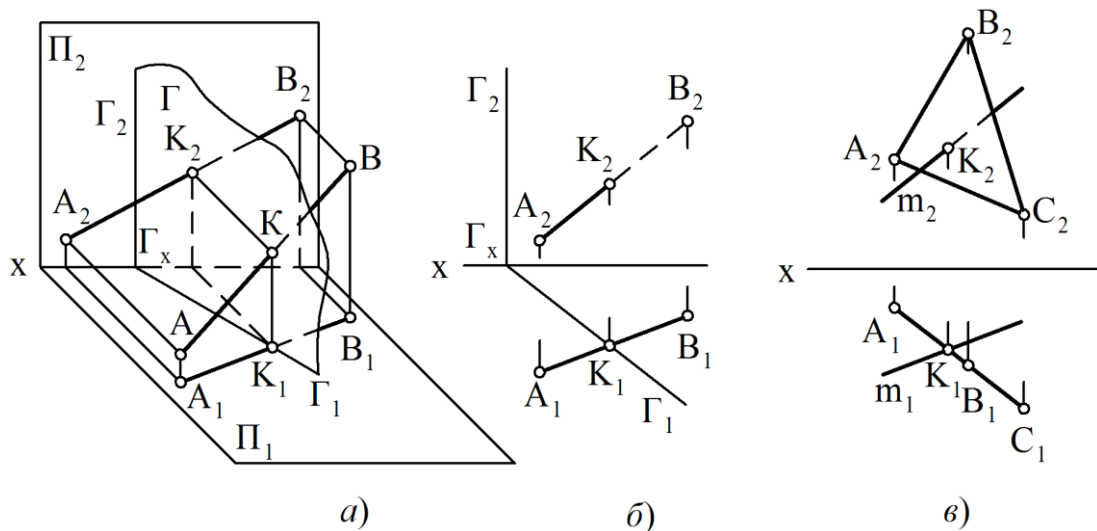


Рис. 3.4

На рис. 3.4, в приведен пример определения точки пересечения прямой  $m$  ( $m_1, m_2$ ) с горизонтально-проецирующей плоскостью, заданной треугольником ABC ( $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ ).

На рис. 3.5, а приведен пример нахождения точки пересечения прямой  $a$  с фронтально-проецирующей плоскостью  $\Gamma$ . Фронтальная проекция  $K_2$  находится на пересечении фронтальной проекции прямой  $a_2$  с фронтальным следом  $\Gamma_2$ .  $K_1$  определена по линии связи. Определение проекций точек пересечения прямой  $b$  с горизонтальной плоскостью  $\Phi$  ( $\Phi_2$ ) и прямой  $d$  с фронтальной плоскостью  $\Lambda$  ( $\Lambda_1$ ) показано на рис. 3.5, б и 3.5, в.

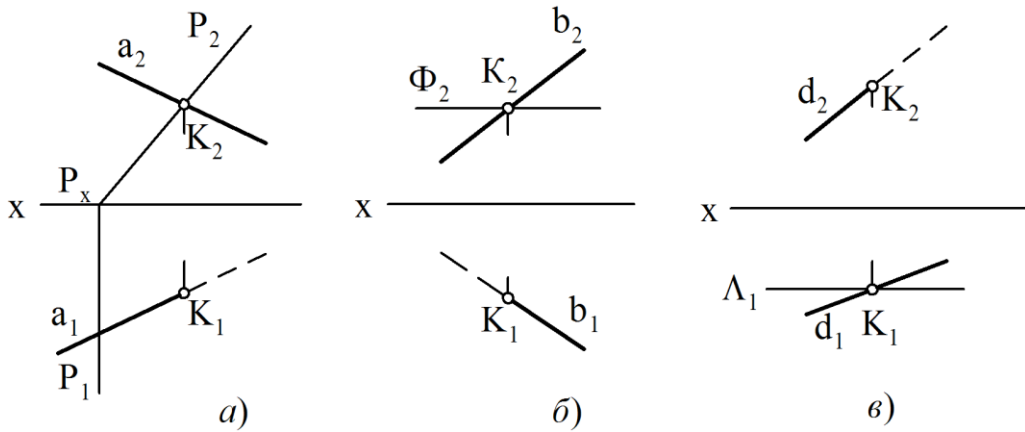


Рис. 3.5

Для решения задач на определение точек пересечения прямой с различными плоскостями необходимо проводить дополнительные построения, такие, например, как проведение через прямую проецирующих плоскостей или плоскостей уровня. Через прямую общего положения можно провести любую проецирующую плоскость (рис. 3.6, 3.7), а через прямые, параллельные плоскостям проекций, можно провести как проецирующие плоскости, так и плоскости уровня (см. рис. 3.8, 3.9).

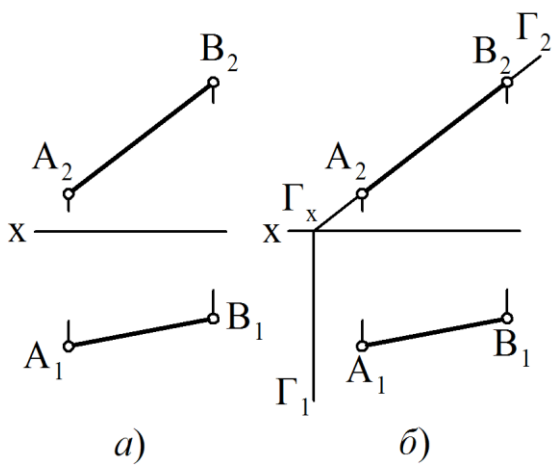


Рис. 3.6

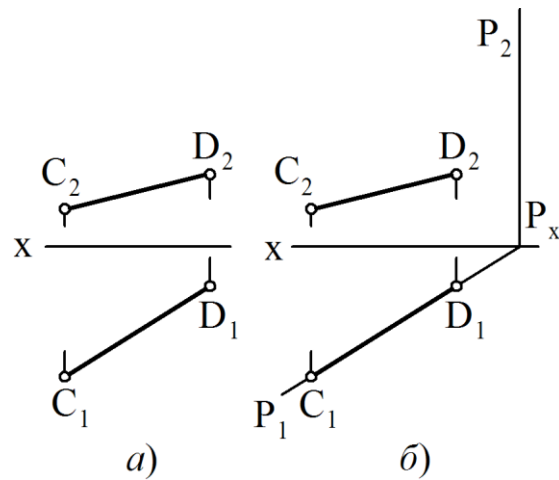


Рис. 3.7

На рис. 3.6, *a* изображен отрезок прямой АВ общего положения, а на рис. 3.6, *б* через этот отрезок проведена фронтально-проецирующая плоскость  $\Gamma$  ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ). Через отрезок CD (см. рис. 3.7, *a*) проведена горизонтально-проецирующая плоскость P ( $P_1, P_2$ ), что изображено на рис. 3.7, *б*.

Ниже показаны примеры проведения горизонтальной плоскости  $\Phi$  (рис. 3.8) и фронтальной  $\Gamma$  (рис. 3.9) через соответствующие отрезки прямых  $EF$  ( $E_1F_1, E_2F_2$ ) и  $KM$  ( $K_1M_1, K_2M_2$ ).

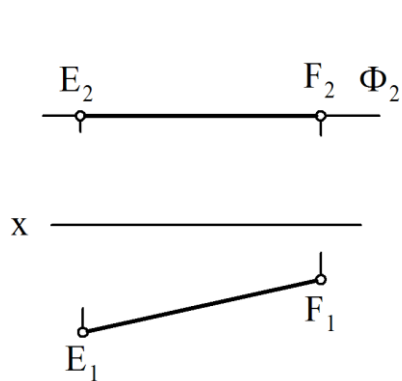


Рис. 3.8

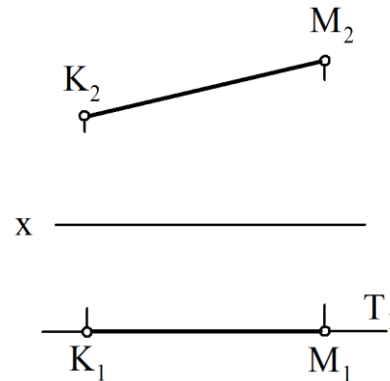


Рис. 3.9

Рассмотрим порядок определения точки пересечения прямой  $m$  с плоскостью, заданной треугольником  $ABC$  (рис. 3.10) и следами  $\Gamma$  ( $\Gamma_1, \Gamma_2$ ) (рис. 3.11).

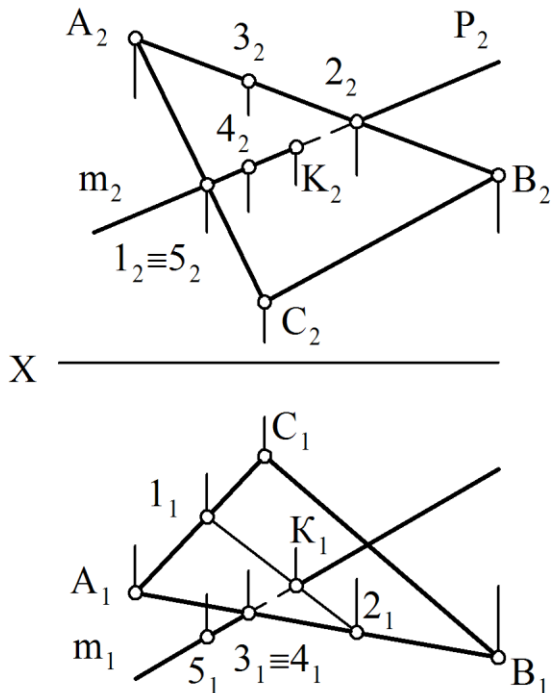


Рис. 3.10

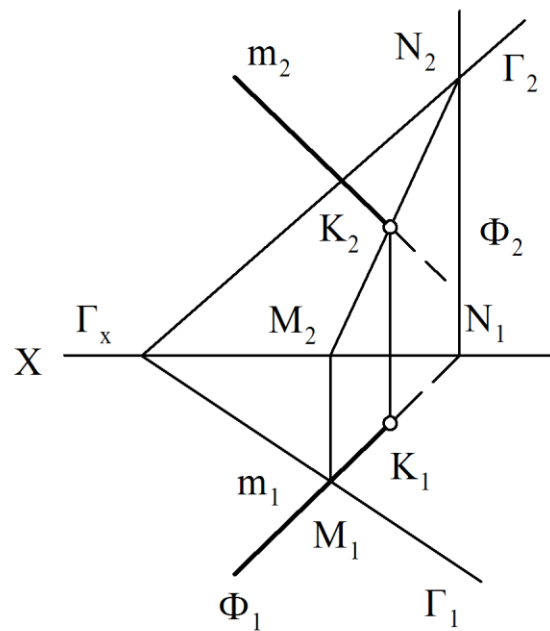


Рис. 3.11

Чтобы определить точку пересечения прямой  $m$  с плоскостью, заданной треугольником  $ABC$ , необходимо выполнить следующее:

- провести через прямую  $m$  фронтально-проецирующую плоскость  $P$  ( $P_2$ );
- определить линию пересечения плоскости  $P$  и треугольника  $ABC$   $12$  ( $1_22_2$  и  $1_12_1$ );
- определить точку пересечения прямой  $m$  ( $m_1, m_2$ ) с треугольником  $ABC$ . Эта точка находится на линии пересечения плоскостей  $P$  и треугольника  $ABC$  –  $12$  ( $1_12_1$  и  $1_22_2$ ). Сначала определяем горизонтальную проекцию  $K_1$ , а затем фронтальную  $K_2$ .

В заключение необходимо определить видимые и невидимые части прямой  $m$  относительно плоскостей проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , считая, что треугольник  $ABC$  является непрозрачным. Для этого необходимо сравнить положение в пространстве двух конкурирующих точек, одна из которых принадлежит прямой  $m$ , а вторая – стороне треугольника  $ABC$ .

Для определения видимости прямой  $m$  относительно горизонтальной плоскости проекций рассмотрим взаимное положение прямой  $m$  и стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ . В точке пересечения их горизонтальных проекций  $m_1$  и  $A_1B_1$  совпадают две горизонтальные проекции 3 и 4 точек 3 и 4. Точка 3 ( $3_1, 3_2$ ) принадлежит стороне  $AB$  ( $A_1B_1, A_2B_2$ ) треугольника  $ABC$ , точка 4 ( $4_1, 4_2$ ) принадлежит прямой  $m$  ( $m_1, m_2$ ). По расположению фронтальных проекций  $3_2$  и  $4_2$  этих точек устанавливаем, что точка 3 ( $3_1, 3_2$ ) находится выше точки 4 ( $4_1, 4_2$ ) относительно горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ . Это значит, что участок прямой линии  $m$  от точки пересечения  $K$  ( $K_1, K_2$ ) с треугольником  $ABC$  до точки 4 ( $4_1, 4_2$ ) находится под треугольником. Следовательно, горизонтальная проекция отрезка  $K_14_1$  будет невидимой и она изображена штриховой линией.

Для определения видимости прямой  $m$  относительно фронтальной плоскости проекций рассмотрим взаимное положение прямой  $m$  и стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ . В точке пересечения их фронтальных проекций  $m_2$  и  $A_2C_2$  совпадают две фронтальные проекции 1 и 5 точек 1 и 5. Точка 1 ( $1_1, 1_2$ ) принадлежит стороне  $AC$  ( $A_1C_1, A_2C_2$ ), точка 5 ( $5_1, 5_2$ ) принадлежит прямой  $m$  ( $m_1, m_2$ ). По расположению горизонтальных проекций  $1_1$  и  $5_1$  этих точек замечаем, что точка 5 ( $5_1, 5_2$ ) находится далее от плоскости проекции  $\Pi_2$  и ближе к нам, чем точка 1 ( $1_1, 1_2$ ). Это значит, что прямая  $m$  до точки пересечения  $K$  ( $K_1, K_2$ ) с треугольником  $ABC$  находится перед треугольником. Следовательно, фронтальная проекция  $m_2$  прямой  $m$  будет видимой до точки  $K$  ( $K_1, K_2$ ), а фронтальная проекция отрезка  $K_22_2$  будет невидимой и она изображена штриховой линией.

При определении точки пересечения прямой  $m$  с плоскостью, заданной следами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 3.11), необходимо также прямую  $m$  заключить в горизонтально-проецирующую плоскость  $\Phi$  ( $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ) и найти их линию пересечения  $MN$  ( $M_1N_1$  и  $M_2N_2$ ). Фронтальная проекция точки пересечения прямой  $K_2$  будет находиться на фронтальной проекции линии пересечения  $M_2N_2$ , горизонтальная проекция  $K_1$  находится при помощи линии связи.

### 3.3. Параллельные плоскости

Две плоскости в пространстве могут занимать два различных положения: они могут быть параллельны между собой или пересекаться.

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Рассмотрим параллельность плоскостей на примере. Пусть требуется через точку  $K$  ( $K_1, K_2$ ) построить плоскость  $a \cap b$  ( $a_1 \cap b_1$  и  $a_2 \cap b_2$ ), параллельную плоскости, заданной треугольником  $DEF$  ( $D_1E_1F_1$  и  $D_2E_2F_2$ ) (рис. 3.12).

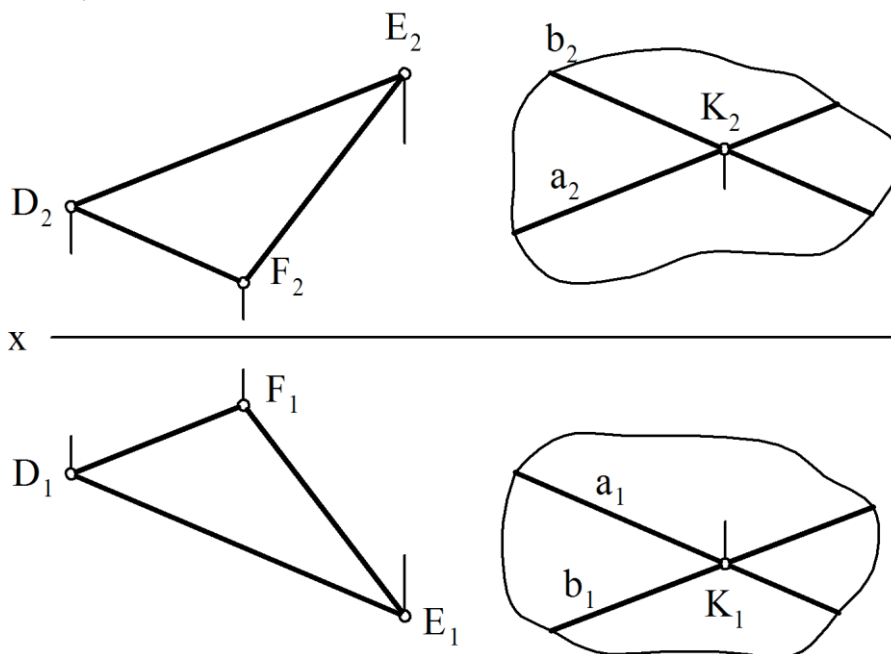


Рис. 3.12

Через точку  $K$  проводим прямые  $a \parallel DE$  и  $b \parallel DF$ . Это значит, что горизонтальная проекция  $a_1$  должна быть параллельна  $D_1E_1$ , а фронтальная проекция  $a_2$  должна быть параллельна  $D_2E_2$ . Что же касается прямой  $b$ , то



горизонтальная проекция  $b_1 \parallel D_1F_1$ , а  $b_2 \parallel D_2F_2$ . Построенная плоскость  $(a \cap b)$  параллельна плоскости DEF, так как пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  соответственно параллельны двум пересекающимся сторонам DE и DF треугольника DEF.

Если плоскости заданы следами, то признаком параллельности данных плоскостей является параллельность одноименных следов  $P_1$  и  $\Gamma_1$ ,  $P_2$  и  $\Gamma_2$  (рис. 3.13, а и б).

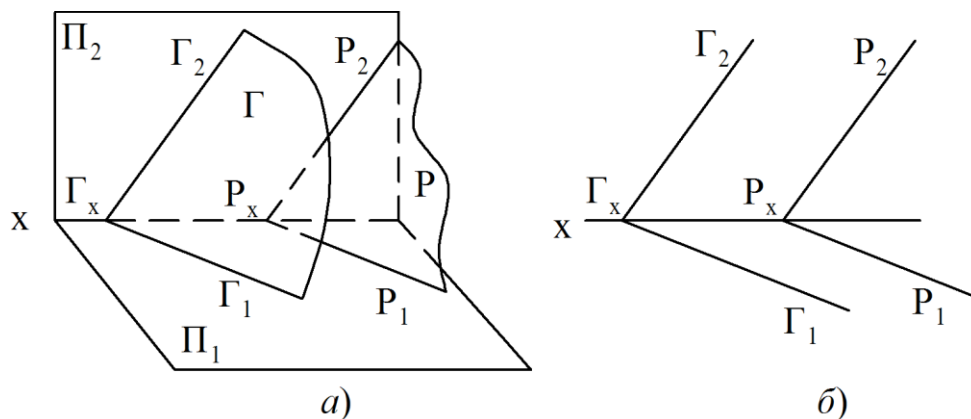


Рис. 3.13

Рассмотрим пример построения параллельной плоскости, проходящей через заданную точку. Пусть требуется через точку К провести плоскость  $P (P_1, P_2)$ , заданную следами, параллельно плоскости  $\Gamma (\Gamma_1, \Gamma_2)$ , также заданной следами (рис. 3.14).

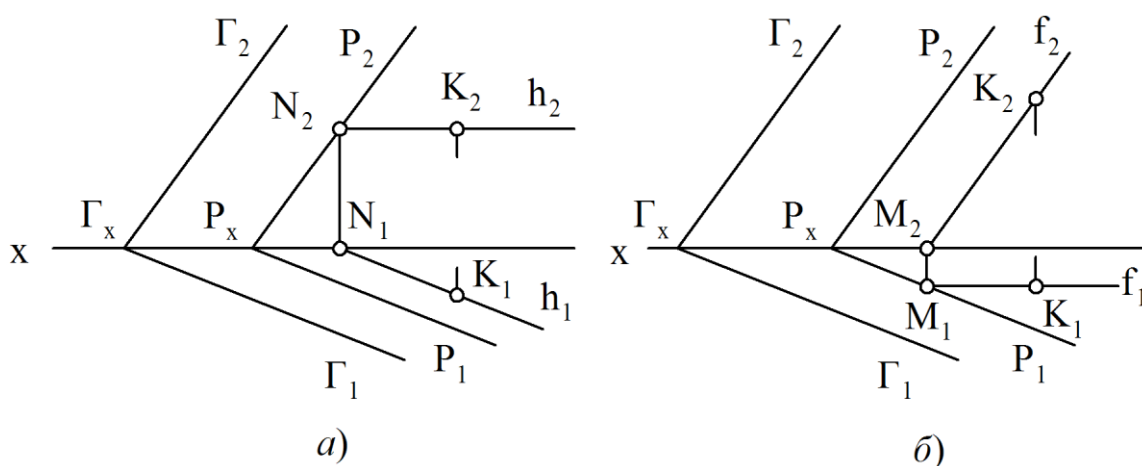


Рис. 3.14

Для решения задачи через точку К проводим горизонталь  $h (h_1, h_2)$  (см. рис. 3.14, а), т.е.  $h_1$  проводим параллельно следу плоскости  $\Gamma_1$ , а  $h_2$  – параллельно оси X и находим фронтальный след этой горизонтали N ( $N_1$  и

$N_2$ ). Через  $N_2$  проводим фронтальный след плоскости  $P_2$  параллельно  $\Gamma_2$ , а через точку схода следов  $\Gamma_x$  проводим  $\Gamma_1$  параллельно  $P_1$ . Можно для построения параллельной плоскости проходящей через некоторую точку применить и фронталь  $f$  ( $f_1, f_2$ ) (см. рис. 3.14, б). В этом случае построим горизонтальный след фронтали  $M_1$  и через полученную точку проводим горизонтальный след  $P_1$ , а из точки схода следов  $P_x$  построим фронтальный след  $P_2$ , параллельно имеющемуся  $\Gamma_2$ .

Чтобы определить, параллельны ли профильно-проецирующие плоскости у которых параллельны фронтальные и горизонтальные следы (рис. 3.15, а, б), необходимо построить профильные следы данных плоскостей. Если они параллельны, то и плоскости параллельны, а если пересекаются, то и плоскости пересекаются (см. рис. 3.15). В данном случае профильные проекции следов пересекаются:  $P_3 \cap \Gamma_3$ , следовательно, плоскости также пересекаются. Проекциями линии пересечения  $KL$  служат отрезки  $K_1L_1$ ,  $K_2L_2$  и  $K_3 \equiv L_3$ .

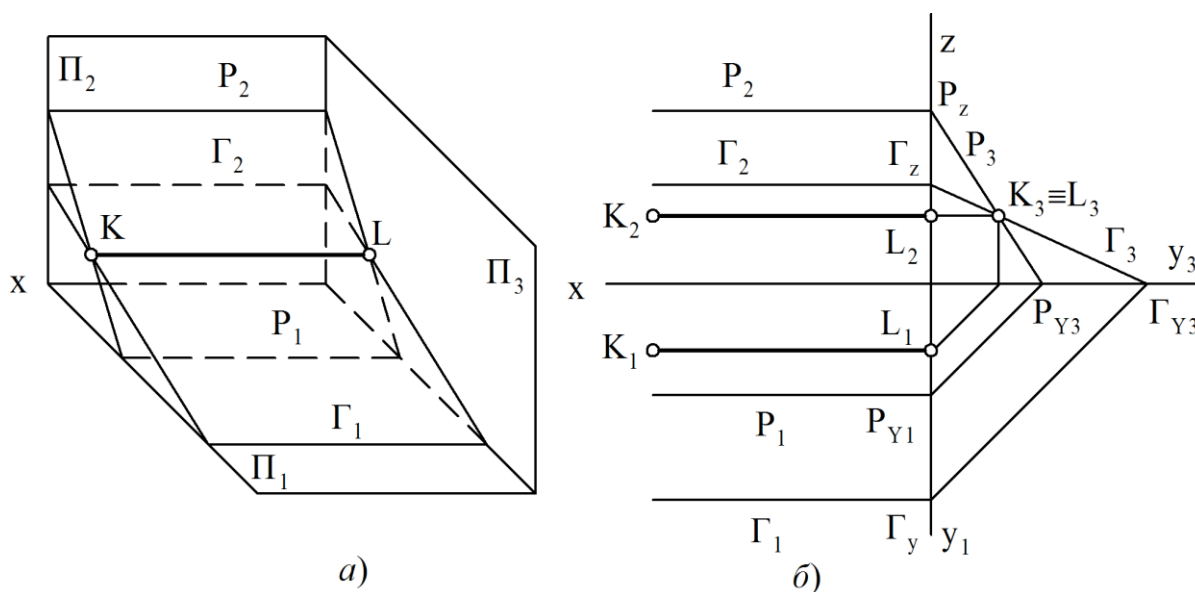


Рис. 3.15

### 3.4. Пересекающиеся плоскости

Линия пересечения двух плоскостей – это прямая, принадлежащая как одной, так и другой плоскости. Но положение любой прямой в пространстве определяется положением двух ее точек. Поэтому для построения линии пересечения двух плоскостей надо найти две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям.

Рассмотрим построение линии пересечения плоскости общего положения  $\Gamma$  и проецирующей  $P$ , заданных следами (рис. 3.16).

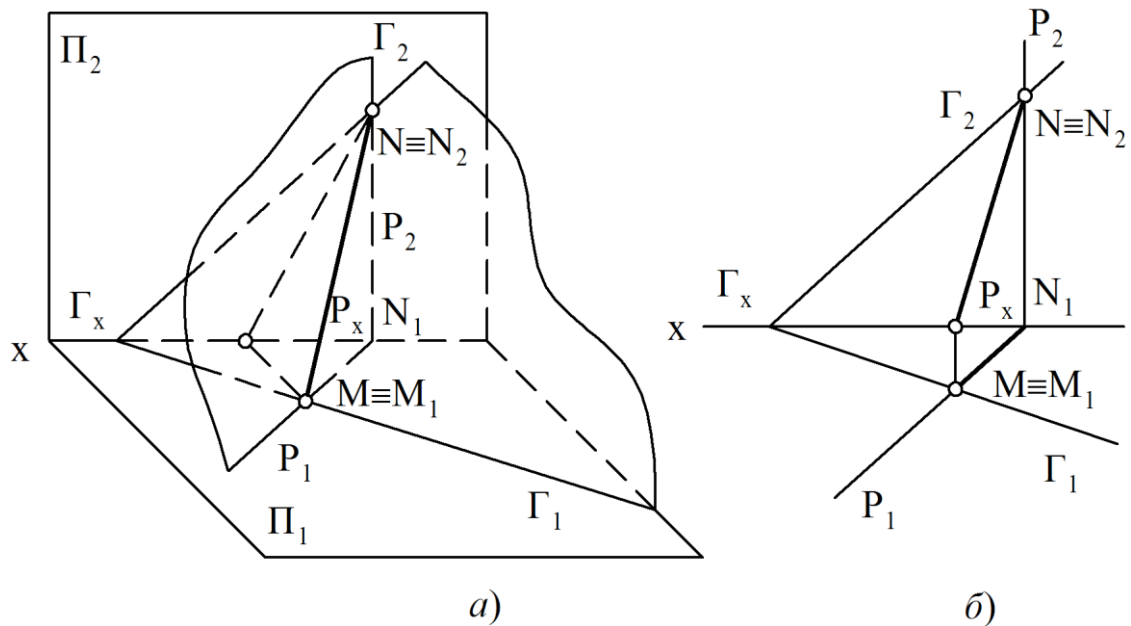


Рис. 3.16

Из наглядного изображения (рис. 3.16, *a*) видно, что на пересечении горизонтальных следов плоскостей  $\Gamma$  и  $P$  ( $\Gamma_1$  и  $P_1$ ) находится горизонтальный след линии пересечения этих плоскостей  $M$  и его горизонтальная проекция  $M_1$ . На пересечении фронтальных следов  $\Gamma_2$  и  $P_2$  находится фронтальный след линии пересечения  $N$  и его проекция  $N_2$ . Соединив одноименные проекции точек  $M$  и  $N$ , получим фронтальную и горизонтальную проекции линии пересечения  $M_2N_2$  и  $M_1N_1$ , причем последняя совпадает с горизонтальным следом плоскости  $P_1$ . Это же решение показано на чертеже (см. рис. 3.16, *б*).

Пример построения линии пересечения горизонтально-проецирующей плоскости  $\Gamma$ , заданной следами, и плоскости общего положения, заданной треугольником, приведен на рис. 3.17.

На рис. 3.17, *a* показано наглядное изображение двух плоскостей с линией пересечения 1-2, на рис. 3.17, *б* это показано на чертеже. Горизонтальная проекция линии пересечения  $1_12_1$  в таких случаях находится всегда на горизонтальном следе.

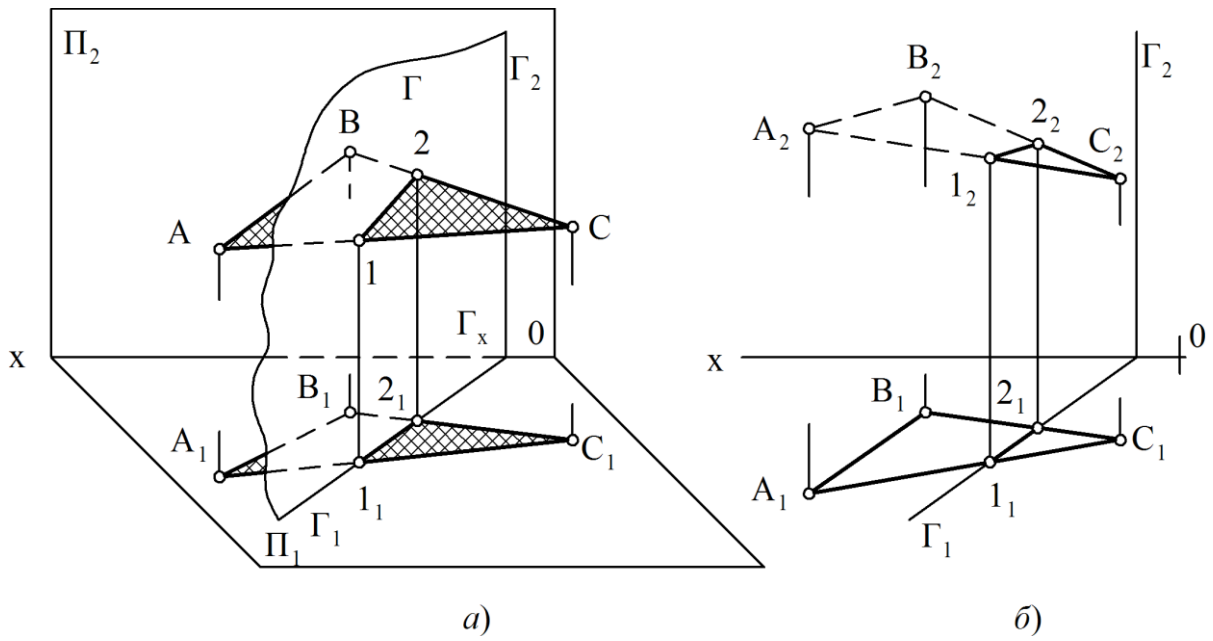


Рис. 3.17

Построение линии пересечения плоскости общего положения  $P$  и плоскости уровня, в частности, горизонтальной плоскости  $\Gamma$ , показано на рис. 3.18.

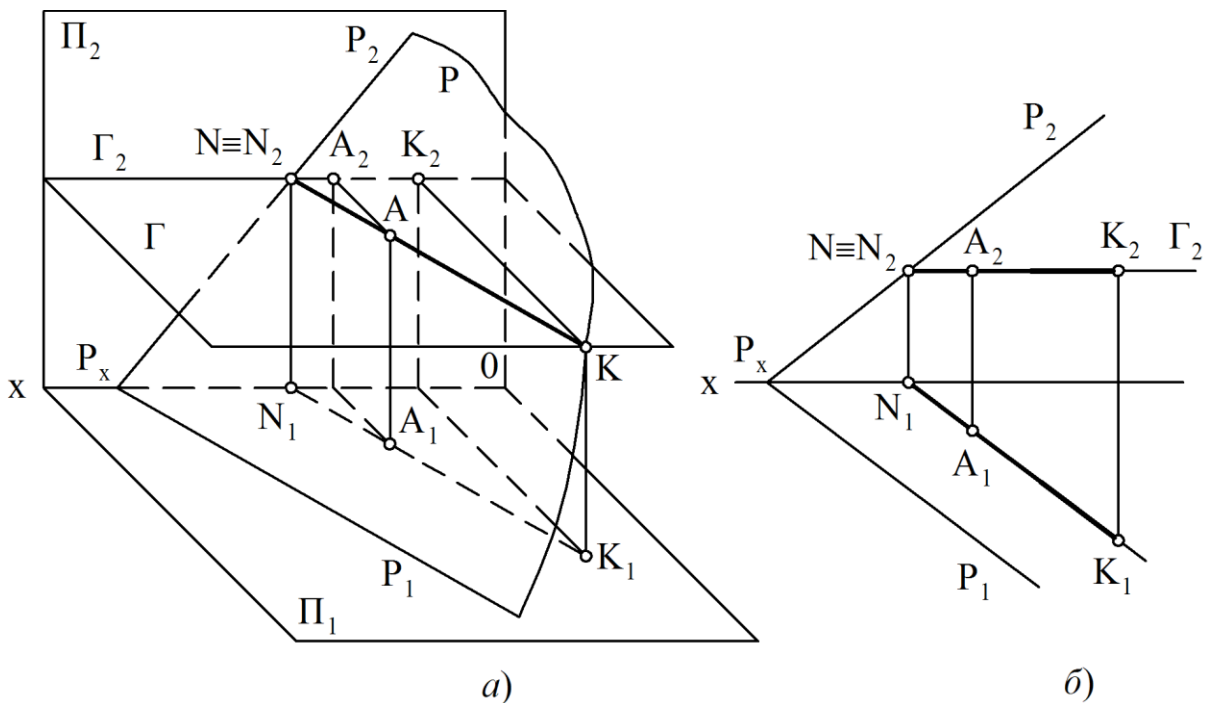


Рис. 3.18

Так как плоскость  $\Gamma$  ( $\Gamma_2$ ) и плоскость проекций  $\Pi_1$  параллельны между собой, а общей пересекающей их плоскостью является плоскость  $P$

( $P_1, P_2$ ), то линия пересечения плоскостей  $P$  и  $\Pi_1$  есть горизонтальный след  $P_1$ , а плоскостей  $\Gamma$  и  $P$  – отрезок прямой линии  $NK$  (см. рис. 3.18, *a*). Исходя из вышеизложенного, они должны быть параллельны между собой, т.к. две параллельные плоскости одновременно пересекаются третьей плоскостью  $P$ . Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальным следом  $\Gamma_2$  плоскости  $\Gamma$  и проходит параллельно оси  $X$ , горизонтальная проекция линии пересечения проходит параллельно горизонтальному следу  $P_1$ , к тому же отрезок  $NK$  является горизонталью. На рис. 3.18, *б* приведен чертеж пересечения плоскости общего положения  $P$  ( $P_1, P_2$ ) и горизонтальной плоскости  $\Gamma$  ( $\Gamma_2$ ).

Рассмотрим построение линии пересечения двух плоскостей  $\Gamma$  и  $P$ , заданных следами (рис. 3.19, *a* – наглядное изображение, см. рис. 3.19, *б* – чертеж).

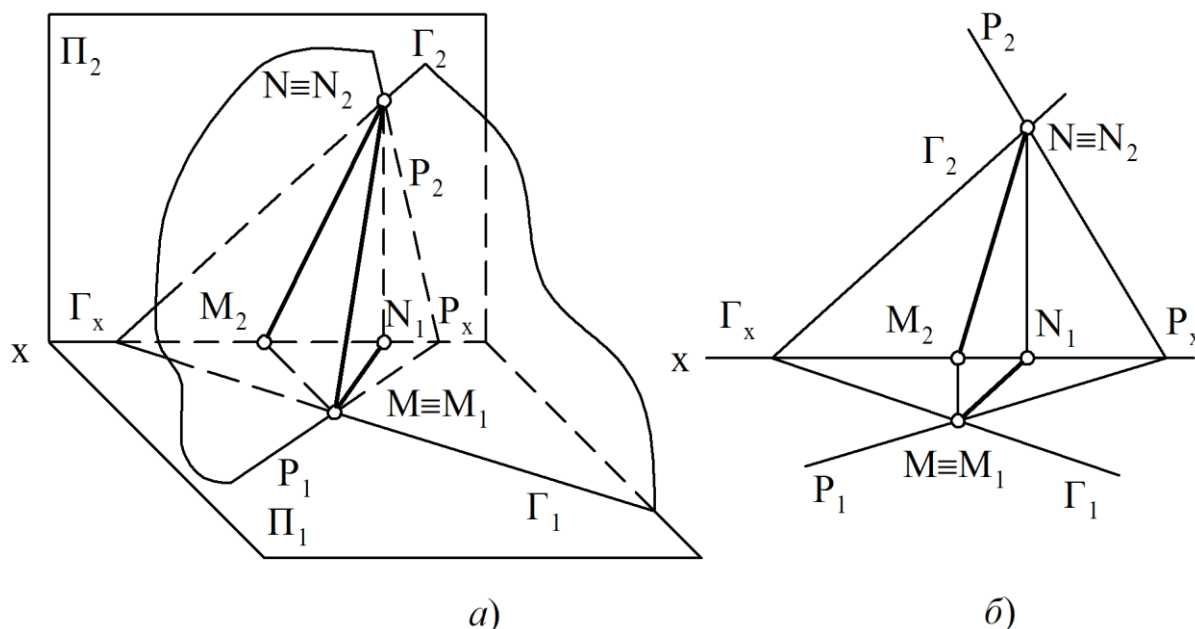


Рис. 3.19

На наглядном изображении (см. рис. 3.19, *a*) показана линия пересечения этих плоскостей –  $MN$ . Она проходит через точку  $N$ , в которой пересекаются фронтальные следы  $\Gamma_2$  и  $P_2$ , и точку  $M$ , в которой пересекаются горизонтальные следы  $\Gamma_1$  и  $P_1$ .

Точка  $N$  является фронтальным следом линии пересечения плоскостей, а точка  $M$  – горизонтальным следом линии пересечения. Одновременно в этих точках находятся и соответствующие проекции этих следов  $N_2$  и  $M_1$ . Так как точка  $N_2$  находится во фронтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция  $N_1$  будет находиться на оси  $X$ .

Аналогично и с точкой  $M$  ( $M_1$  и  $M_2$ ). Соединяя прямыми линиями одноименные проекции точек  $M_1$  с  $N_1$  и  $M_2$  с  $N_2$ , получим проекции прямой  $MN$  – линии пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $P$  (см. рис. 3.19, б).

При построении линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных непрозрачными треугольниками  $ABC$  и  $DEF$  (рис. 3.20) воспользуемся способом построения точек пересечения прямой линии с плоскостью общего положения, т.е. в качестве прямых линий примем две стороны,  $DE$  и  $FE$ , треугольника  $DEF$  и определим точки пересечения их с плоскостью, заданной треугольником  $ABC$ .

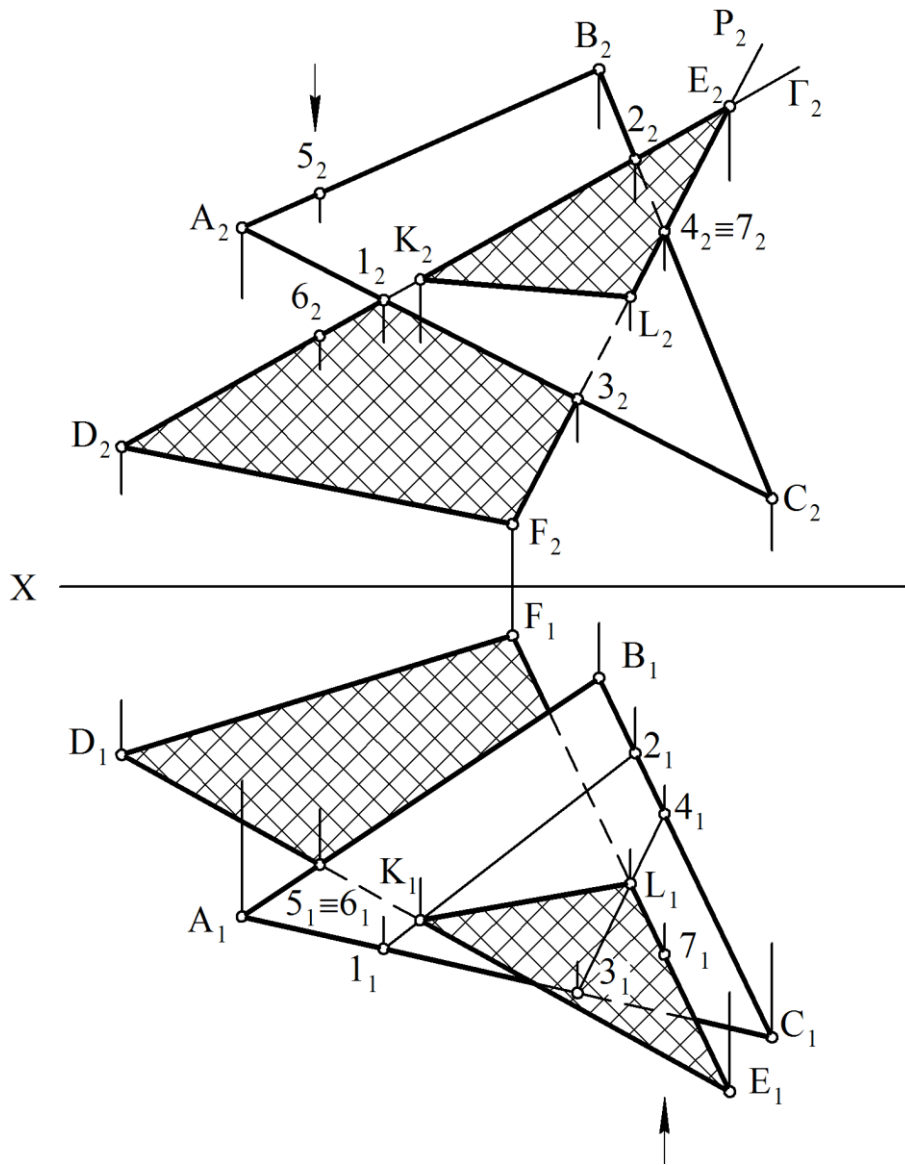


Рис. 3.20

Для нахождения точки пересечения стороны DE треугольника DEF с треугольником ABC проводим через DE фронтально-проецирующую плоскость  $\Gamma$  (показан след  $\Gamma_2$ ). Эта плоскость пересекает треугольник ABC по линии 12 ( $1_22_2, 1_12_1$ ). На пересечении горизонтальной проекции стороны  $D_1E_1$  и горизонтальной проекции линии пересечения  $1_12_1$  находится горизонтальная проекция точки пересечения  $K_1$  стороны DE с треугольником ABC. Фронтальная проекция  $K_2$  этой точки определена при помощи линии связи.

Точка пересечения стороны EF ( $E_1F_1, E_2F_2$ ) треугольника DEF с плоскостью, заданной треугольником ABC, определяется аналогичным образом. Для этого через EF проводим фронтально-проецирующую плоскость P ( $P_2$ ).

Видимость участков треугольников определена таким же образом, как и в примере, приведенном на рис. 3.10.

Видимость треугольников относительно горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  определена при помощи конкурирующих точек 5 ( $5_1, 5_2$ ) и 6 ( $6_1, 6_2$ ), находящихся на сторонах AB ( $A_1B_1, A_2B_2$ ) и DE ( $D_1E_1, D_2E_2$ ) треугольников. Точка 5 ( $5_1, 5_2$ ) принадлежит стороне AB ( $A_1B_1, A_2B_2$ ) треугольника ABC, а точка 6 ( $6_1, 6_2$ ) принадлежит стороне DE ( $D_1E_1, D_2E_2$ ) треугольника DEF. Горизонтальные проекции этих точек совпадают ( $5_1 \equiv 6_1$ ), т.к. находятся в точке пересечения горизонтальных проекций сторон  $A_1B_1$  и  $D_1E_1$ . Фронтальная проекция  $5_2$ , принадлежащая  $A_2B_2$ , находится выше фронтальной проекции  $6_2$ , принадлежащей  $D_2E_2$ . Следовательно, горизонтальная проекция  $A_1B_1$  будет видимой на  $\Pi_1$ .

Относительно фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  видимость определена при помощи конкурирующих точек 4 ( $4_1, 4_2$ ) и 7 ( $7_1, 7_2$ ). Так как на  $\Pi_1$  горизонтальная проекция  $7_1$  точки 7, принадлежащая стороне EF ( $E_1F_1, E_2F_2$ ) расположена дальше от  $\Pi_2$ , т.е. ближе к нам, чем горизонтальная проекция  $4_1$  точки 4, принадлежащей стороне BC ( $B_1C_1, B_2C_2$ ), то видимой на  $\Pi_2$  будет фронтальная проекция  $E_2F_2$  стороны EF на участке  $E_2L_2$ .

## ЛЕКЦИЯ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПЛОСКОСТИ

- 4.1. Прямая, перпендикулярная плоскости.
- 4.2. Определение расстояния от точки до плоскости.
- 4.3. Взаимно перпендикулярные плоскости.

### 4.1. Прямая, перпендикулярная плоскости

Прямая линия перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости (рис. 4.1).

На комплексном чертеже легко построить проекции прямого угла между прямой общего положения и линией уровня (фронталью, горизонталью). На основании свойств прямого угла прямой угол проецируется в натуральную величину, например, на  $\Pi_2$ , если одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций, т.е. является фронталью. Чтобы прямой угол проецировался на  $\Pi_1$  без искажения, необходимо, чтобы одна из его сторон была параллельна  $\Pi_1$ , т.е. была горизонталью. На рис. 4.2 показано, как проведен перпендикуляр из точки К к фронтали и горизонтали.

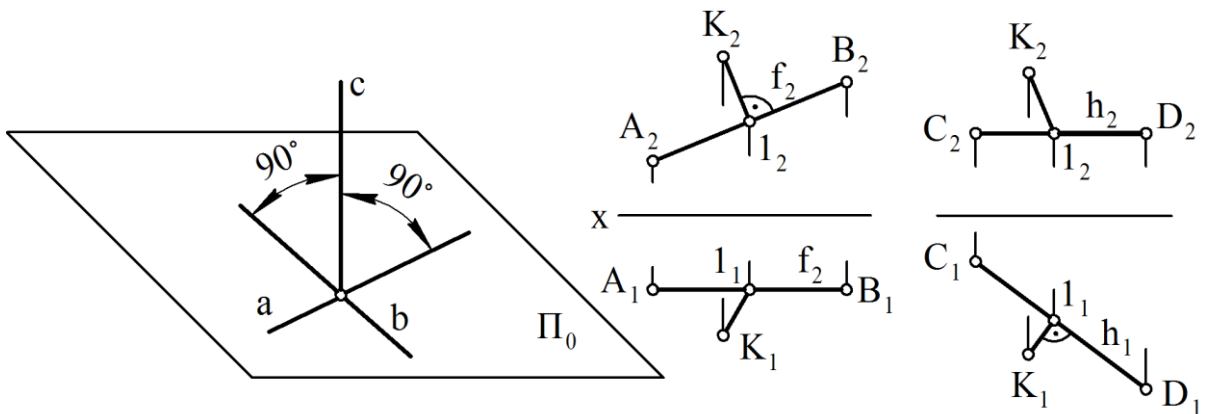


Рис. 4.1.

Рис. 4.2

Если задать плоскость двумя пересекающимися прямыми ( $AB \cap AD$ ), одна из которых будет фронталью, а вторая – горизонталью и провести из точки  $A_2$  перпендикуляр к  $A_2B_2$ , т.е. к фронтальной проекции фронтали, а из  $A_1$  – перпендикуляр к  $A_1D_1$ , т.е. к горизонтальной проекции горизонтали, то этот отрезок будет перпендикулярен заданной плоскости (рис. 4.3).

Для того чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на чертеже ее горизонтальная проекция



была перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция прямой – перпендикулярна фронтальной проекции фронтали.

В случае, если плоскость задана следами, то, учитывая, что горизонтальная проекция горизонтали ( $h_1$ ) всегда параллельна горизонтальному следу  $\Gamma_1$ , а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу  $\Gamma_2$ , то, чтобы из точки  $K$  ( $K_1, K_2$ ) провести прямую перпендикулярно плоскости  $\Gamma$  (рис. 4.4), необходимо ее горизонтальную проекцию провести перпендикулярно горизонтальному следу  $\Gamma_1$ , а фронтальную проекцию – перпендикулярно фронтальному следу  $\Gamma_2$ .

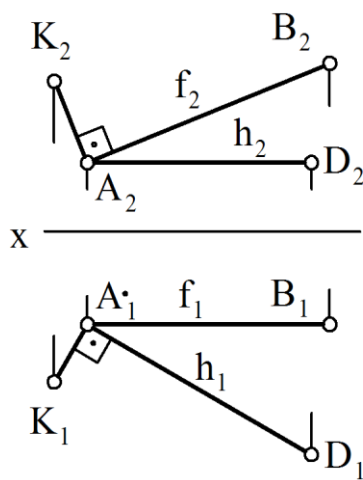


Рис. 4.3

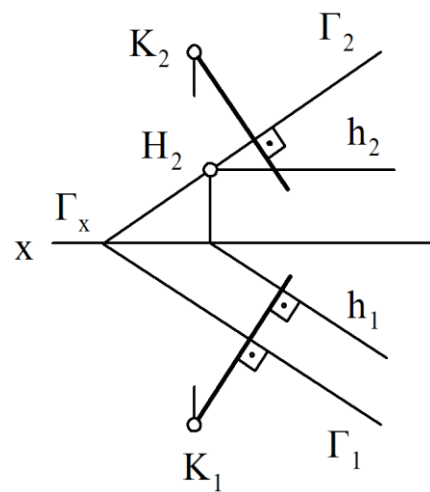


Рис. 4.4

#### 4.2. Определение расстояния от точки до плоскости

Рассмотрим решение задач на определение расстояний от точки до плоскости и до прямой линии общего положения. Пусть требуется определить расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Gamma$ , расположенной перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.5).

Из точки  $A$  проводим перпендикуляр к плоскости  $\Gamma$ . Горизонтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна горизонтальному следу  $\Gamma_1$ , а фронтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна фронтальному следу  $\Gamma_2$ . Расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\Gamma$  определится проекциями  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Сначала определим точку  $B_1$ , которая находится на пересечении перпендикуляра и горизонтального следа  $\Gamma_1$ . Фронтальная проекция точки  $B_2$  находится по линии связи.

При определении расстояния от точки  $A$  до плоскости общего положения  $\Gamma$ , заданной следами (рис. 4.6), необходимо:

- через точку  $A$  провести прямую перпендикулярно плоскости  $\Gamma$ ;
- провести через перпендикуляр горизонтально-проецирующую плоскость  $P$  ( $P_1, P_2$ );

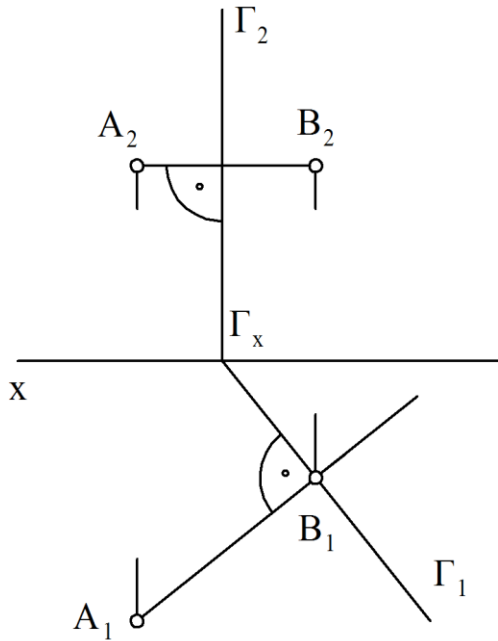


Рис. 4.5

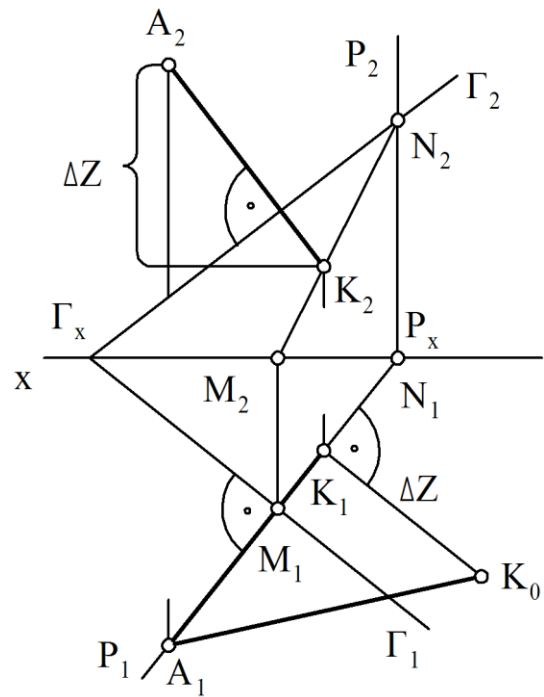


Рис. 4.6

- найти линию пересечения  $MN$  ( $M_1N_1, M_2N_2$ ) плоскостей  $\Gamma$  и  $P$ ;
- определить точку пересечения  $K$  ( $K_1, K_2$ ) перпендикуляра с плоскостью  $\Gamma$ . Она находится на линии пересечения плоскостей  $MN$ . Проекции отрезка  $AK$  ( $A_1K_1, A_2K_2$ ) являются соответственно горизонтальной и фронтальной проекциями расстояния от точки  $A$  до плоскости  $P$ ;

- определить истинную величину перпендикуляра, например, при помощи прямоугольного треугольника.

Отрезок  $A_1K_0$  есть расстояние от точки  $K$  до плоскости  $\Gamma$ .

На рис. 4.7. показано определение расстояния от точки  $D$  до плоскости заданной треугольником  $ABC$ .

Чтобы провести из точки  $D$  ( $D_1, D_2$ ) перпендикуляр к плоскости треугольника  $ABC$  ( $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ ) необходимо в первую

очередь в плоскости провести фронталь  $f$  ( $f_1, f_2$ ) и горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ). Фронтальная проекция перпендикуляра проведена из проекции точки  $D_2$  перпендикулярно  $f_2$ , а горизонтальная – из проекции точки  $D_1$  перпендикулярно  $h_1$ . Точка пересечения  $K$  ( $K_1, K_2$ ) перпендикуляра с плоскостью треугольника найдена при помощи фронтально-проецирующей плоскости  $\Gamma$  (фронтальный след  $\Gamma_2$ ). Натуральная величина расстояния  $K_2D_0$  определена путем построения прямоугольного треугольника  $D_2K_2D_0$ .

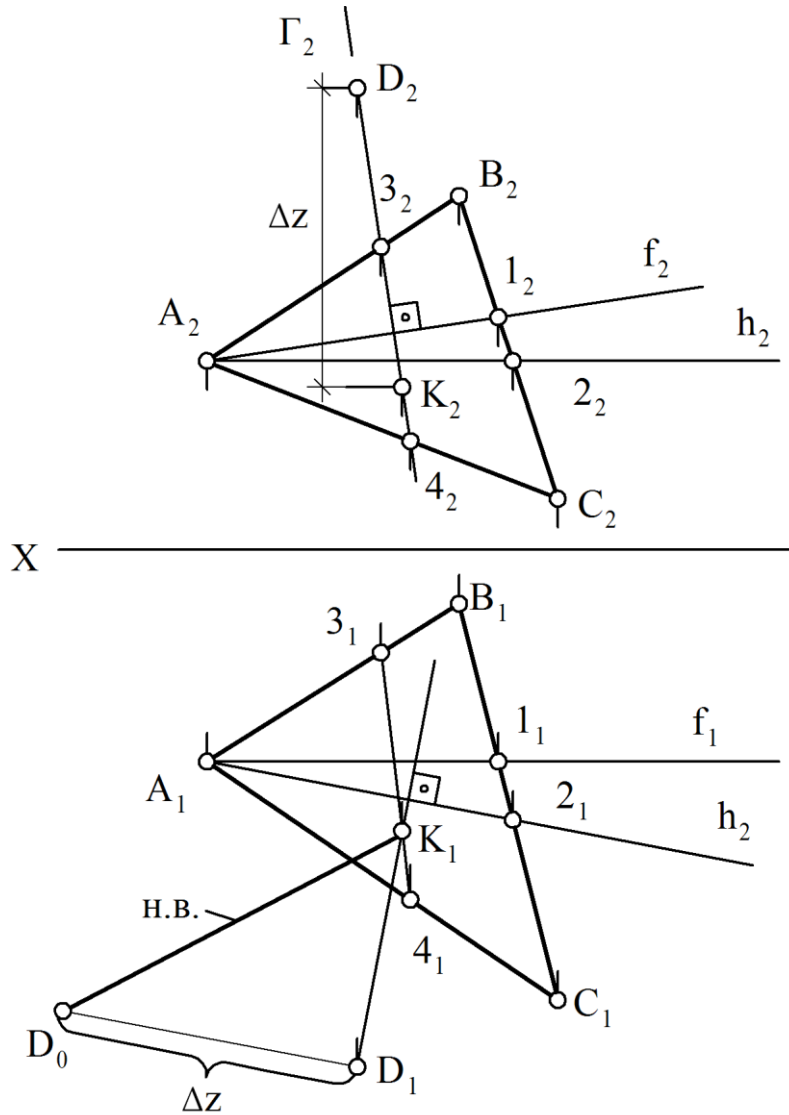


Рис. 4.7.

### 4.3. Взаимно-перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны:

- если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости (рис. 4.8);
- если одна из плоскостей проходит перпендикулярно прямой, расположенной в другой плоскости (рис. 4.9).

Иными словами, две плоскости взаимно перпендикулярны, если имеется возможность провести прямую, принадлежащую одной плоскости и одновременно перпендикулярную к другой плоскости.

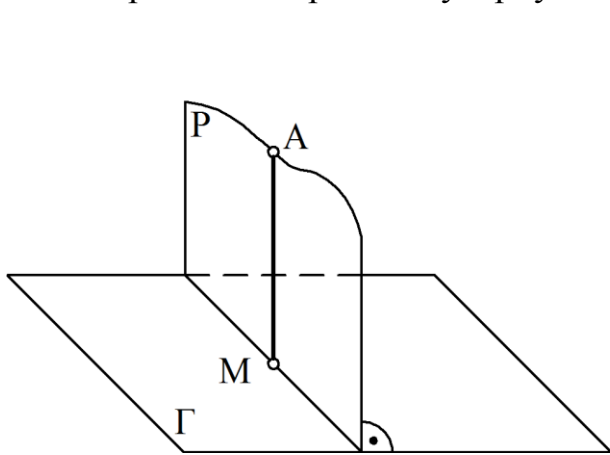


Рис. 4.8

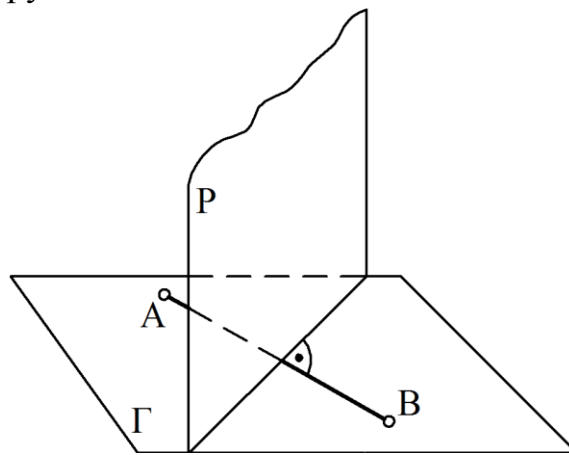


Рис. 4.9

В первом случае (см. рис. 4.8) плоскость  $P$  перпендикулярна плоскости  $\Gamma$ , так как проходит через отрезок  $AM$ , перпендикулярный плоскости  $\Gamma$ . На рис. 4.9 плоскость  $P$  перпендикулярна плоскости  $\Gamma$ , так как проходит перпендикулярно отрезку  $AB$ , принадлежащему плоскости  $\Gamma$ .

Рассмотрим построение взаимно перпендикулярных плоскостей на чертеже. Пусть требуется провести плоскость через отрезок прямой  $DE$  ( $D_1E_1, D_2E_2$ ), перпендикулярную плоскости, заданной треугольником  $ABC$  ( $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ ). Задача будет решена, если из точки  $D$  отрезка  $DE$  провести прямую перпендикулярно к треугольнику  $ABC$  (рис. 4.10). Для этого в треугольнике  $ABC$  проводим фронталь и горизонталь. Затем из точки  $D_1$  проводим перпендикуляр  $D_1K_1$  к  $h_1$  (горизонтальная проекция горизонтали), а из точки  $D_2$  – перпендикуляр  $D_2K_2$  к  $f_2$  (фронтальная проекция фронтали). Таким образом, плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми ( $KD \cap DE$ ), перпендикулярна треугольнику  $ABC$ , т.к. проходит через перпендикуляр к нему  $DK$ .

Рассмотрим второй случай. Пусть требуется из точки  $D$  провести плоскость перпендикулярно к стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  (рис. 4.11).

Иными словами, чтобы сторона  $AC$  была перпендикулярна новой плоскости, проходящей через точку  $D$ ,  $A_1C_1$  должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали ( $h_1$ ), а  $A_2C_2$  – перпендикулярна фронтальной проекции фронтали  $f_2$  новой плоскости ( $h \cap f$ ). Поэтому из точки  $D_1$  проводим  $h_1$  перпендикулярно  $A_1C_1$  ( $h_2$  пройдет параллельно оси  $X$ ), а из точки  $D_2$  проводим перпендикуляр к  $f_2$  ( $f_1$  пройдет параллельно оси  $X$ ). Данные плоскости взаимно перпендикулярны, т.к. плоскость  $(f \cap h)$  проходит перпендикулярно стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ .

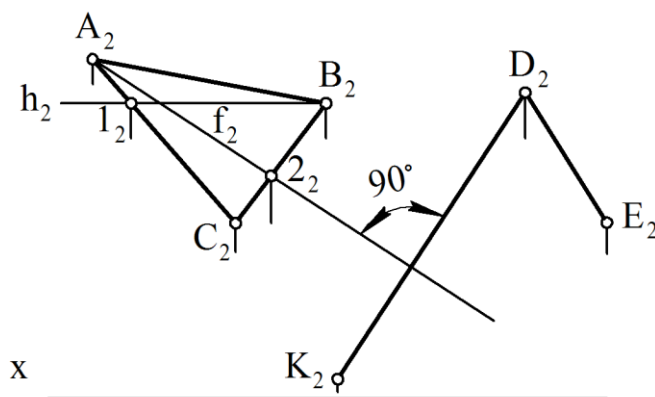


Рис. 4.10

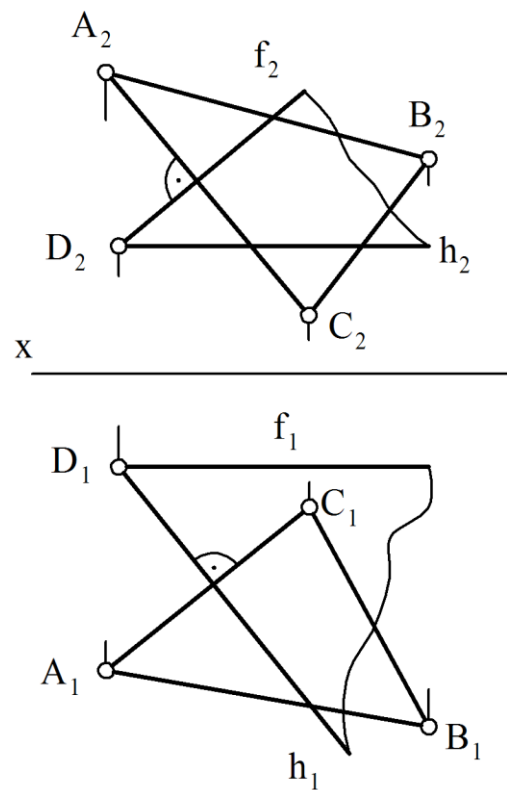


Рис. 4.11

На приведенных примерах (рис. 4.12 и рис. 4.13) изображены взаимно перпендикулярные плоскости, которые заданы треугольником  $ABC$  и следами плоскости.

Плоскость  $\Gamma$  перпендикулярна плоскости треугольника  $ABC$  (см. рис. 4.12). Она проходит перпендикулярно прямой  $m$  ( $\Gamma_1 \perp m_1$  и  $\Gamma_2 \perp m_2$ ), лежащей в плоскости треугольника  $ABC$ .

Плоскость  $P$  также перпендикулярна плоскости треугольника  $ABC$  (см. рис. 4.13), так как она перпендикулярна горизонтали  $h$  ( $h_1, h_2$ ), т.е.  $P_1 \perp h_1$ , а  $P_2 \perp h_2$ . Одновременно она еще перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, т.е. является горизонтально-проецирующей плоскостью.

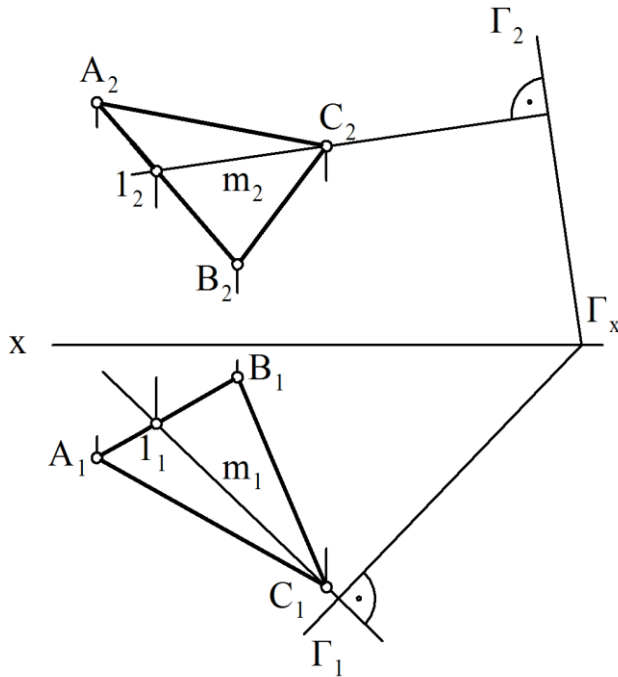


Рис. 4.12

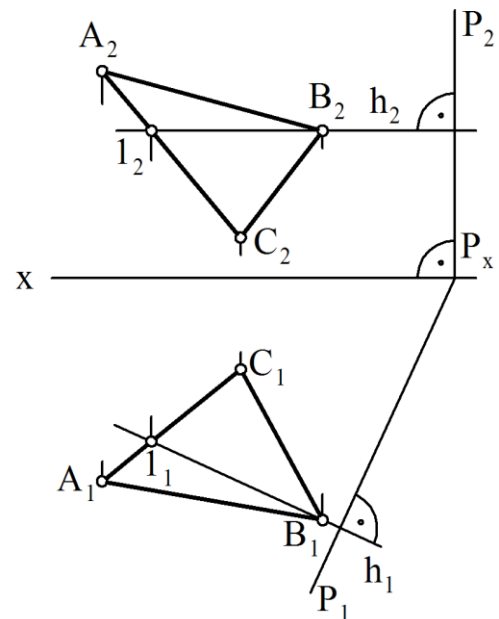


Рис. 4.13

Следует также отметить, что перпендикулярность горизонтальных следов плоскости общего положения  $P$  и горизонтально-проецирующей  $\Gamma$  (рис. 4.14) соответствует взаимной перпендикулярности этих плоскостей.

Это легко доказать, если попытаться провести прямую, принадлежащую плоскости  $P$ , перпендикулярно плоскости  $\Gamma$ . Такой прямой является горизонталь, которая проведена через точку  $N$  ( $N_1, N_2$ ), взятую на следе плоскости  $P_2$  ( $h_1 \perp P_1$  и  $h_2 \perp P_2$ ).

Перпендикулярность фронтальных следов плоскости общего положения и фронтально проецирующей также дает основание утверждать о перпендикулярности этих плоскостей. Доказательство аналогичное.

Однако если одноименные следы двух плоскостей общего положения перпендикулярны между собой, то такие плоскости не перпендикулярны (рис. 4.15), т.к. здесь не соблюдается условие перпендикулярности плоскостей. Невозможно провести прямую, принадлежащую одной плоскости, например,  $T$ , и перпендикулярно ко

второй плоскости  $\Phi$ . Если взять в плоскости  $T$  горизонтальную проекцию прямой и провести ее перпендикулярно горизонтальному следу  $\Phi_1$ , то это будет горизонтальная проекция горизонтали, а фронтальная проекция горизонтали должна быть проведена параллельно оси  $X$ , т.е. не перпендикулярно  $\Phi_2$ .

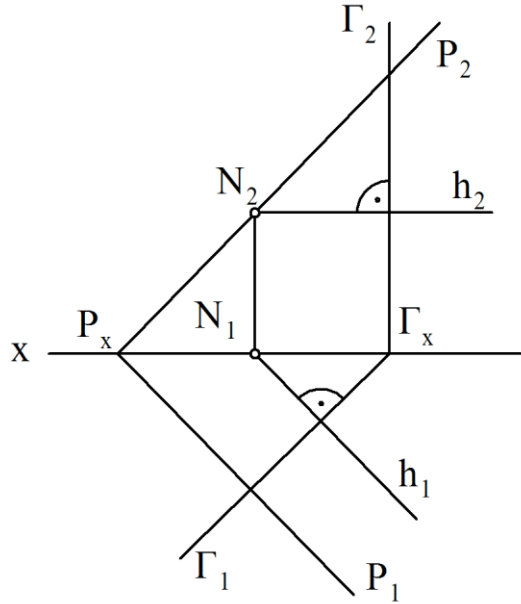


Рис. 4.14

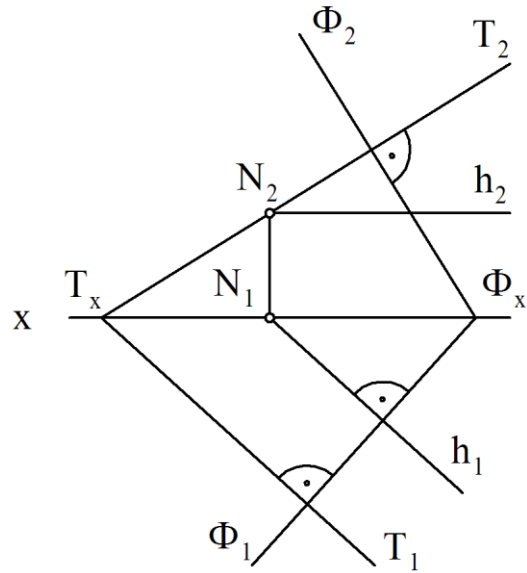


Рис. 4.15

## ЛЕКЦИЯ 5. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

5.1. Метод замены плоскостей проекций.

5.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

### 5.1. Метод замены плоскостей проекций

При решении задач на определение истинной величины отрезка прямой линии, плоской фигуры или наклона их к плоскостям проекций, а также на определение расстояний между точкой и прямой или плоской фигурой было замечено, что если эти прямые или плоские фигуры «удобно» расположены относительно плоскостей проекций, т.е. занимают частное положение, то задачи имеют простые решения. Сравним решение двух задач. Пусть требуется определить истинную величину отрезков АВ и CD (рис. 5.1). В первом случае отрезок АВ занимает общее положение (см. рис. 5.1, а), во втором отрезок CD занимает частное положение (см. рис. 5.1, б).

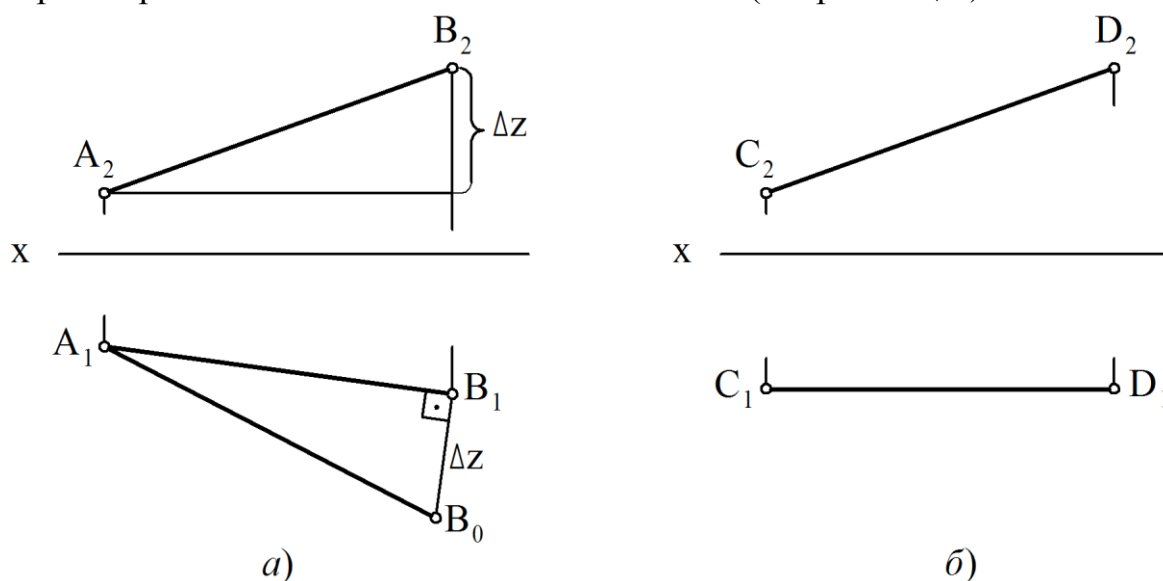


Рис. 5.1

Истинная величина отрезка АВ ( $A_1B_0$ ) определена при помощи прямоугольного треугольника. Что же касается отрезка CD, то истинная величина его равняется  $C_2D_2$ , т.к. отрезок расположен параллельно плоскости проекций  $\Pi_2$ , т.е. решение задачи вытекает из самого чертежа.

Если заданные геометрические элементы расположены наклонно ко всем плоскостям проекций, то, применяя метод замены плоскостей проекций, т.е. дополняя основную систему плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$



одной или несколькими новыми плоскостями проекций, переходим к такому положению, когда геометрические элементы в новой системе плоскостей проекций, например,  $\Pi_1/\Pi_4$ , занимают частное положение.

Метод замены плоскостей проекций заключается в том, что одна из основных плоскостей проекций,  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ , заменяется новой плоскостью проекций  $\Pi_4$ , перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций. Например, если заменяется плоскость проекций  $\Pi_2$ , то новая плоскость проекций  $\Pi_4$  должна быть расположена перпендикулярно  $\Pi_1$  и параллельно, например, проецируемому отрезку. При данном методе положение в пространстве отрезков прямых или плоских фигур не изменяется.

Рассмотрим построение проекции точки  $A$  в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$ . Для этого основную систему плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$ , дополняем новой плоскостью проекций  $\Pi_4$ , расположенной перпендикулярно  $\Pi_1$  в произвольном месте (рис. 5.2, а). Линия пересечения этих плоскостей образует новую ось проекций  $X_{14}$ .

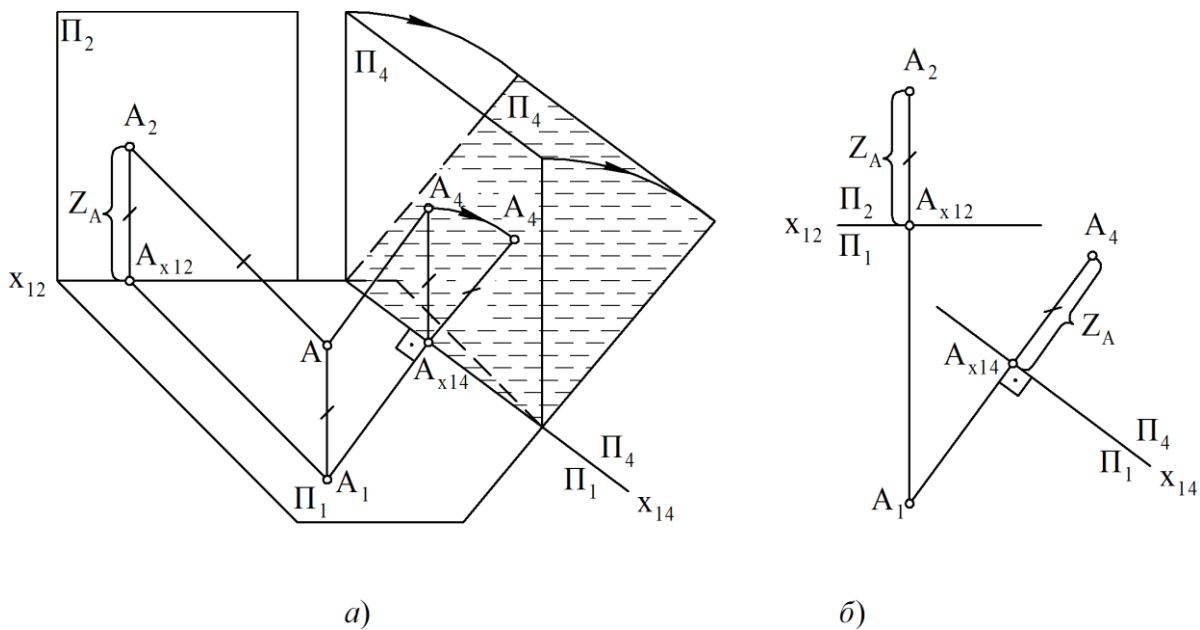


Рис. 5.2

Положение точки  $A_4$  в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$  определяем так же, как и в системе  $\Pi_1/\Pi_2$ , т.е. из точки  $A$  проводим перпендикуляр до пересечения с плоскостью проекций  $\Pi_4$ . Затем плоскость  $\Pi_4$  совмещаем с плоскостью проекций  $\Pi_1$ , как совмещали плоскость проекций  $\Pi_1$  с  $\Pi_2$  при нахождении проекций точек,

расположенных в первой четверти. Проекции  $A_1$  и  $A_4$  точки будут лежать на одном перпендикуляре к оси  $X_{14}$ .

Чтобы построить чертеж точки  $A_4$  в новой системе плоскостей проекций (см. рис. 5.2, б), проводим из точки  $A_1$  перпендикуляр к новой оси проекций, а затем на продолжении этого перпендикуляра от оси  $X_{14}$  откладываем расстояние, равное  $A_2Ax_{12}$ , взятое с фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ .

При необходимости замены плоскости проекций  $\Pi_1$  новую плоскость проекций  $\Pi_4$  располагаем перпендикулярно  $\Pi_2$ . Остальное решение аналогично предыдущему.

Определим натуральную величину отрезка АВ и угол наклона его к горизонтальной плоскости проекций методом замены плоскостей проекций (рис. 5.3).

Учитывая, что одновременно нужно определить величину отрезка АВ и угол наклона его к  $\Pi_1$ , необходимо, чтобы новая дополнительная плоскость проекций  $\Pi_4$  была расположена параллельно отрезку АВ и перпендикулярно плоскости проекций  $\Pi_1$ . Таким образом, на горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  проводим новую ось проекций  $X_{14}$  параллельно  $A_1B_1$  на произвольном расстоянии от  $A_1B_1$ . Отрезок АВ спроецируется на новую плоскость проекций  $\Pi_4$  в натуральную величину. Построение проекции  $A_4B_4$  показано на чертеже. Из точек  $A_1$  и  $B_1$  проведены перпендикуляры к оси проекции  $X_{14}$  и от этой оси на продолжении перпендикуляров отложены величины расстояний, взятые с фронтальной плоскости проекций (показано засечками).

Угол  $\alpha$ , заключенный между найденной проекцией  $A_4B_4$  и осью проекций  $X_{14}$ , равняется углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Для того чтобы определить угол наклона отрезка АВ к фронтальной плоскости проекций, необходимо новую плоскость проекций расположить параллельно отрезку и перпендикулярно фронтальной плоскости проекций, т.е. новая ось на эюре должна пройти параллелью  $A_2B_2$ . Дальнейшее решение аналогично предыдущему.

На рис. 5.4 приведен пример преобразования отрезка CD в проецирующее положение в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_2/\Pi_4$ . Так как отрезок CD занимает частное положение, т.е. расположен параллельно плоскости проекций  $\Pi_2$ , то при расположении дополнительной плоскости проекций  $\Pi_4$  (ось  $X_{24}$ ) перпендикулярно плоскости проекций  $\Pi_2$  и отрезку CD последний спроецируется в точку,

т.е.  $C_4$  совпадет с  $D_4$  ( $C_4 \equiv D_4$ ). Это видно из чертежа, т.к. горизонтальные проекции точек  $C_1$  и  $D_1$  отстоят на одинаковом расстоянии от оси  $X$ .

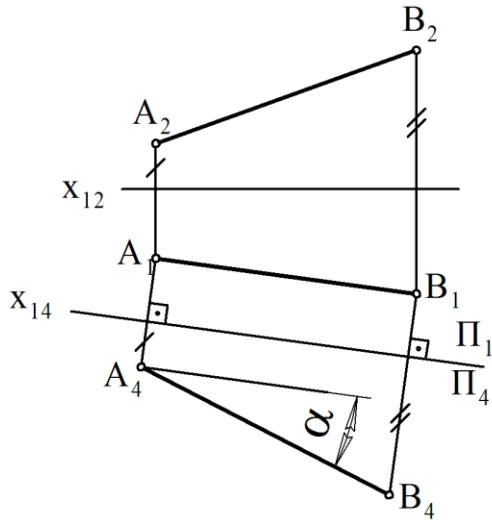


Рис. 5.3

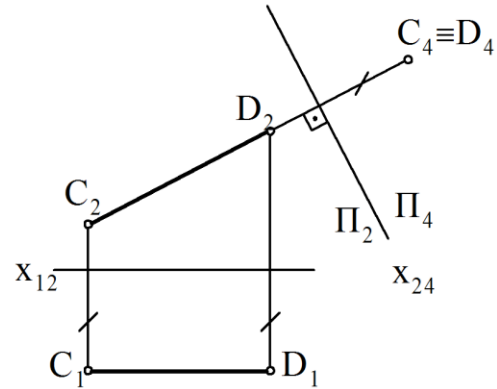


Рис. 5.4

Чтобы преобразовать плоскость общего положения  $\Phi$ , заданную следами (рис. 5.5), в проецирующее положение, необходимо дополнительную плоскость  $\Pi_4$  расположить перпендикулярно данной плоскости и перпендикулярно одной из плоскостей проекций  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ . Для сравнения на рис. 5.6 показаны горизонтально-проецирующая плоскость (см. рис. 5.6, а) и фронтально-проецирующая  $P$  (см. рис. 5.6, б), у которых один из следов перпендикулярен оси  $X$ , а это значит, что он перпендикулярен и одной из плоскостей проекций.

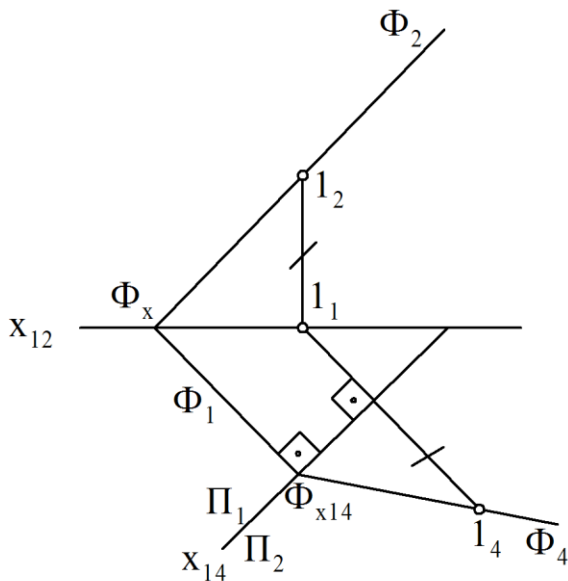


Рис. 5.5

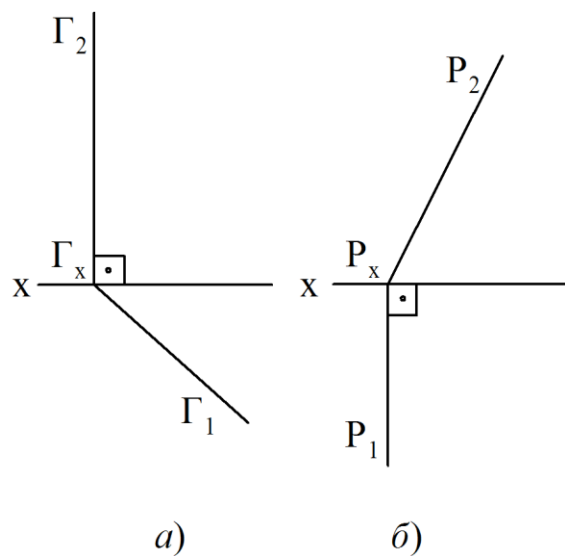


Рис. 5.6

Для решения задачи необходимо плоскость  $\Pi_4$  расположить перпендикулярно горизонтальному следу  $\Phi_1$ , который является линией пересечения плоскости  $\Phi$  и плоскости проекций  $\Pi_1$ . Это значит, что ось  $X_{14}$  должна быть проведена перпендикулярно следу  $\Phi_1$ . Следовательно, плоскость  $\Pi_4$  одновременно займет положение, перпендикулярное  $\Pi_1$ , что является необходимым условием при замене плоскостей проекций. Чтобы построить след  $\Phi_4$  в новой системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$ , возьмем на следе  $\Phi_2$  фронтальную проекцию точки  $1_2$  и найдем точку  $1_4$ , принадлежащую фронтальному следу в новой системе плоскостей проекций. Проведя прямую линию через точку  $1_4$  и точку пересечения следа  $\Phi_1$  с осью проекций  $X_{14}$ , получим фронтальный след  $\Phi_4$  в новой системе плоскостей проекций. Плоскость же, заданная следами  $\Phi_1$  и  $\Phi_4$ , является фронтально-проецирующей в новой системе плоскостей проекций.

Задача решается аналогично при замене горизонтальной плоскости проекций.

Рассмотрим задачу, для решения которой замена одной плоскости проекций дополнительной плоскостью проекций является недостаточной. Пусть требуется преобразовать систему плоскостей проекций так, чтобы отрезок АВ, занимающий в основной системе плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  общее положение, в новой системе был бы перпендикулярен одной из плоскостей проекций, т.е. спроецировался бы в точку.

Новую плоскость проекций выбрать так, чтобы она была перпендикулярна отрезку АВ и одной из плоскостей проекций, невозможно, т.к. отрезок занимает общее положение. Поэтому необходимо вначале применить промежуточную плоскость проекций  $\Pi_4$ , которую нужно расположить параллельно отрезку АВ и перпендикулярно  $\Pi_1$  (рис. 5.7).

Для этого проводим новую ось проекций параллельно отрезку АВ, т.е.  $X_{14} \parallel A_1B_1$ , и строим новую фронтальную проекцию отрезка  $A_4B_4$ . Вторую дополнительную плоскость проекций  $\Pi_5$  в системе  $\Pi_4/\Pi_5$  располагаем перпендикулярно промежуточной плоскости проекций  $\Pi_4$  и отрезку АВ, т.е. ось проекций  $X_{45}$  проводим перпендикулярно проекции отрезка  $A_4B_4$ . Точки  $A_5$  и  $B_5$  совпадают, т.к. отрезок  $A_1B_1$  расположен на одинаковом расстоянии от оси  $X_{14}$ .

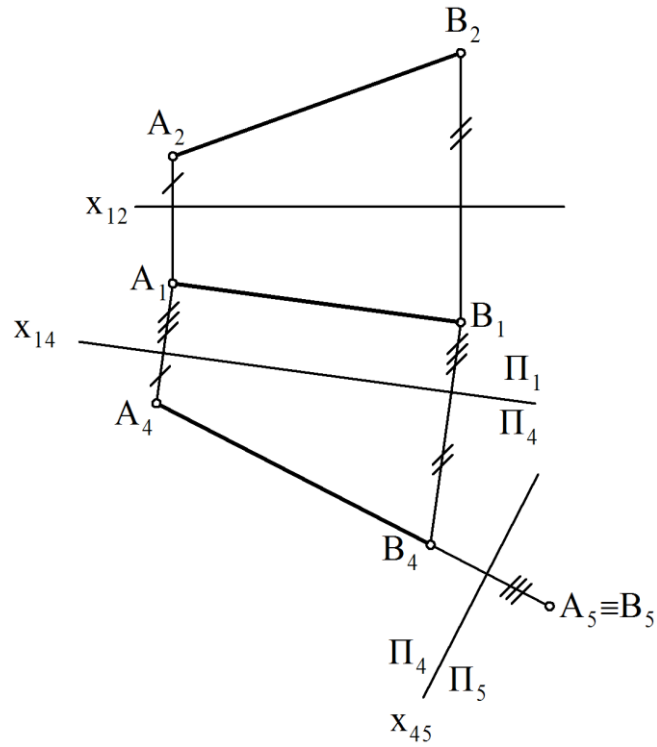


Рис. 5.7

На рис. 5.8 приведен пример определения истинной величины треугольника ABC путем применения двух дополнительных плоскостей проекций.

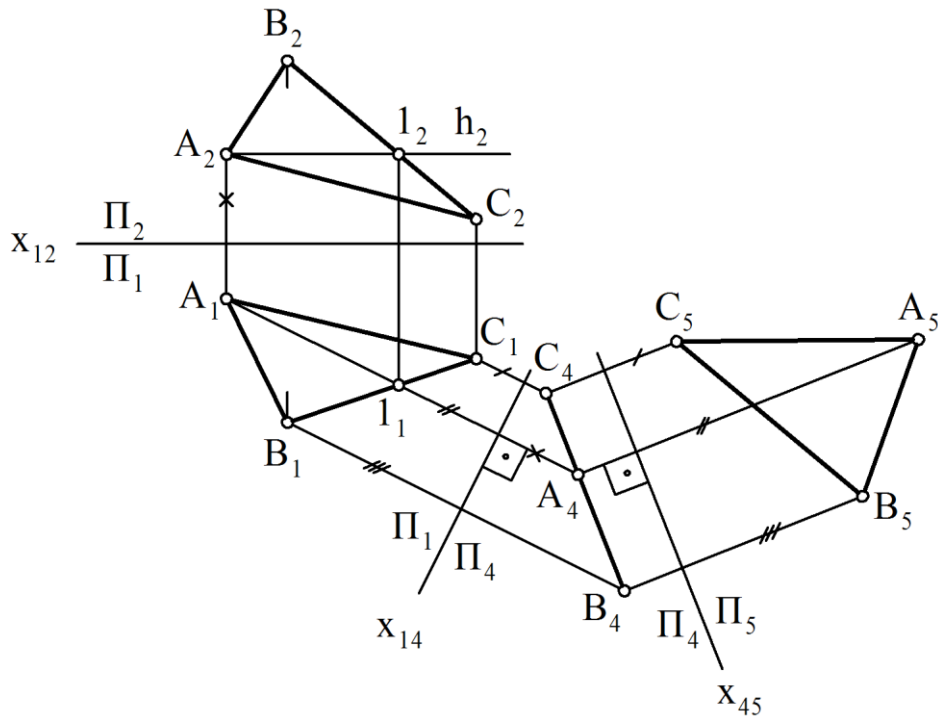


Рис. 5.8

Заменяем систему плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  новой системой плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_4$ , располагая плоскость проекций  $\Pi_4$  перпендикулярно треугольнику  $ABC$  и плоскости проекций  $\Pi_1$ . Это значит, что новая ось проекций должна быть расположена перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали  $h_1$ . Плоскость треугольника в данном случае спроецируется на  $\Pi_4$  в прямую линию ( $C_4A_4B_4$ ).

Чтобы получить истинную величину треугольника  $ABC$ , нужно плоскость  $\Pi_5$  расположить параллельно плоскости треугольника  $ABC$  и перпендикулярно  $\Pi_4$ . Это значит, что ось проекций  $X_{45}$  должна быть расположена параллельно проекции треугольника  $C_4A_4B_4$ . Полученная проекция  $A_5B_5C_5$  соответствует истинной величине треугольника  $ABC$ .

## 5.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций

Сущность метода вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, состоит в том, что, сохраняя основную систему плоскостей проекций  $\Pi_1/\Pi_2$  неизменной, проецируемыми отрезкам прямых, плоским фигурам придаем путем вращения вокруг некоторой оси частное положение по отношению к плоскостям проекций. В том случае, если отрезок прямой повернуть до положения, параллельного плоскости проекций, то на эту плоскость проекций он спроецируется в натуральную величину.

В качестве осей вращения применяют прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, располагающиеся вне этих плоскостей или принадлежащие им (рис. 5.9).

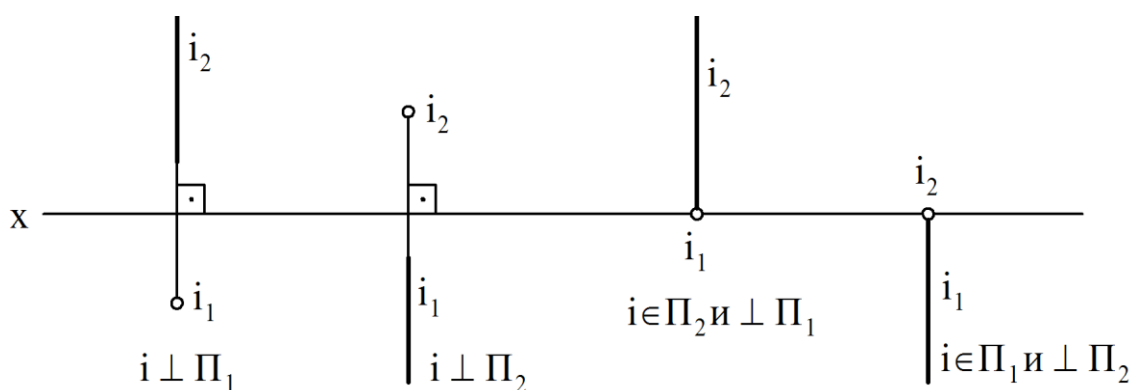


Рис. 5.9

Рассмотрим пример на вращение точки  $A$  вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций. Пусть требуется точку  $A$  повернуть на некоторый угол  $\varphi$ , вращая по ходу часовой стрелки (рис. 5.10).

Ось вращения  $i$  проецируется на горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$  точкой  $(i_1)$ , а на  $\Pi_2$  – прямой линией ( $i_2$ ), перпендикулярной оси  $X$ . При вращении точки  $A$  вокруг оси  $i$  она будет перемещаться в плоскости  $\Gamma$  по окружности с радиусом  $OA$  и центром вращения  $O$ . Плоскость  $\Gamma$ , построенная дополнительно, располагается перпендикулярно оси  $i$  и называется плоскостью перемещения точки. Следовательно, горизонтальная проекция радиуса вращения  $O_1A_1$  равняется истинной величине радиуса вращения  $OA$ , т.к. плоскости  $\Gamma$  и  $\Pi_1$  параллельны между собой. При вращении точки  $A$  по ходу часовой стрелки на угол  $\varphi$  она переместится в плоскости  $\Gamma$  по дуге окружности радиуса  $OA$  в точку  $A'$ . Горизонтальная проекция точки  $A$  также будет перемещаться по окружности радиуса  $O_1A_1 = OA$  и займет положение  $A'_1$ . Фронтальная проекция  $A_2$  будет перемещаться по прямой, параллельной оси  $X$  (след  $\Gamma_2$ ), и займет положение  $A'_2$ .

На рис. 5.11, *а* показан пример вращения точки  $A$  на угол  $\varphi$  вокруг оси  $i$ , перпендикулярной  $\Pi_1$ , а на рис. 5.11, *б* – вращение точки  $B$  вокруг оси  $i$ , перпендикулярной  $\Pi_2$ .

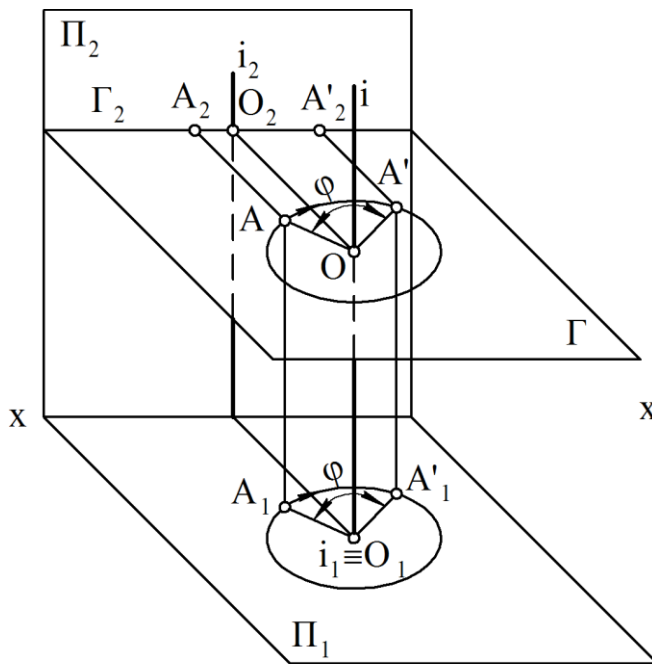


Рис. 5.10

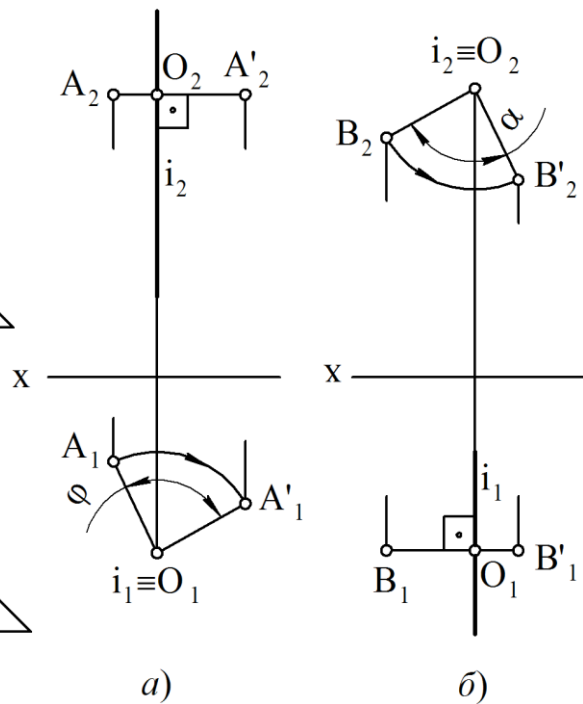


Рис. 5.11

В первом случае горизонтальная проекция  $A_1$  точки  $A$  перемещается по дуге радиусом  $O_1A_1$  до положения  $A'_1$ , а фронтальная  $A_2$  – по прямой линии, параллельной оси  $X$  ( $A'_2$ ). Во втором случае, наоборот, фронтальная проекция точки (точка  $B_2$ ) перемещается по дуге радиусом  $O_2B_2$  до положения  $B'_2$ , а горизонтальная – по прямой, параллельной оси  $X$  до  $B'_1$ .

Рассмотрим примеры определения истинных величин геометрических образов методом вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций.

Пусть требуется определить истинную величину отрезка  $AB$  (рис. 5.12).

Целесообразно ось вращения проводить через одну из точек, принадлежащих отрезку, тогда получается более простое решение. В данной задаче ось  $i$  проходит через точку  $B$  перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций, следовательно, горизонтальная ее проекция совпадает с  $B_1$  ( $i_1 \equiv B_1$ ). Перемещая горизонтальную проекцию точки  $A_1$  по дуге радиусом  $R=A_1B_1$  с центром вращения в точке  $B_1 \equiv i_1$ , располагаем ее на таком расстоянии от оси  $X$ , на котором расположена точка  $B_1$ , т.е. горизонтальная проекция отрезка  $A_1B_1$  займет положение, параллельное оси  $X$  ( $B_1A'_1$ ), поэтому фронтальная проекция  $B_2A'_2$  будет равняться истинной величине отрезка  $AB$ . Как видно из чертежа, фронтальная проекция  $A_2$  точки  $A$  перемещается параллельно оси  $X$  до пересечения с линией связи, проходящей от точки  $A'_1$ .

Определение истинной величины отрезка  $CD$  вращением вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, показано на рис. 5.13, где  $C'_1D'_1$  является истинной величиной отрезка  $CD$ .

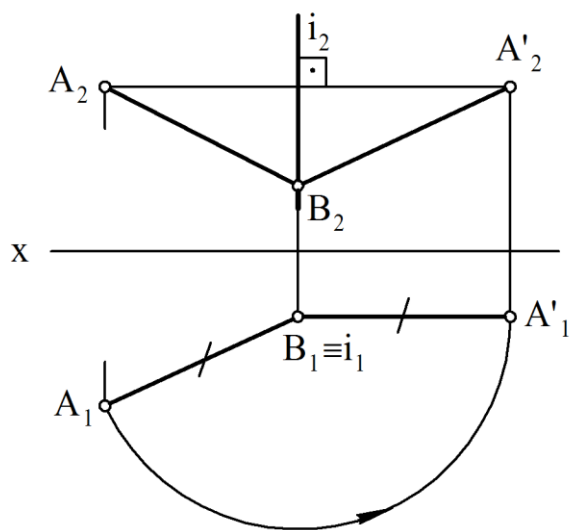


Рис. 5.12

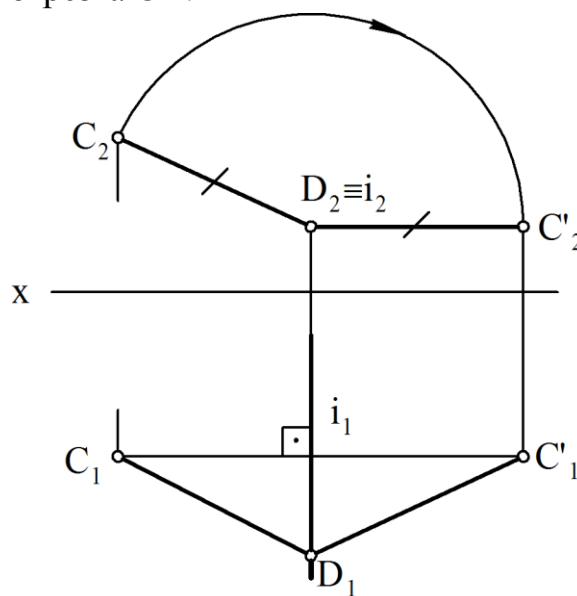


Рис. 5.13



Как видно из рис. 5.14 и рис. 5.15, при вращении отрезка прямой вокруг оси, перпендикулярной  $\Pi_1$  или  $\Pi_2$ , ее проекция на эту плоскость проекций остается неизменной. Учитывая это положение, предоставляется возможность решать аналогичные задачи без применения осей вращения, так называемым плоскопараллельным перемещением, при котором все точки прямой, фигуры перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.

На рис. 5.14 определена истинная величина отрезка АВ плоскопараллельным перемещением. Мысленно вращаем этот отрезок вокруг мнимой оси, перпендикулярной  $\Pi_1$ , до положения, параллельного  $\Pi_2$ , и располагаем горизонтальную проекцию  $A_1B_1$  в произвольном месте параллельно оси X, получаем отрезок  $A'_1B'_1$ . Фронтальные проекции точек А и В в данном случае перемещаются параллельно оси X.

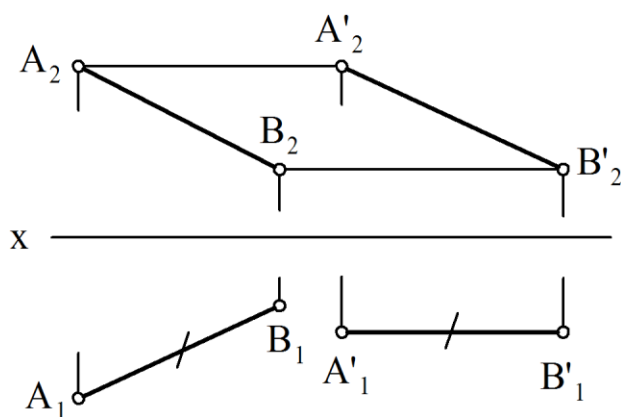


Рис. 5.14

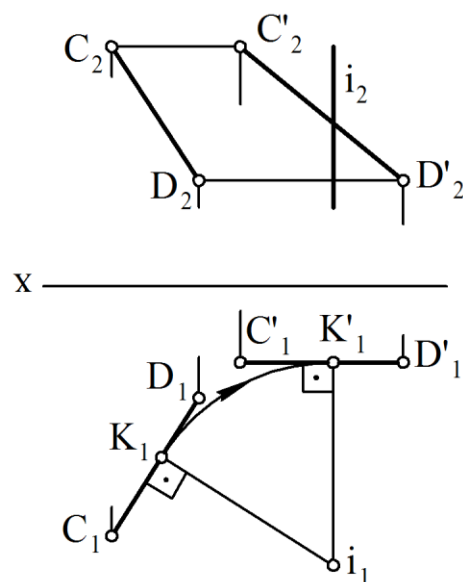


Рис. 5.15

На рис. 5.15 дан пример нахождения истинной величины отрезка CD, когда ось вращения  $i$  проходит перпендикулярно плоскости проекций  $\Pi_1$ , но не через отрезок CD. Из точки  $i_1$  опускаем перпендикуляр  $i_1K_1$  к горизонтальной проекции отрезка  $C_1D_1$  и вращаем этот перпендикуляр с проекцией отрезка  $C_1D_1$  до положения, пока  $i_1K_1$  не расположится перпендикулярно оси X, тогда отрезок  $C'_1D'_1$  займет положение, параллельное оси X, т.е. спроецируется на  $\Pi_2$  в истинную величину  $C'_2D'_2$ .

При решении отдельных задач для достижения поставленной цели недостаточно применения одной оси вращения, тогда применяется несколько осей вращения. Так, при определении истинной величины треугольника ABC (рис. 5.16), занимающего общее положение

относительно плоскостей проекций, необходимо его вначале повернуть до проецирующего положения, а затем – до плоскости уровня.

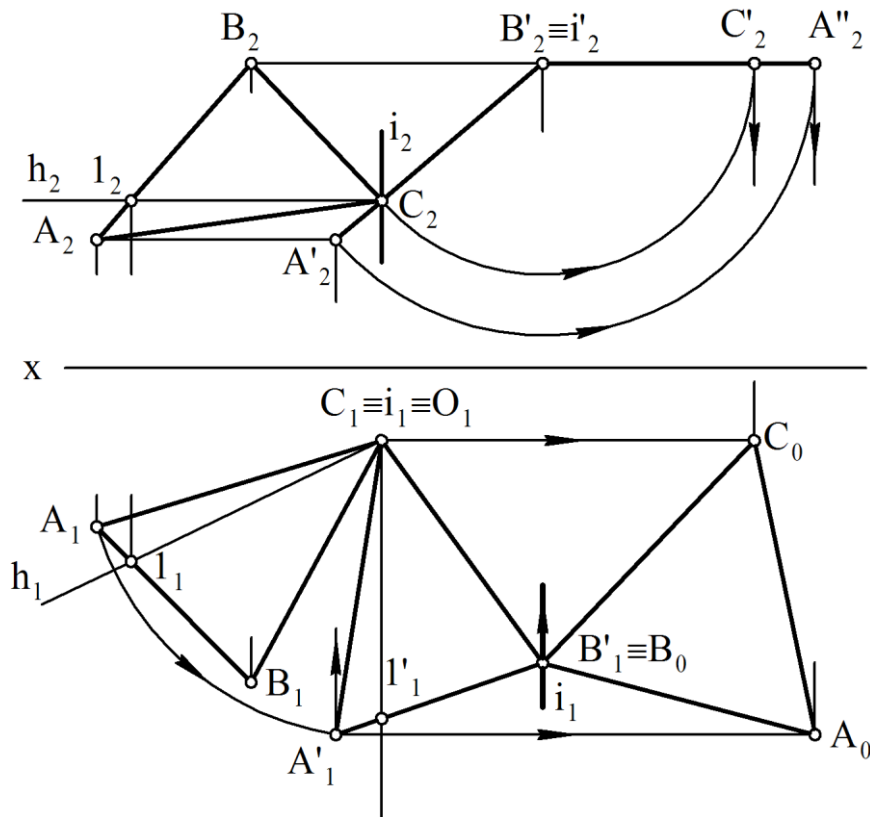


Рис. 5.16

Ось вращения  $i$  проводим перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций, а в треугольнике  $ABC$  проводим горизонталь  $h$ . Вращаем эту горизонталь до проецирующего положения относительно плоскости проекций  $\Pi_2$ . Горизонталь спроецируется в точку, а весь треугольник – в отрезок  $A'_2C_2B'_2$ .

Вторую ось вращения  $i'$  ( $i'_1, i'_2$ ), проходящую через точку  $B$  ( $B'_1, B'_2$ ), располагаем перпендикулярно плоскости проекций  $\Pi_2$  и вращаем треугольник  $ABC$  ( $A'_2C_2B'_2$ ) до положения, параллельного плоскости проекций  $\Pi_1$  ( $B'_2C'_2A''_2 \parallel X$ ). В этом случае горизонтальная проекция  $A_0B_1C_0$  треугольника спроецируется в натуральную величину, т.е.  $A_0B_1C_0 = ABC$ .

## ЛЕКЦИЯ 6. МНОГОГРАННИКИ

- 6.1. Способы задания многогранников и построение их проекций.
- 6.2. Пересечение многогранников с плоскостью.
- 6.3. Пересечение прямой линии с поверхностью многогранников.
- 6.4. Развертка пирамиды и призмы.

### 6.1. Способы задания многогранников и построение их проекций

Одним из видов пространственных форм являются многогранники. Многогранником называется совокупность таких плоских многоугольников, у которых каждая сторона одного является одновременно стороной другого. Вершины и стороны многоугольников являются вершинами и ребрами многогранников, а сами многоугольники – гранями. Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые расположены по одну сторону плоскости любой из его граней.

Наибольший практический интерес представляют призмы и пирамиды. Призмой называется многогранник, у которого две грани (основания) лежат в параллельных плоскостях, а все боковые ребра вне этих граней параллельны между собой. Пирамидой называется многогранник, одна грань которого – многоугольник со сколь угодно большим числом сторон (не менее трех), а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной.

Форма и положение многогранника в пространстве могут быть определены заданием его ребер, основанием и вершиной, если это пирамида, основаниями и высотой, если это призма.

Выбирая положение пирамиды или призмы для их изображения, целесообразно располагать их основания параллельно плоскости проекций. Примеры приведены на рис. 6.1, 6.2, 6.3. Здесь в системе плоскостей проекций  $\Pi_1, \Pi_2$  изображены трехгранная пирамида, прямая и наклонная призмы.

Как видно, пирамида задается на эюре проекциями ее основания и вершины, а призма – проекциями основания и ребер.

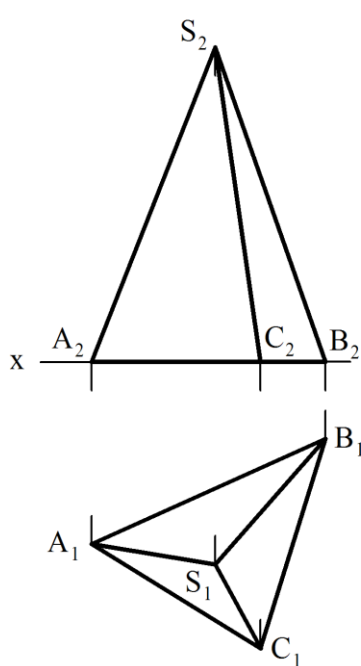


Рис. 6.1

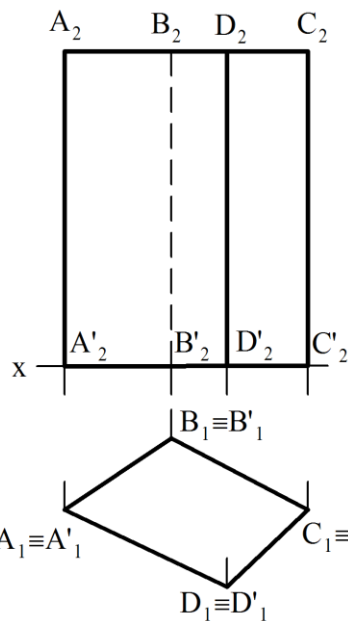


Рис. 6.2

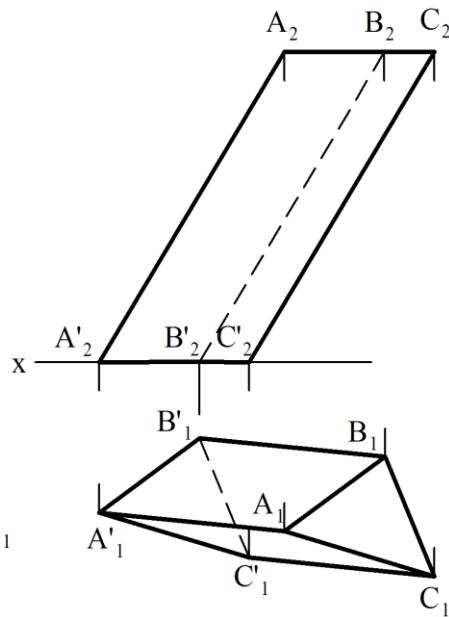


Рис. 6.3

## 6.2. Пересечение многогранников с плоскостью

При пересечении многогранника плоскостью в общем случае получается выпуклый плоский многоугольник  $ABCD$  (рис. 6.4). Этот многоугольник можно построить или по точкам пересечения с плоскостью ребер многогранника, или по линиям пересечения граней многогранника с плоскостью. Следовательно, задача сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линий пересечения плоскостей. Первый способ на практике применяется чаще второго.

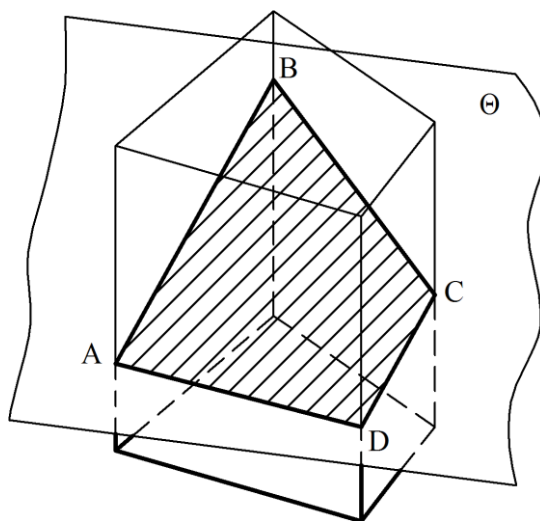


Рис. 6.4

Плоскую фигуру, полученную от пересечения многогранника плоскостью, называют сечением.

Рассмотрим несколько примеров.

На рис. 6.5. задана прямая пятиугольная призма. Фигура сечения этой призмы плоскостью  $\Phi$  (фронтально-проецирующей), представляет собой плоский пятиугольник 1, 2, 3, 4, 5.

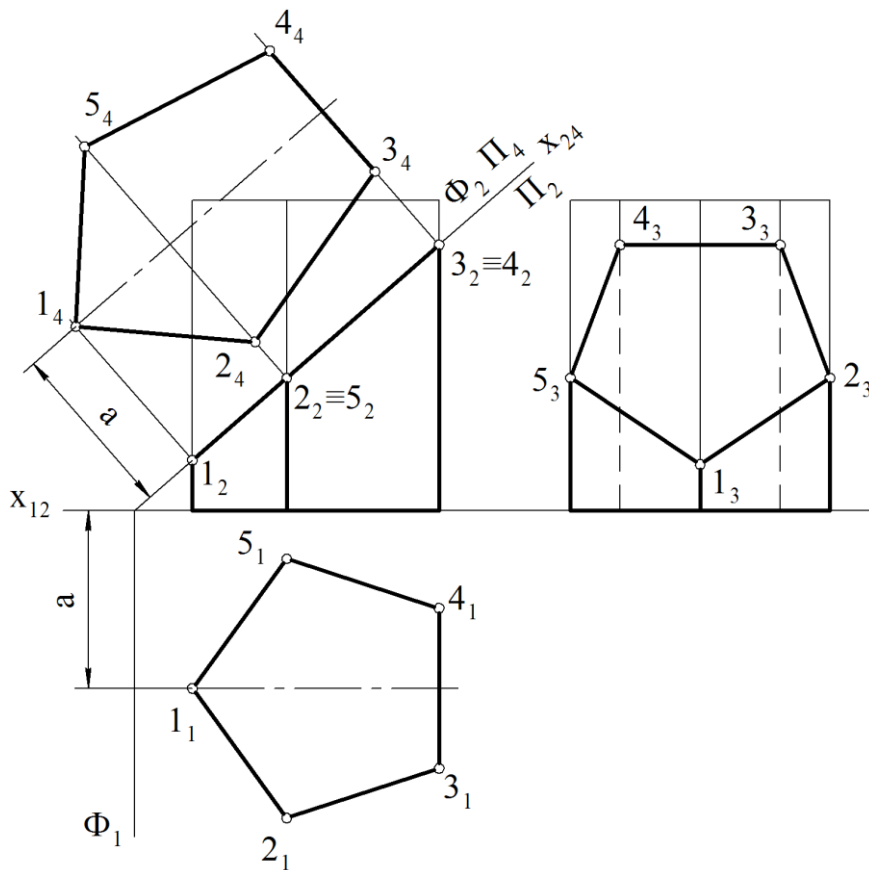


Рис. 6.5.

Для построения проекций фигуры сечения находят проекции точек пересечения плоскости  $\Phi$  с ребрами призмы и соединяют их прямыми линиями. Фронтальные проекции этих точек получаются при пересечении фронтальных проекций ребер призмы со следом  $\Phi_2$  плоскости  $\Phi$  (точки  $1_2$ ,  $2_2$ ,  $3_2$ ,  $4_2$ ,  $5_2$ ).

Горизонтальные проекции точек пересечения  $1_1$ ,  $2_1$ ,  $3_1$ ,  $4_1$ ,  $5_1$  совпадают с горизонтальными проекциями ребер. Имея две проекции этих точек, с помощью линий проекционной связи находят профильные проекции  $1_3$ ,  $2_3$ ,  $3_3$ ,  $4_3$ ,  $5_3$ , которые соединяют прямыми линиями и получают профильную проекцию сечения.

Для определения натуральной величины фигуры сечения применен способ замены плоскостей проекций. Горизонтальная плоскость проекций  $\Pi_1$  заменена новой  $\Pi_4$ , причем ось  $x_{24}$  совпадает (для упрощения построений) с фронтальным следом плоскости  $\Phi_2$ .

Для нахождения новой горизонтальной проекции какой-либо точки фигуры сечения (например точки 1) необходимо выполнить следующие построения: из точки  $1_2$  восстановить перпендикуляр от новой оси  $x_{24}$  и отложить на нем расстояние от прежней оси  $x$  до прежней горизонтальной проекции  $1_1$  точки, т.е. отрезок  $a$ . Так же находим и новые горизонтальные проекции точек  $2_4, 3_4, 4_4, 5_4$ . Соединив прямыми линиями новые горизонтальные проекции  $1_4, 2_4, 3_4, 4_4, 5_4$ , получаем действительный вид фигуры сечения.

Пример сечения правильной шестиугольной пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью показан на рис. 6.6.

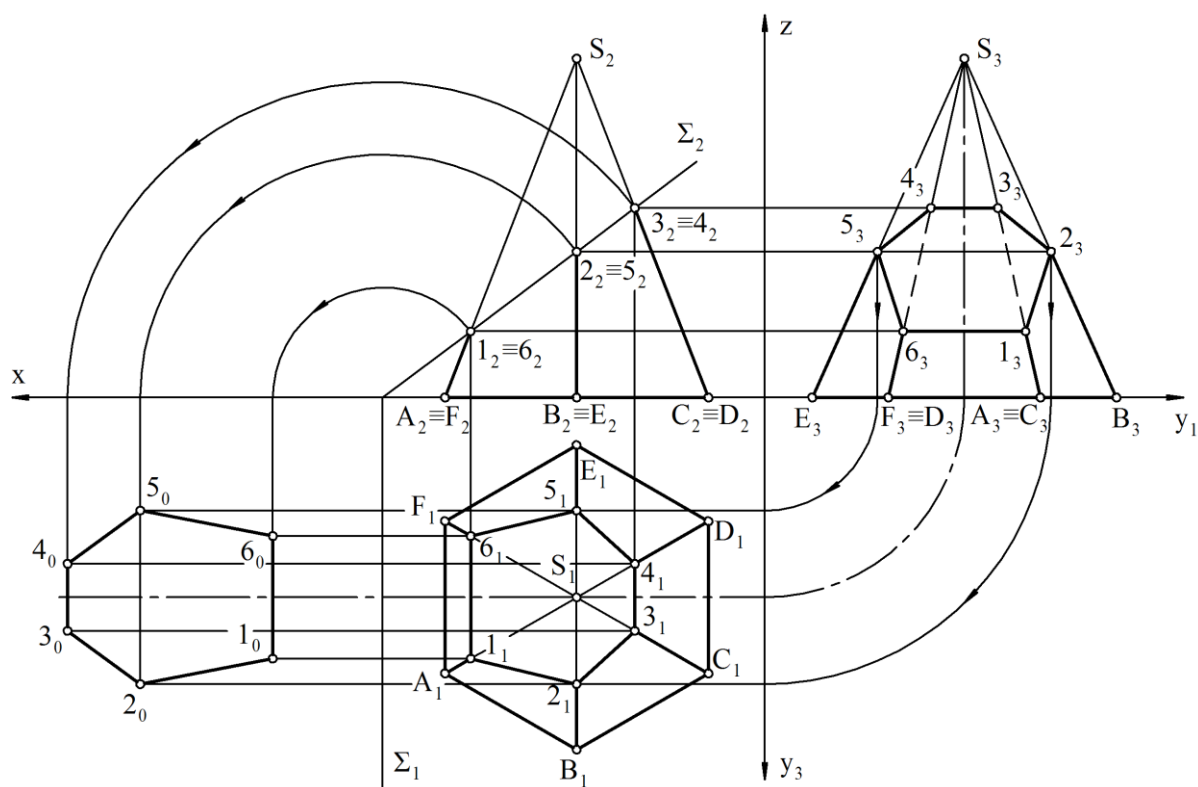


Рис. 6.6

Фронтальная проекция сечения совпадает с фронтальным следом  $\Sigma_2$  плоскости  $\Sigma$ . Горизонтальную и профильную проекции фигуры сечения строят по точкам, которые являются точками пересечения плоскости  $\Sigma$  с ребрами пирамиды. Натуральная величина фигуры сечения, полученная

способом совмещения (плоскость  $\Sigma$  вместе с фигурой сечения совмещена с горизонтальной плоскостью проекций).

Если многогранник пересекает плоскость общего положения, то для определения линии пересечения необходимо воспользоваться некоторыми дополнительными вспомогательными построениями. Эти построения можно выполнять двумя способами:

а) метод ребер – нахождение точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, т.е. нахождение вершин многогранника, получающегося в сечении;

б) метод граней – нахождение линий пересечения граней многогранника с секущей

Так, на рис. 6.7. линия пересечения призмы  $ABC$  с плоскостью общего положения  $\Phi$  построена с использованием метода ребер.

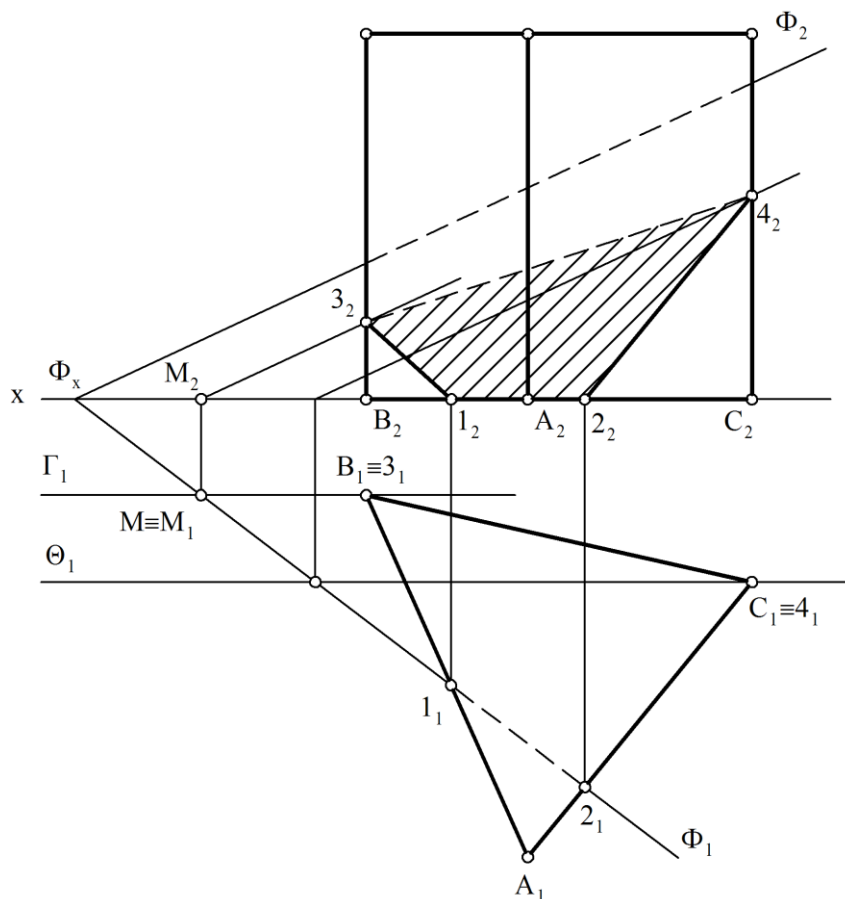


Рис. 6.7.

Горизонтальный след  $\Phi_1$  пересекает нижнее основание призмы по прямой  $1_12_1$ .

Ребро А находится перед плоскостью и не пересекается с ней. Через ребра призмы В и С проводим фронтальные плоскости  $\Gamma$  и  $\Theta$  и строим линии пересечения вспомогательных плоскостей с плоскостью  $\Phi$ . Фронтальные проекции ребер будут пересекаться с проекциями линий пересечения плоскостей в точках встречи их с плоскостью  $\Phi$ .

Использование метода граней показано на рис. 6.8, когда необходимо построить сечение призмы ABC плоскостью общего положения  $\Phi$  ( $a \cap b$ ). Закладываем грани АВ и ВС в горизонтально-проецирующие плоскости  $\Gamma$ ,  $\Theta$  и строим линии пересечения данных плоскостей с плоскостью  $\Phi$ . В пределах граней АВ и ВС эти линии являются сторонами многоугольника, получаемыми при пересечении плоскостью  $\Phi$  призмы ABC.

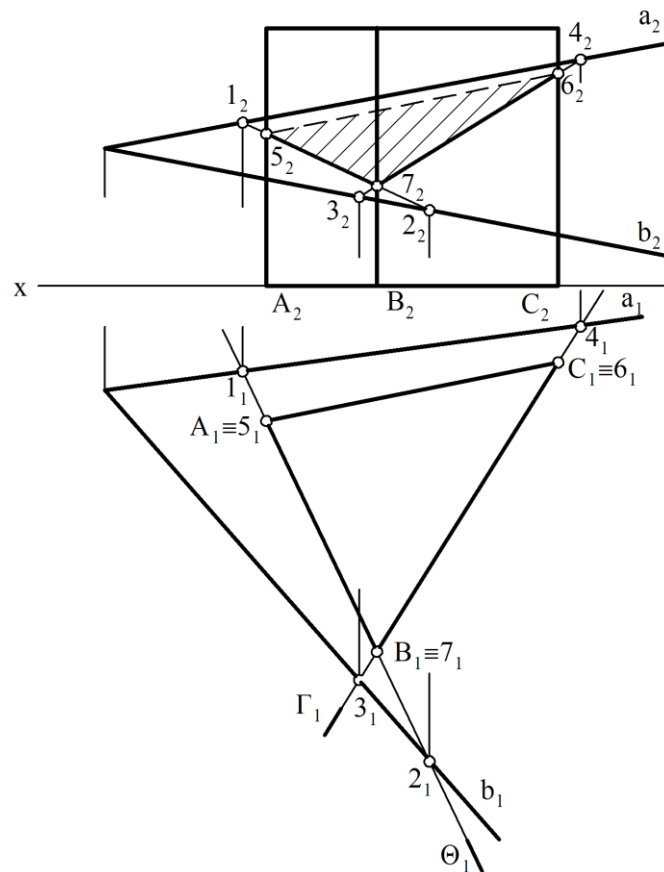


Рис. 6.8.

На рис. 6.9 построены проекции сечения плоскостью  $\Phi$  ( $\Delta ABC$ ) пирамиды.



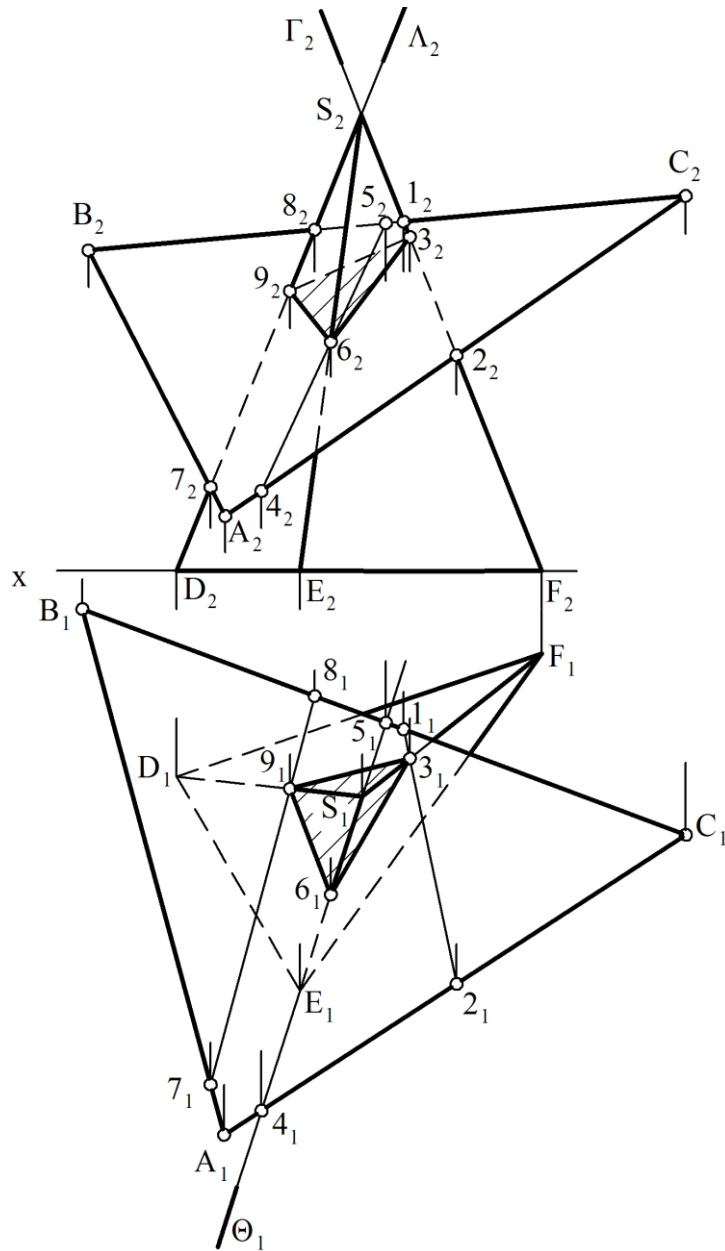


Рис. 6.9

Задача решена нахождением точек встречи (точек 3, 6, 9) каждого ребра пирамиды с секущей плоскостью. Чтобы найти точку (3) встречи ребра FS с секущей плоскостью ( $\Delta ABC$ ), через ребро необходимо провести вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость  $\Gamma$ , построить линию пересечения 1, 2 с секущей плоскостью  $\Phi$  ( $\Delta ABC$ ) и в пересечении горизонтальной проекции линии пересечения с горизонтальной проекцией ребра FS отметить горизонтальную проекцию искомой точки 3. Фронтальная проекция точки 3 построена при помощи линии связи. Точка 9 построена аналогично. Для нахождения точки встречи ребра ES с плоскостью  $\Phi$  ( $\Delta ABC$ ) ребро заключаем во вспомогательную

горизонтально-проецирующую плоскость  $\Theta$ . Соединив точки 3, 6, 9, находим искомое сечение.

### 6.3. Пересечение прямой линии с поверхностью многогранников

Прямая линия может пересекать поверхность многогранника в двух точках при условии, что многогранник выпуклый. Решение этой задачи основано на схеме определения точки пересечения прямой с плоскостью и распадается на три этапа:

- 1) через заданную прямую проводится вспомогательная плоскость;
- 2) строится проекция фигуры сечения многогранника;
- 3) определяются точки пересечения прямой с контуром сечения.

На рис. 6.10 построены точки  $M (M_1, M_2)$  и  $N (N_1, N_2)$  пересечения прямой  $l$  с поверхностью пирамиды  $SABC$ .

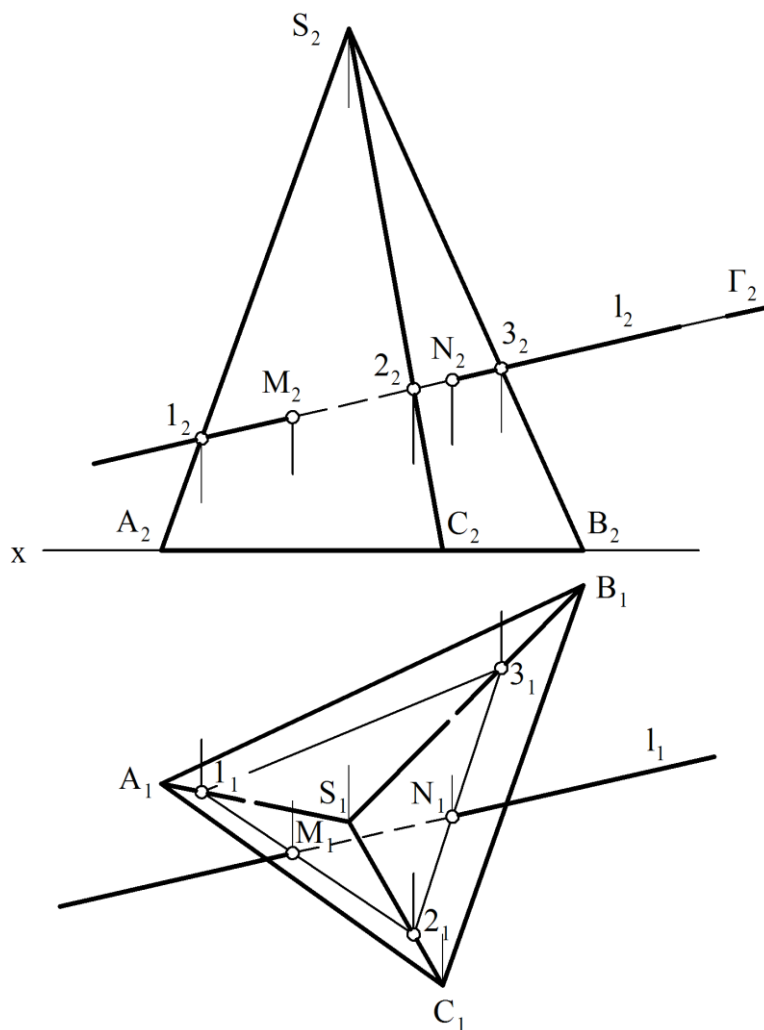


Рис. 6.10

На рис. 6.11 построены точки  $R$  ( $R_1, R_2$ ) и  $S$  ( $S_1, S_2$ ) пересечения прямой  $k$  с поверхностью наклонной призмы.

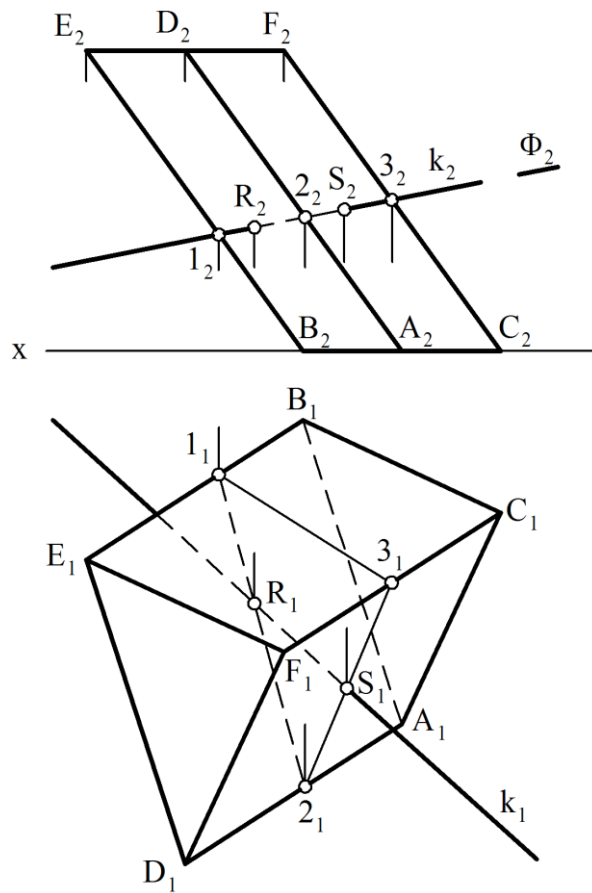


Рис. 6.11

#### 6.4. Развертка пирамиды и призмы.

Разверткой называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с плоскостью без складок и разрывов.

Построение разверток поверхностей различных деталей находит широкое применение в технике, так как многие технические конструкции изготавливают из листового материала. Заготовки этих конструкций представляют собой их развертки.

Поверхности, которые можно совместить с плоскостью без разрыва и складок, называют развертывающимися. К таким поверхностям относят все гранные поверхности.

Под разверткой многогранной поверхности подразумевают плоскую фигуру, составленную из граней этой поверхности, совмещенную с одной плоскостью.

На рис. 6.12 показано построение развертки треугольной пирамиды.

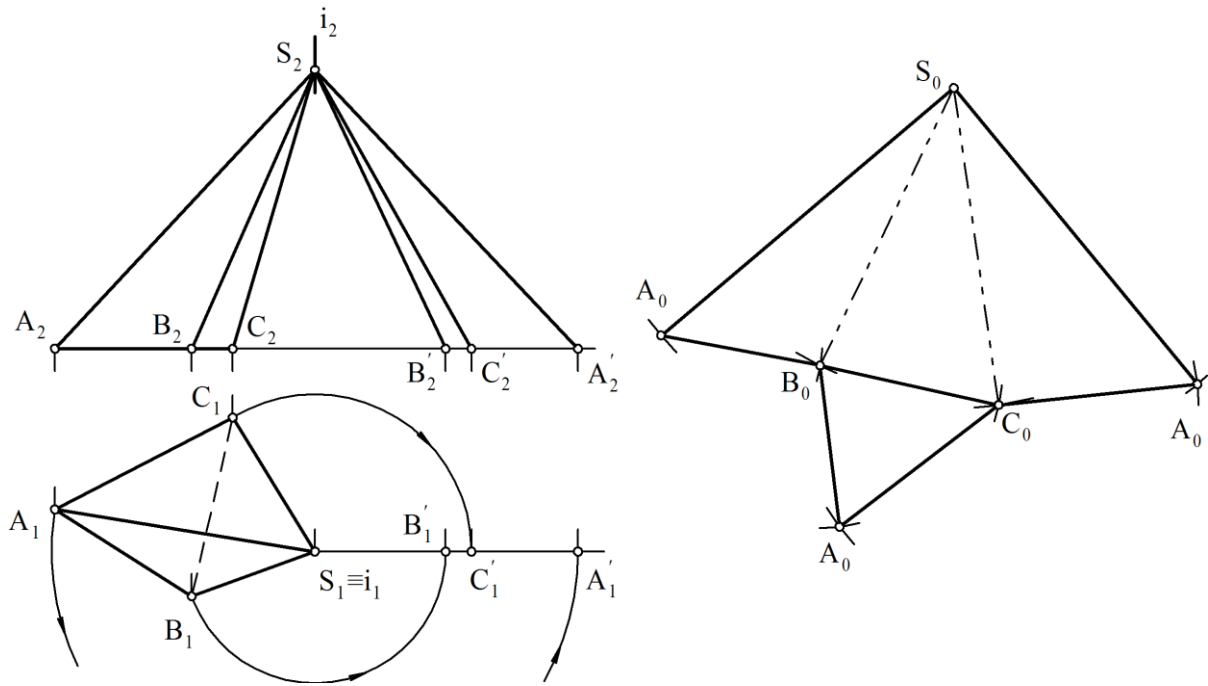


Рис. 6.12.

Определение натуральных величин боковых ребер пирамиды выполнено методом вращения их вокруг горизонтально-проецирующей оси  $i$ , проходящей через вершину  $S$ . Все ребра повернуты до положения параллельного плоскости проекций  $\Pi_2$ . При этом на фронтальной плоскости проекций получим натуральную величину ребер  $S_2A_2'$ ,  $S_2B_2'$ ,  $S_2C_2'$ . Для построения развертки из произвольной точки  $S_0$  проводим прямую, на которой откладываем действительную величину ребра  $S_0A_0 = S_2A_2'$ . Из точки  $S_0$  делаем засечку радиусом, равным натуральной величине ребра  $SB = S_2B_2'$ , а из точки  $A_0$  – засечку радиусом, равным стороне основания пирамиды  $AB = A_1B_1$ . В результате получим точку  $B_0$  и треугольник  $S_0A_0B_0$ , равный действительной величине грани  $SAB$ . Аналогично на стороне  $S_0B_0$  строим треугольник  $S_0B_0C_0$  и на стороне  $S_0C_0$  – треугольник  $S_0C_0A_0$ .

Основание  $ABC$  пирамиды в горизонтальной проекции представлено в натуральную величину. Пристраивая треугольник основания  $A_0B_0C_0$ , равный треугольнику  $A_1B_1C_1$ , к развертке боковой поверхности, получаем полную развертку пирамиды.

Разверткой боковой поверхности треугольной призмы (рис. 6.13) будет прямоугольник, одна сторона которого равна длине боковых ребер (в данном примере проекция на плоскость  $\Pi_2$ ), а вторая – периметру основания  $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1$ , который проецируется без искажений на плоскость  $\Pi_1$ .

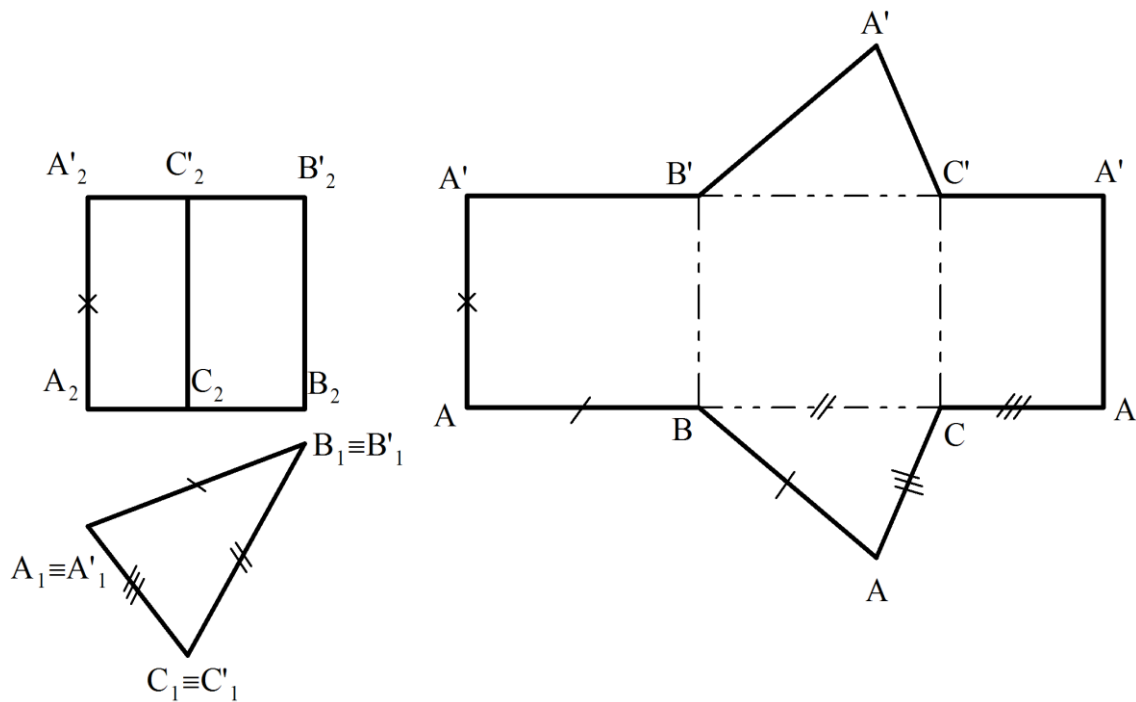


Рис. 6.13

## ЛЕКЦИЯ 7. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

7.1 Цилиндр. Конус. Сфера.

7.2 Пересечение поверхностей вращения плоскостью.

7.3 Пересечение прямой линии с поверхностями цилиндра и конуса

7.4 Развертка цилиндра и конуса

### 7.1 Цилиндр. Конус. Сфера.

В числе кривых поверхностей имеются широко распространенные в практике поверхности вращения. Поверхностью вращения называют поверхность, полученную при вращении какой-либо образующей линии  $\ell$  вокруг неподвижной прямой  $i$ , которая является осью поверхности.

Цилиндрической поверхностью вращения называется поверхность, образованная прямой линией (образующей), которая вращается, оставаясь параллельной оси вращения. Боковая поверхность прямого кругового цилиндра (рис. 7.1) образована движением отрезка АВ вокруг вертикальной оси  $i$ .

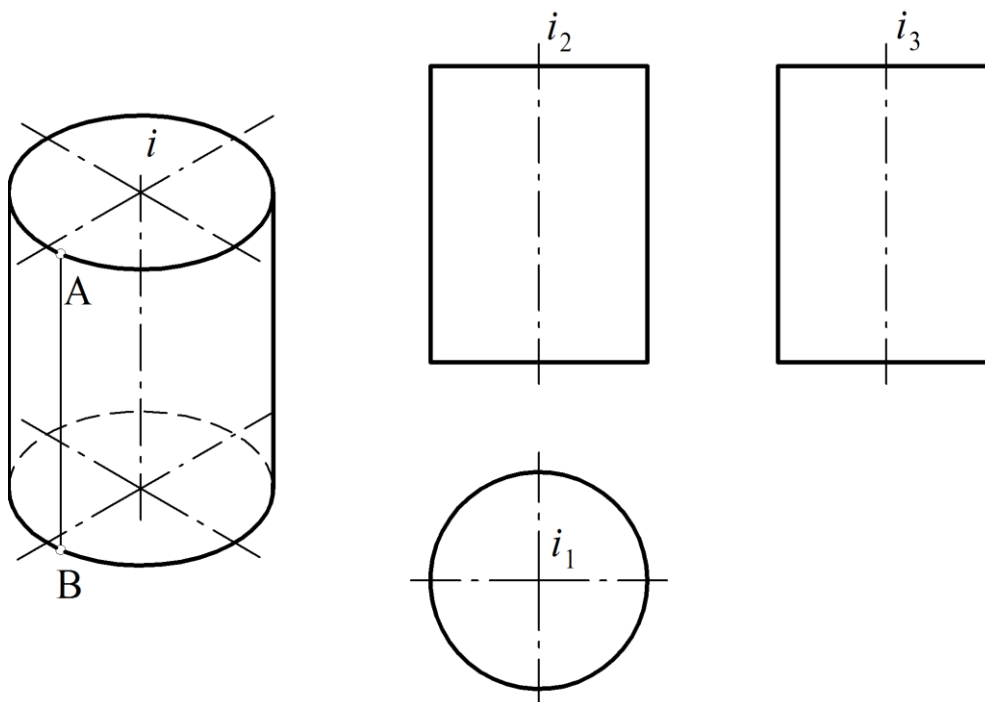


Рис. 7.1

Коническая поверхность вращения представляет собой поверхность, образующая прямая которой пересекает ось вращения в точке  $S$ , называемой

вершиной конуса (рис. 7.2). Боковая поверхность прямого кругового конуса образована вращением образующей  $SC$  вокруг оси конуса по направляющей – окружности.

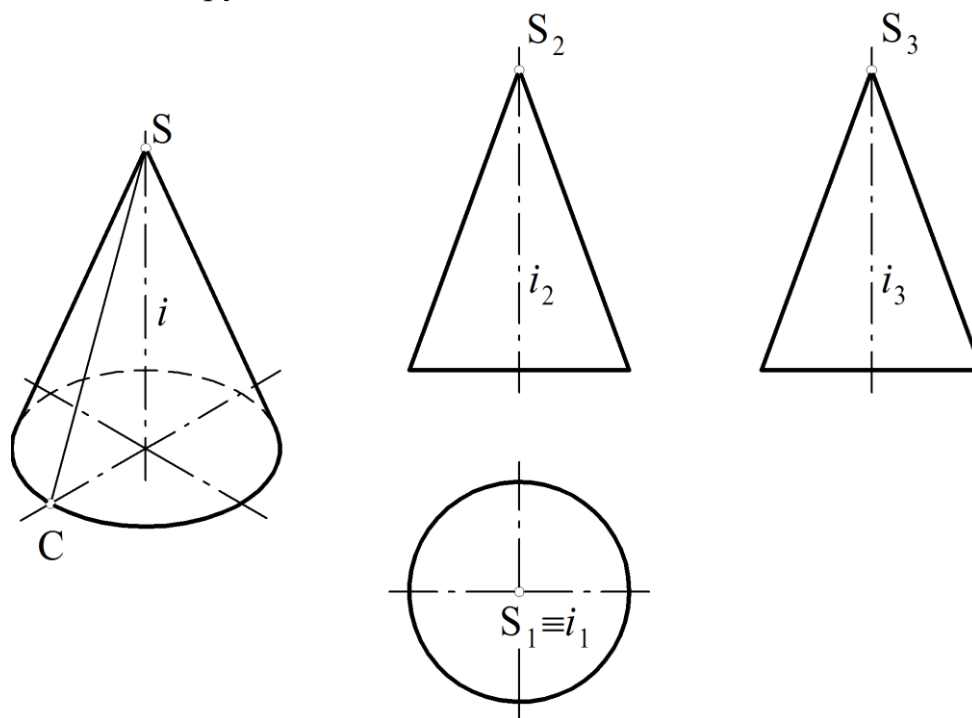


Рис. 7.2

Сферой называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг одного из ее диаметров. На все плоскости проекций сфера проецируется в круг с радиусом, равным радиусу сферы (рис. 7.3).

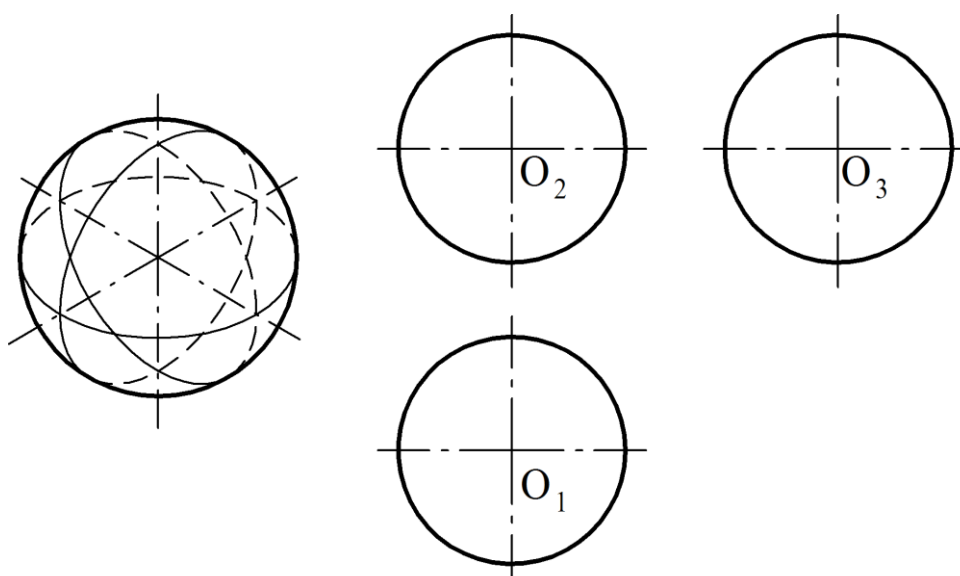


Рис. 7.3

## 7.2 Пересечение поверхностей вращения плоскостью.

В пересечении поверхностей вращения плоскостью получаются различные плоские кривые линии или прямые линии, в зависимости от положения секущей плоскости. Проекция кривых линий строятся по проекциям ряда точек, определяемых соответствующими способами. При этом следует стремиться определить, прежде всего, так называемые характерные (опорные) точки фигуры сечения – верхние и нижние, т.е. точки, наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций, и левые и правые, т.е. точки, лежащие на крайних образующих поверхностей. После этого определяется ряд промежуточных точек, которые затем соединяются с характерными плавной кривой линией.

В пересечении кругового цилиндра плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получаться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения цилиндра (рис. 7.4, *а*); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра под углом, отличным от прямого (рис. 7.4, *б*); прямоугольник, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 7.4, *в*).

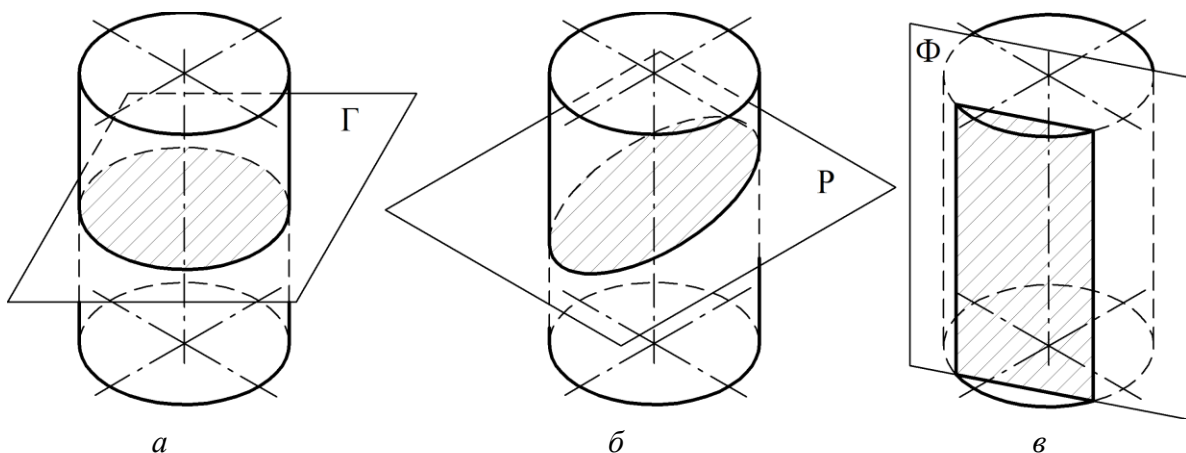


Рис. 7.4

Проекция фигуры сечения цилиндра плоскостью, наклоненной к оси цилиндра, могут быть построены аналогично проекциям фигуры сечения призмы плоскостью. Для этого в цилиндр вписывается многогранная призма, находятся точки встречи ребер этой призмы с секущей плоскостью, которые соединяются плавной кривой линией.

На рис. 7.5. даны три проекции прямого цилиндра, пересеченного фронтально-проецирующей плоскостью  $\Phi$ , построение проекций фигуры сечения в этом случае может быть выполнено по-другому.



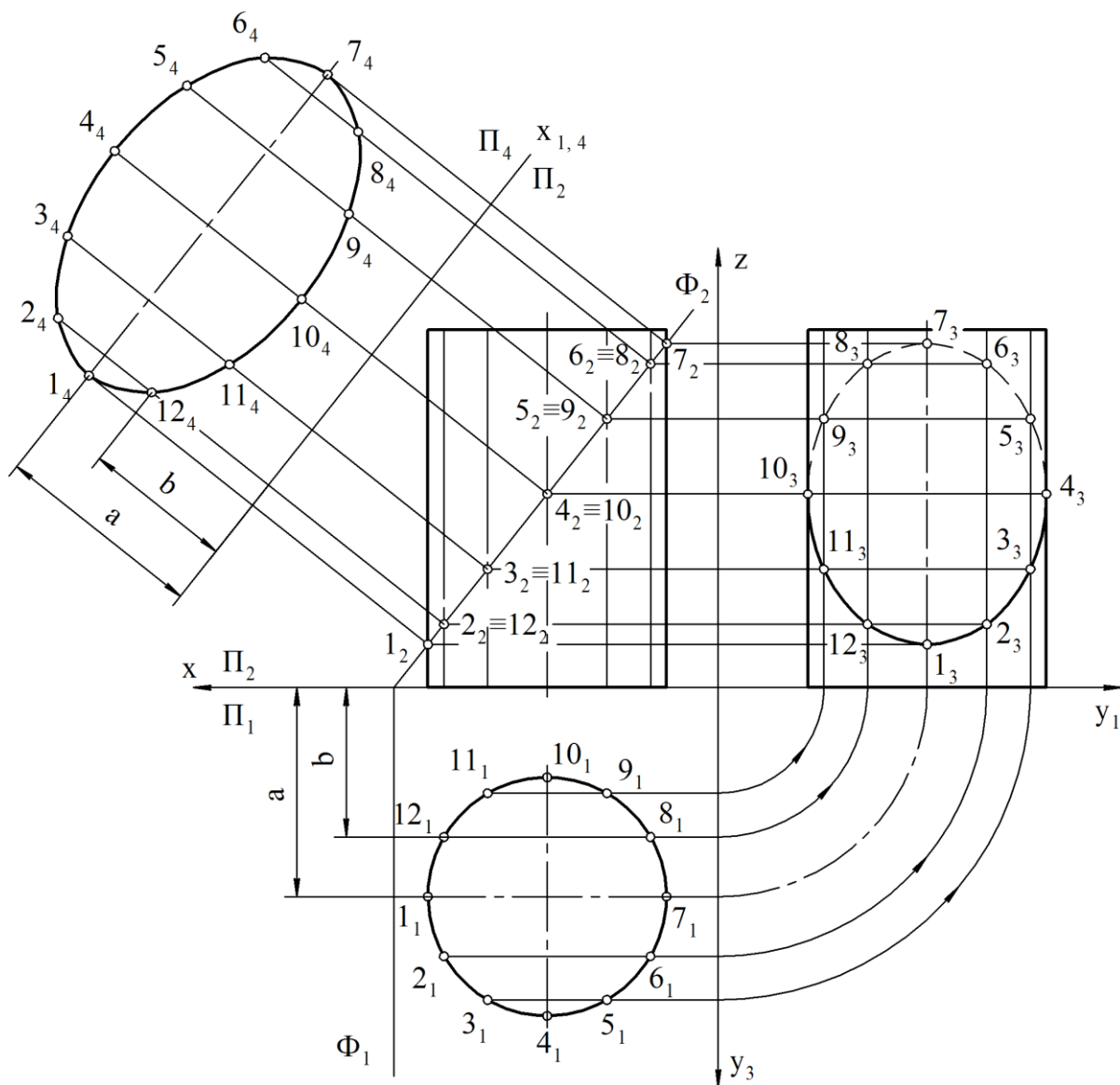


Рис. 7.5

Так как секущая плоскость расположена под углом к оси цилиндра, то она пересекает поверхность цилиндра по эллипсу.

Фронтальная проекция фигуры сечения совпадает с фронтальным следом  $\Phi_2$  плоскости  $\Phi$ . Горизонтальная проекция этой фигуры совпадает с горизонтальной проекцией основания цилиндра.

Профильная проекция фигуры сечения представляет собой эллипс. Большая ось эллипса на фронтальную плоскость проецируется в натуральную величину. Малая ось равна диаметру цилиндра и проецируется в натуральную величину на горизонтальную и профильную плоскости проекций.

Строят профильные проекции  $1_3$   $7_3$  большой и  $4_3$   $10_3$  малой оси эллипса. Зная большую и малую оси эллипса, можно построить профильную проекцию фигуры сечения. Промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения, также легко найти по линиям проекционной связи. Натуральная величина фигуры сечения построена способом замены плоскостей проекций. Новая ось проекций  $x_{1,4}$  может быть проведена параллельно следу  $\Phi_2$  на произвольном расстоянии. От оси  $x_{1,4}$  откладывают длину отрезка  $a$  и строят натуральную величину натуральную величину большой оси эллипса. Промежуточные точки фигуры сечения можно также найти с помощью линий проекционной связи, как показано на рис. 7.5.

На рис. 7.6 показано построение проекций фигуры сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения  $\Phi$ , заданной треугольником ABC.

Так как цилиндр прямой, горизонтальные проекции фигуры сечения и самого цилиндра будут совпадать. Как отмечалось выше, в сечении будет получаться эллипс. Для нахождения точек, ограничивающих большую ось эллипса (нижней и высшей), необходимо в плоскости треугольника ABC построить горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ), т.к. большая ось совпадает с линией ската плоскости. Затем через ось цилиндра перпендикулярно  $h_1$  проводим линию ската плоскости и заключаем ее в горизонтально-проецирующую плоскость  $\Gamma$  ( $\Gamma_1$ ). Плоскость  $\Gamma$  пересечет плоскость треугольника ABC по линии 23 ( $2_13_1, 2_23_2$ ), а цилиндр – по прямоугольнику. Точки, общие для линии пересечения плоскостей и сечения цилиндра плоскостью  $\Gamma$  – D и E ( $D_1D_2, E_1E_2$ ) – и будут искомыми. Точки, ограничивающие малую ось эллипса – M и N – определим, проведя через ось цилиндра линию перпендикулярно горизонтальной проекции большой оси –  $4_15_1$  – и заключая ее в плоскость  $\Delta$ . Дальнейшие построения аналогичны приведенным выше. Точки, лежащие на крайних образующих и определяющие границы видимости – K и L ( $K_1L_1, K_2L_2$ ) – определим при помощи фронтальной плоскости уровня  $\Sigma$  ( $\Sigma_1$ ), а ближнюю и дальнюю точки линии сечения Q и R ( $Q_1R_1, Q_2R_2$ ) – с помощью плоскостей  $\Theta$  и  $\lambda$ , проведя их касательно к цилиндру через ближнюю и дальнюю образующие. Промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения R и G ( $R_1G_1, R_2G_2$ ), определены с помощью горизонтальной плоскости уровня T ( $T_2$ ).

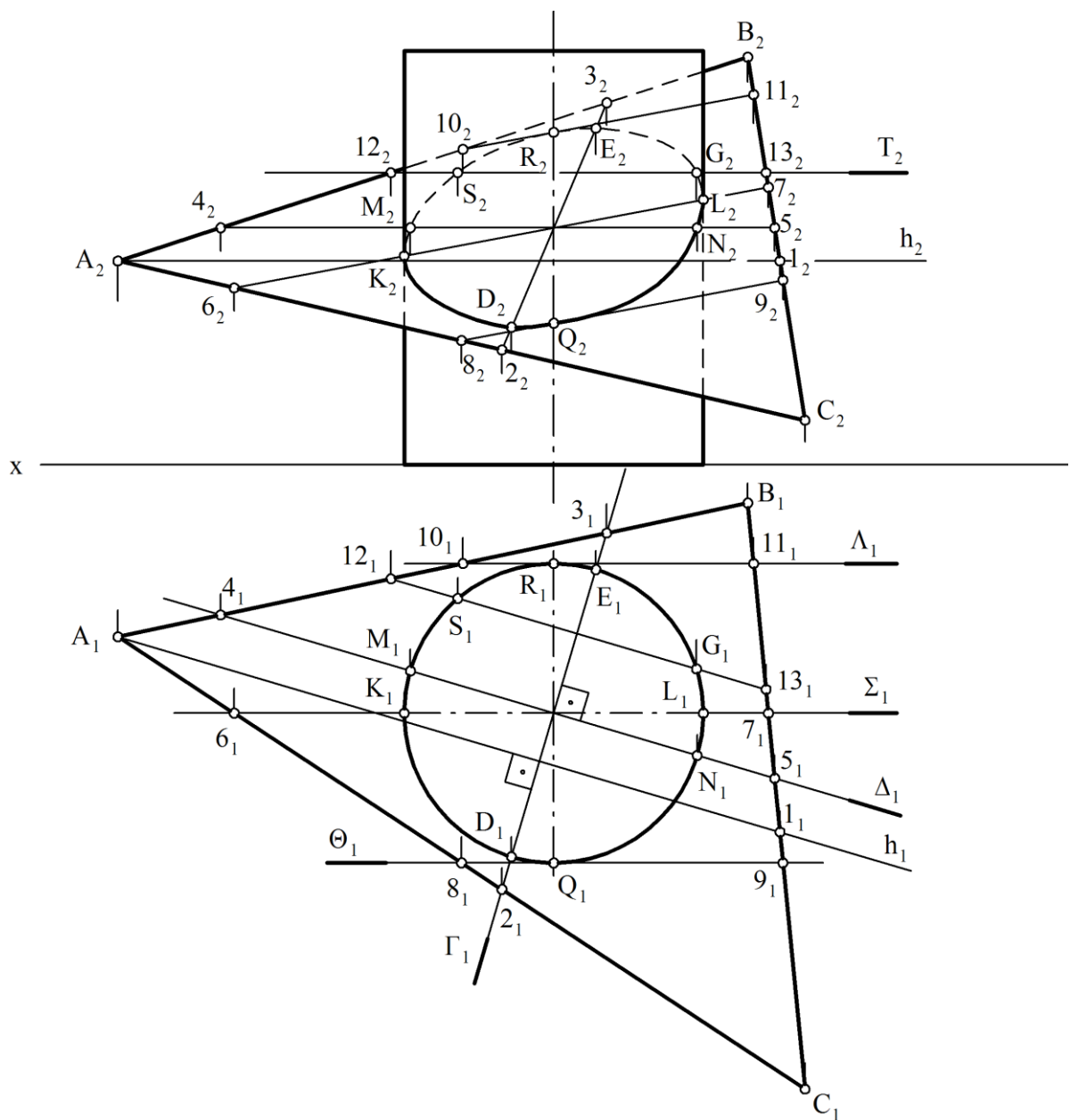


Рис. 7.6

В пересечении кругового конуса плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получиться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения конуса (рис. 7.7, а); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса под углом, отличным от прямого и пересекает все образующие конуса (рис. 7.7, б); гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса (рис. 7.7, в); парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей конуса (рис. 7.7, г); треугольник, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 7.7, д).

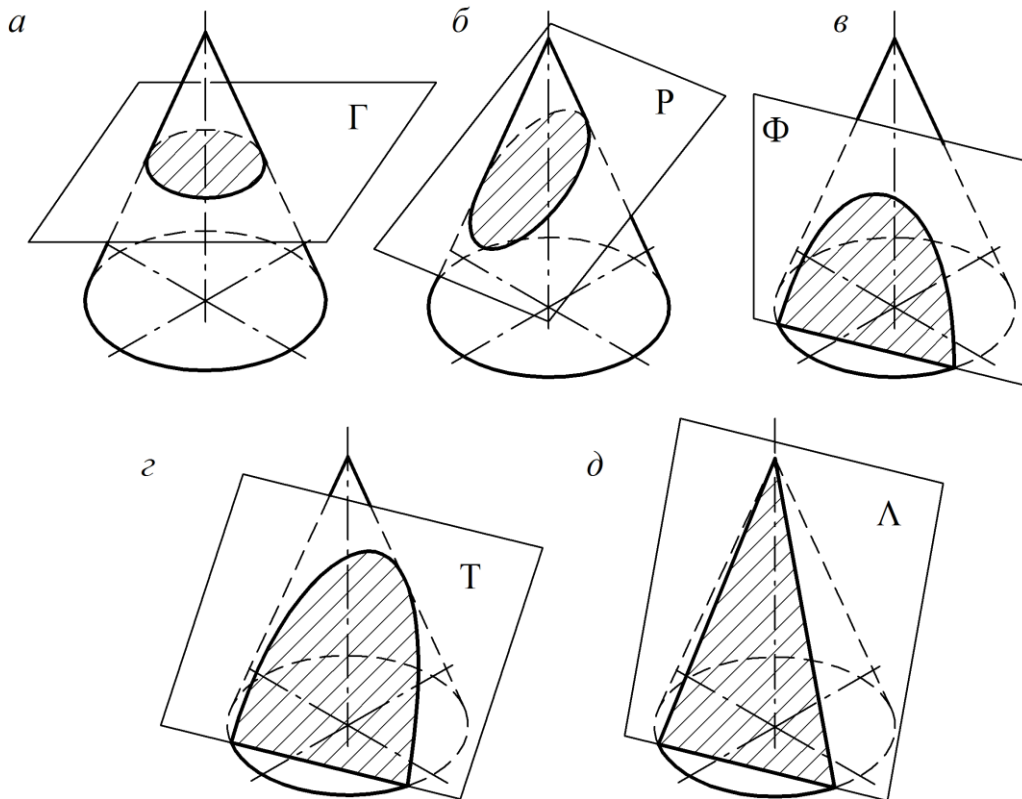


Рис. 7.7

Проекция фигуры сечения конуса плоскостью можно построить аналогично проекциям фигуры сечения пирамиды плоскостью (в конус вписывается многогранная пирамида, рис. 7.8).

Построение линии пересечения плоскости с конической поверхностью выполняется в следующем порядке. Основание конуса делится на равные части, в нашем примере 12, проводятся горизонтальные проекции  $S_{11_1}, S_{12_1}, \dots, S_{112_1}$  образующих и строятся их фронтальные и профильные проекции. На фронтальной проекции отмечаются фронтальные проекции точек пересечения построенных образующих на видимой поверхности конуса с секущей плоскостью  $\Phi$ :  $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2$ , а также крайних точек  $F_2$  и  $G_2$ . Горизонтальные проекции строятся в проекционной связи на соответствующих проекциях образующих. На профильную проекцию точки переносятся также по линиям связи. Горизонтальная проекция точки  $C_1$  строится после того, как она построена на профильной проекции.

На фронтальной проекции большая ось эллипса  $F_2G_2$  – линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости с конусом – проецируется в натуральную величину. Малая ось  $MN$  эллипса

перпендикулярна большой и проецируется в точку  $M_2 = N_2$  в середине фронтальной проекции  $F_2G_2$  большой оси.

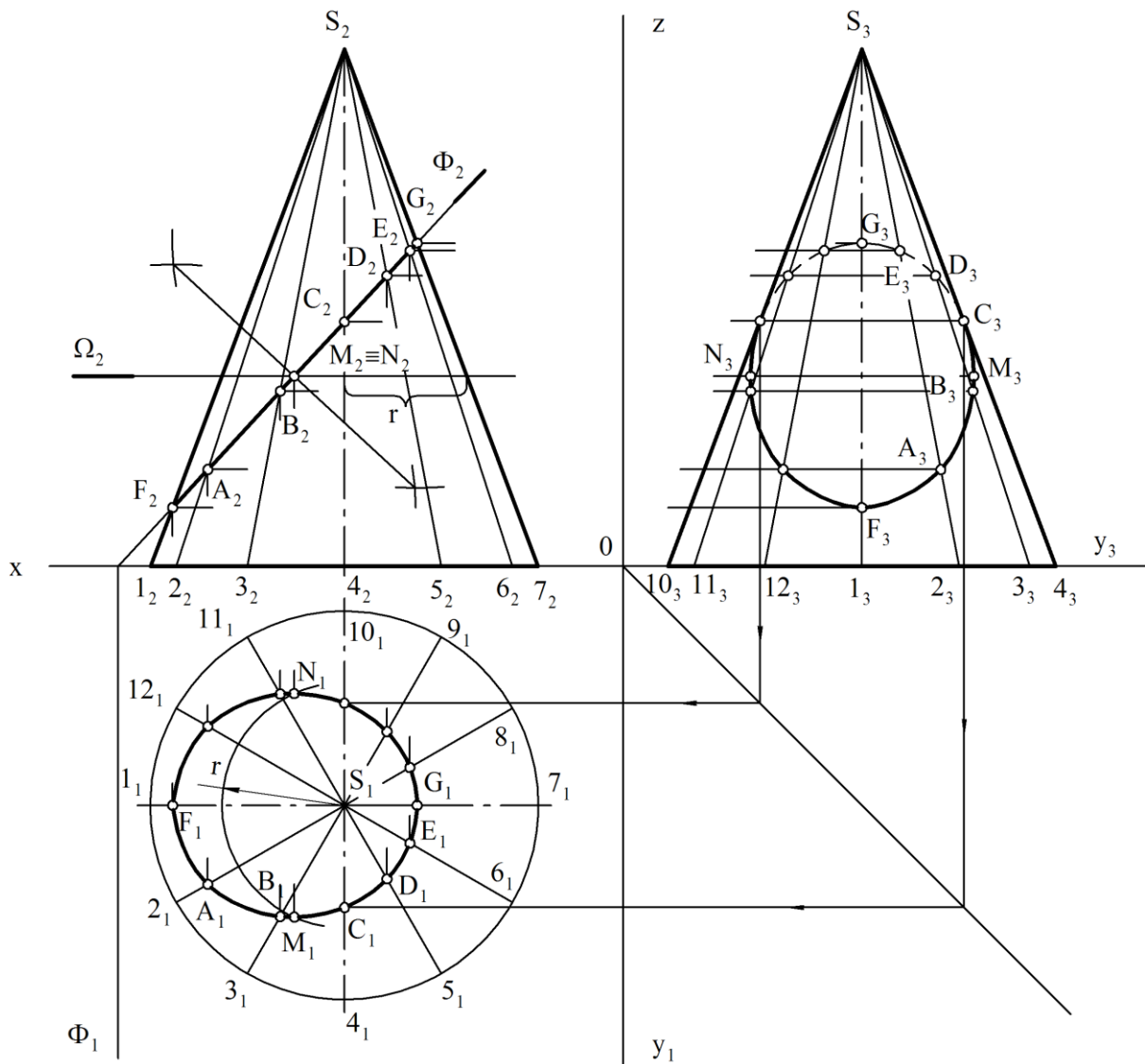


Рис. 7.8

Построение горизонтальной проекции малой оси эллипса выполнено с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\Omega$  ( $\Omega 2$ ), проведенной через малую ось эллипса. Плоскость  $\Omega$  пересекла конус по окружности радиуса  $r$ , точки  $M_2$  и  $N_2$  по линиям связи перенесены на горизонтальную проекцию окружности.

На рис. 7.9 показано построение сечения конуса плоскостью общего положения, заданной следами.

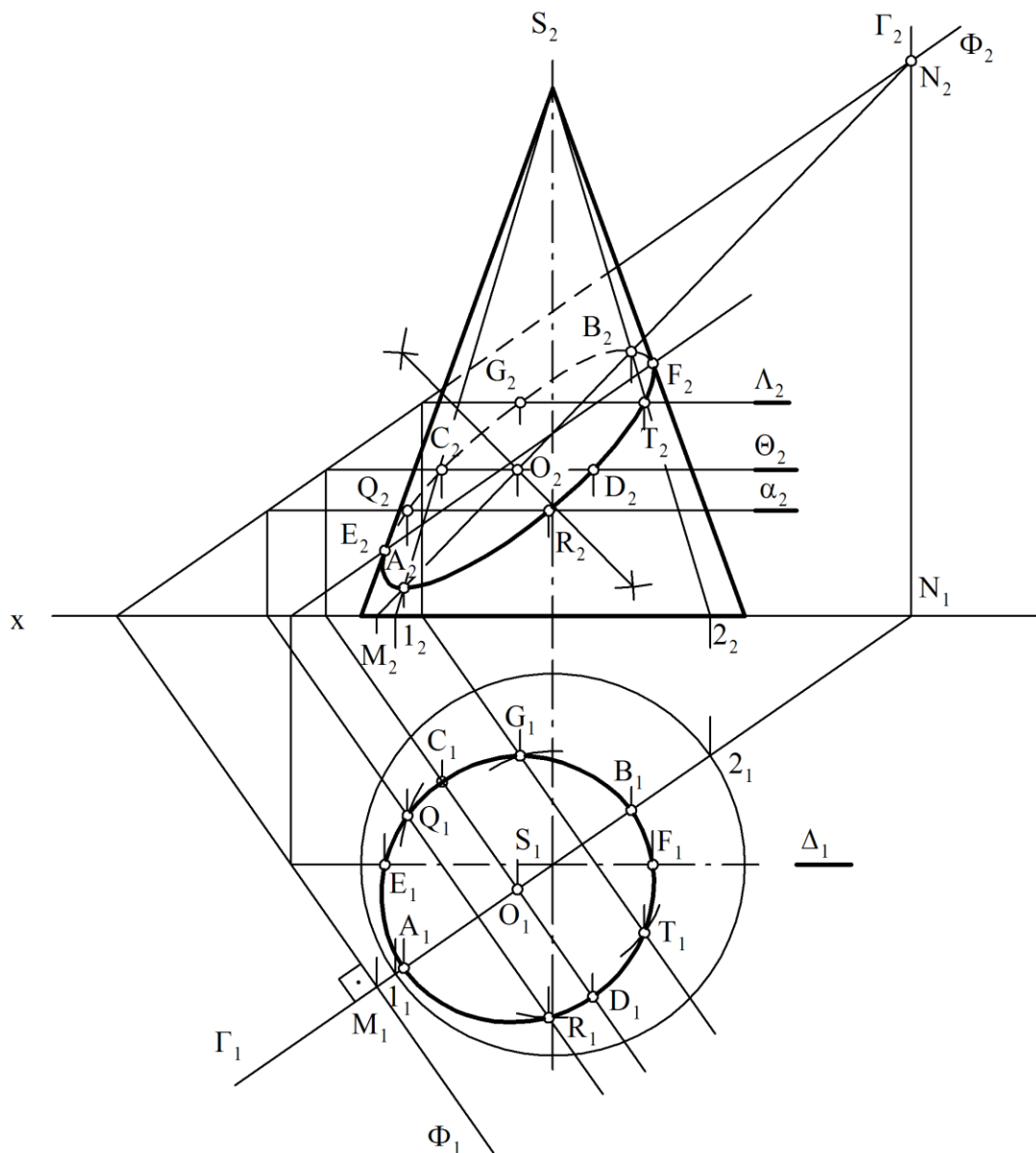


Рис. 7.9

Построение проекций сечения начато с нахождения точек, ограничивающих большую ось эллипса (высшая и низшая точки сечения). Для этого проведена вспомогательная секущая плоскость  $\Gamma$ , горизонтально-проецирующая, перпендикулярная следу  $\Phi_1$  и проходящая через ось конуса. Плоскость  $\Gamma$  пересекает конус по образующим  $S_1$  ( $S_1I_1, S_2I_2$ ) и  $S_2$  ( $S_1I_2, S_2I_1$ ), а плоскость  $\Phi$  – по линии  $MN$  ( $M_1N_1, M_2N_2$ ). Точки  $A$  и  $B$ , получающиеся в пересечении образующих  $S_1$  и  $S_2$  с прямой  $MN$ , будут искомыми точками. Отрезок  $AB$  является большой осью эллипса, получающегося при пересечении данного конуса плоскостью  $\Phi$ . Проекция

$A_1B_1$  является большой осью эллипса – горизонтальной проекции фигуры сечения. Разделив  $AB$  пополам, получим положение малой оси эллипса – точку  $O$  ( $O_1, O_2$ ). Точки  $C$  и  $D$  ( $C_1D_1, C_2D_2$ ), ограничивающие малую ось эллипса, определим, воспользовавшись горизонтальной плоскостью уровня  $\Theta$ , проведенной через точку  $O$ . Она пересекает поверхность конуса по окружности, а плоскость  $\Phi$  – по горизонтали. Точки на пересечении этих линий и будут искомыми.

Точки, лежащие на очерке фронтальной проекции конуса и определяющие границы видимости линии пересечения, получены при помощи вспомогательной секущей плоскости  $\Delta$ , проведенной через ось конуса параллельно  $\Pi_2$ . Плоскость  $\Delta$  пересекает плоскость  $\Phi$  по фронтале, а конус – по двум образующим. Точки  $E$  и  $F$ , получающиеся при пересечении фронтали с образующими, принадлежат искомой линии пересечения конуса с плоскостью  $\Phi$ .

Промежуточные точки линии пересечения удобно построить, используя горизонтальные секущие плоскости, аналогично построению точек, ограничивающих малую ось эллипса.

Задачу можно решить, используя метод замены плоскостей проекций, с помощью которого можно привести условие к виду, приведенному на рис. 7.8.

### **7.3 Пересечение прямой линии с поверхностями цилиндра и конуса**

Точки встречи прямой  $\ell$  с поверхностью прямого кругового цилиндра, имеющего вертикальную ось (рис. 7.10), определяют следующим образом.

Горизонтальная проекция цилиндрической поверхности представляет собой окружность, поэтому горизонтальные проекции всех точек, расположенных на цилиндрической поверхности, в том числе и двух искомых точек встречи, будут расположены на этой же окружности.

Фронтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  искомых точек встречи определяют проведением через точки  $A_1$  и  $B_1$  вертикальных линий связи до пересечения с фронтальной проекцией  $\ell_2$  прямой  $\ell$ .

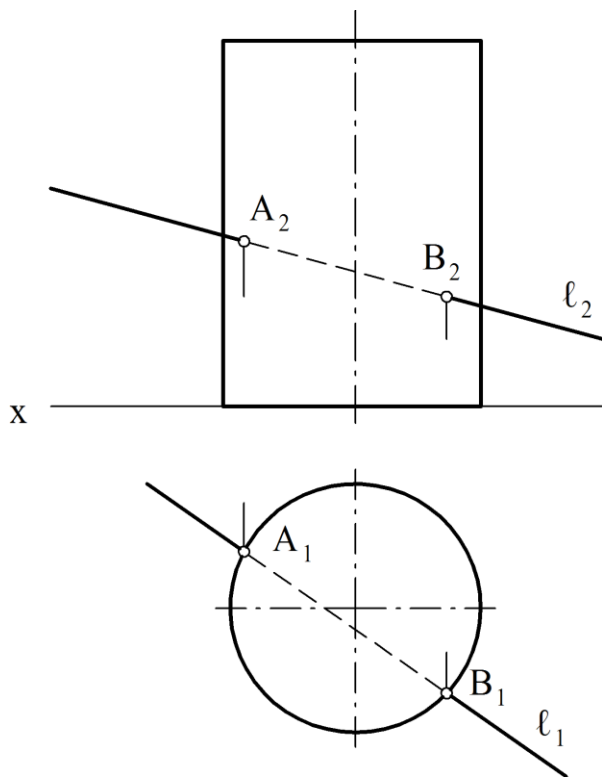


Рис. 7.10

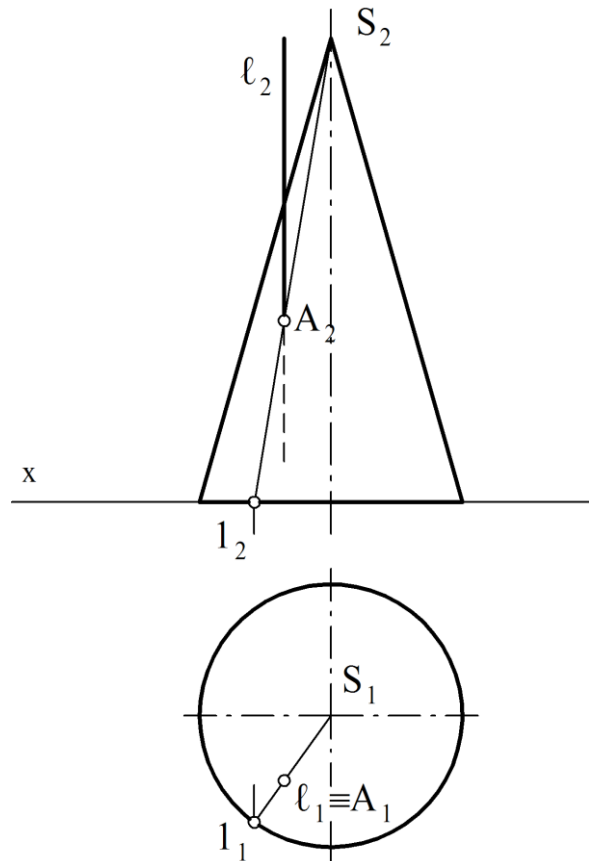


Рис. 7.11

На рис. 7.11 построена точка пересечения горизонтально-проецирующей прямой с поверхностью кругового конуса. В этом случае горизонтальная проекция  $A_1$  искомой точки совпадает с горизонтальной проекцией  $l_1$  данной прямой. Фронтальная проекция точки  $A$  ( $A_2$ ) определяется с помощью образующей  $S_1$  конуса.

Для определения точек встречи горизонтальной прямой с поверхностью конуса (рис. 7.12) через данную прямую проведем горизонтальную плоскость уровня  $\Phi$ , которая пересечет конус по окружности радиуса  $r$ . Общие точки для проекции сечения и проекции прямой и будут искомыми. Фронтальные проекции точек находим по линии связи.



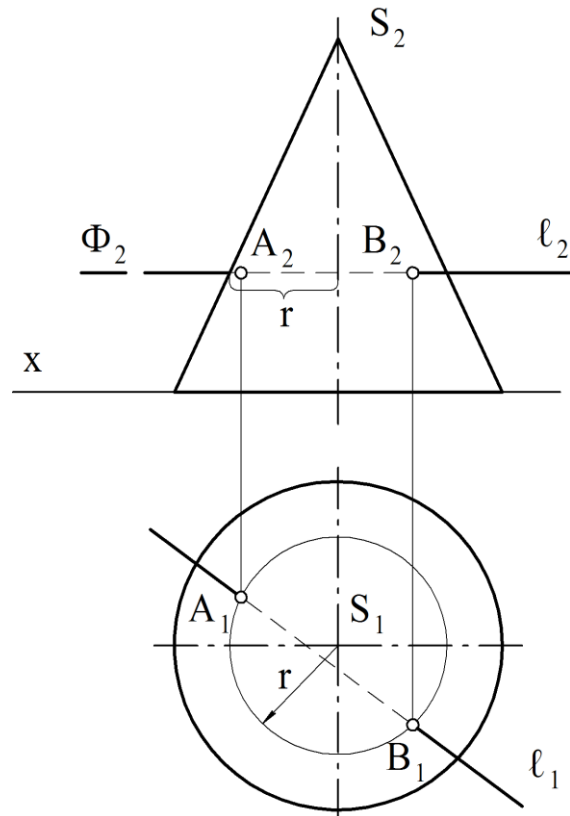


Рис. 7.12

#### 7.4 Развертка цилиндра и конуса

Цилиндрическая и коническая поверхности относятся к развертываемым поверхностям.

Развертка поверхности прямого кругового цилиндра (см. рис. 7.13) состоит из прямоугольника, высота которого равна высоте цилиндра, а ширина – длине окружности, равной окружности оснований цилиндра.

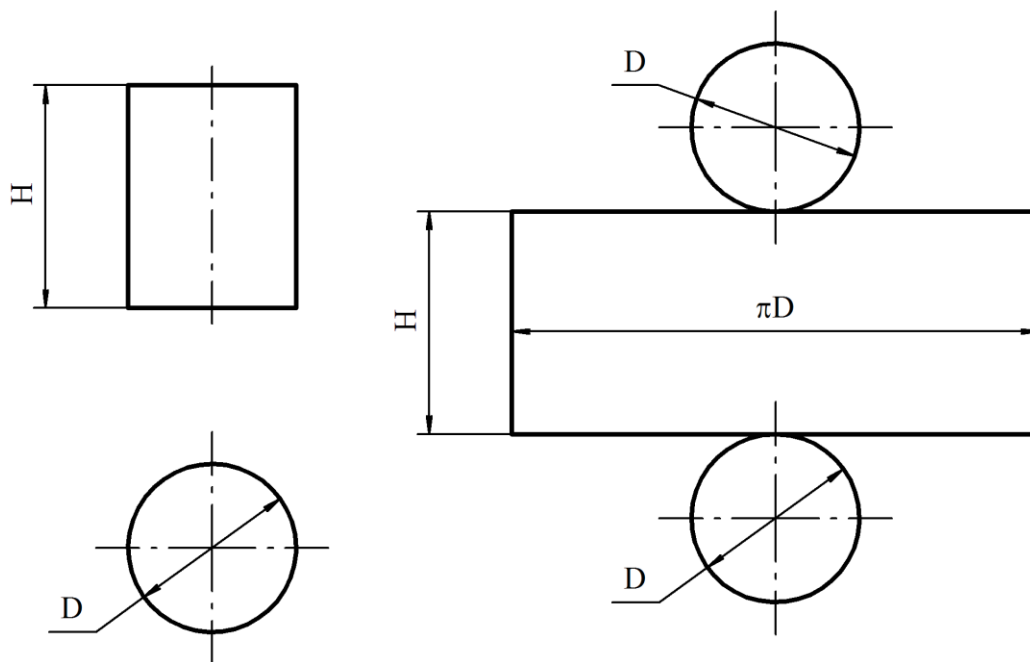


Рис. 7.13

Развертка поверхности прямого кругового конуса (см. рис. 7.14) представляет собой сектор, радиус которого равен длине образующей конуса.

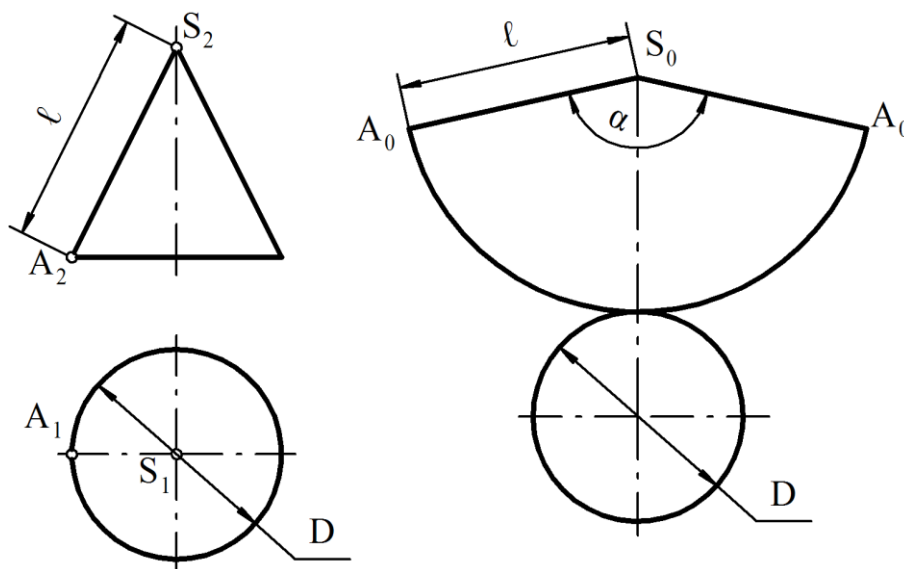


Рис. 7.14

$$\text{Угол } \alpha = 180^\circ D/l,$$

где:  $D$  – диаметр окружности основания,  $l$  – длина образующей конуса.

## ЛЕКЦИЯ 8. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 8.1 Способ вспомогательных секущих плоскостей

Линия пересечения двух поверхностей есть линия, принадлежащая обеим поверхностям. Следовательно, для построения линии пересечения поверхностей необходимо найти общие точки для данных поверхностей.

Линию пересечения поверхностей можно построить, применяя вспомогательные секущие плоскости (посредники), пересекающие данные поверхности по каким-либо линиям. Взяв достаточное количество вспомогательных поверхностей, можно найти достаточное количество точек искомой линии.

Сформулируем общее правило построения линии пересечения поверхностей:

- выбираем вид вспомогательных поверхностей;
- строим линии пересечения вспомогательных поверхностей с заданными поверхностями;
- находим точки пересечения построенных линий и соединяем их между собой.

В качестве вспомогательных поверхностей выбирают такие, линии пересечения которых с заданными поверхностями проецируются в графически простые линии – прямые, окружности, т.к. при этих условиях задача решается проще и точнее. В качестве вспомогательных поверхностей можно использовать плоскости или сферы.

Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения сферы с конусом вращения (рис. 8.1). При построении точек линии пересечения поверхности вначале находят те точки, которые называют характерными или опорными. Основания заданных поверхностей, представленных окружностями, принадлежат горизонтальной плоскости проекций  $P_1$ . В пересечении окружностей основания получаем опорные точки  $1_1$  и  $1'_1$ . По линии связи переносим эти точки на фронтальную проекцию.

Проведенная фронтальная плоскость уровня  $\Delta$  ( $\Delta_1$ ), проходящая через ось конической поверхности и центр сферы, пересекает коническую поверхность по контурным образующим SA и SB, а сферу – по окружности, совпадающей с проекцией главного меридиана. В пересечении контурной образующей SB и главного меридиана получим опорную точку 2 ( $2_1, 2_2$ ) – наивысшую точку линии пересечения.

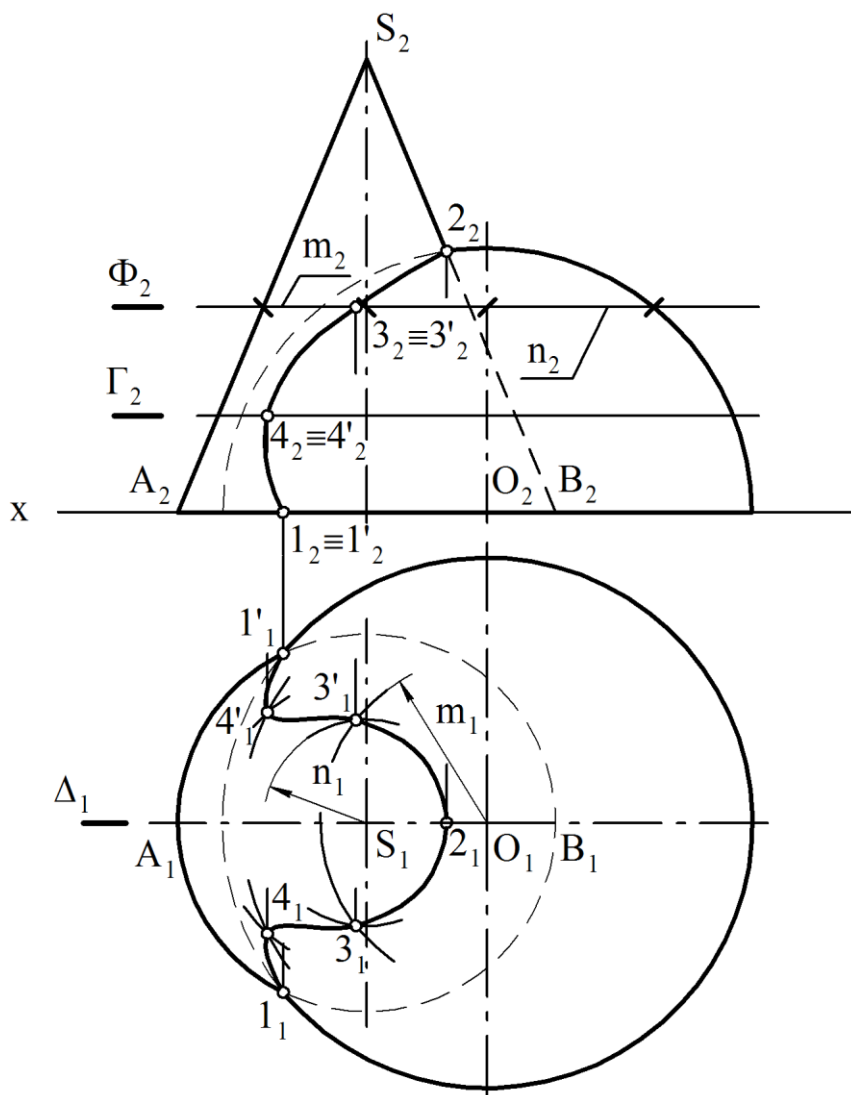


Рис. 8.1

Промежуточные точки найдем при помощи горизонтальных плоскостей уровня  $\Phi$  и  $\Gamma$ , которые пересекают заданные поверхности по окружностям. При взаимном пересечении этих окружностей получают промежуточные точки искомой линии. Вначале находим горизонтальные проекции  $3_1$  и  $3'_1$  точек  $3$  и  $3'$  на пересечении окружностей  $m_1$  и  $n_1$ , получающихся от пересечения плоскостью  $\Phi$  конуса и сферы. Затем, используя линии связи и принадлежность этих точек плоскости  $\Phi$ , находим их фронтальные проекции  $3_2$  и  $3'_2$ .

Число вспомогательных секущих плоскостей, а, следовательно, и промежуточных точек линии пересечения зависит от требуемой точности решения.

Относительно горизонтальной плоскости проекций видимой является заданная половина сферы и коническая боковая поверхность. Следовательно, видима и вся горизонтальная проекция линии пересечения этих поверхностей.

Относительно фронтальной плоскости проекций видимой является часть 1, 4, 3, 2, фронтальная проекция линии пересечения, расположенная на видимых (передних) участках заданных поверхностей, а часть 1', 4', 3', 2' невидима.

Заданные поверхности симметричны относительно фронтальной плоскости уровня  $\Delta$ , проходящей через оси их вращения, следовательно, симметрична и линия их пересечения относительно этой же плоскости. Значит, на фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  проекции видимой и невидимой частей линии пересечения совпадут и будут кривой второго порядка.

На чертеже одноименные проекции точек  $1_1, 4_1, 3_1, 2_1, 3'_1, 4'_1, 1'_1$  и  $1_2, 1'_2, 4_2, 4'_2, 3_2, 3'_2$  и  $2_2$  соединяем плавной сплошной основной линией и получаем искомые проекции линии пересечения.

Как отмечалось выше, для нахождения промежуточных точек, принадлежащих линии пересечения, были использованы горизонтальные плоскости уровня.

Фронтальные плоскости уровня, кроме проходящей через ось конической поверхности плоскости  $\Delta$  ( $\Delta_1$ ), пересекают эту плоскость по сложным кривым (гиперболам). Значит, их не следует применять в качестве вспомогательных секущих поверхностей.

Проецирующие плоскости будут давать в пересечении сложные для построения на чертеже линии, поэтому их также нецелесообразно применять в качестве вспомогательных секущих плоскостей. Например, горизонтально-проецирующие плоскости, проходящие через ось заданной конической поверхности, будут пересекать ее по образующим, а сферу – по окружностям. Но эти окружности будут проецироваться на плоскость  $\Pi_2$  в эллипсы.

После сравнения всех возможных вариантов в качестве вспомогательных секущих плоскостей были выбраны горизонтальные плоскости уровня, т.к. их применение дает наиболее простые графические построения на чертеже.

На рис. 8.2 приведено построение линии пересечения кругового конуса с вертикальной осью с фронтально-проецирующим цилиндром.

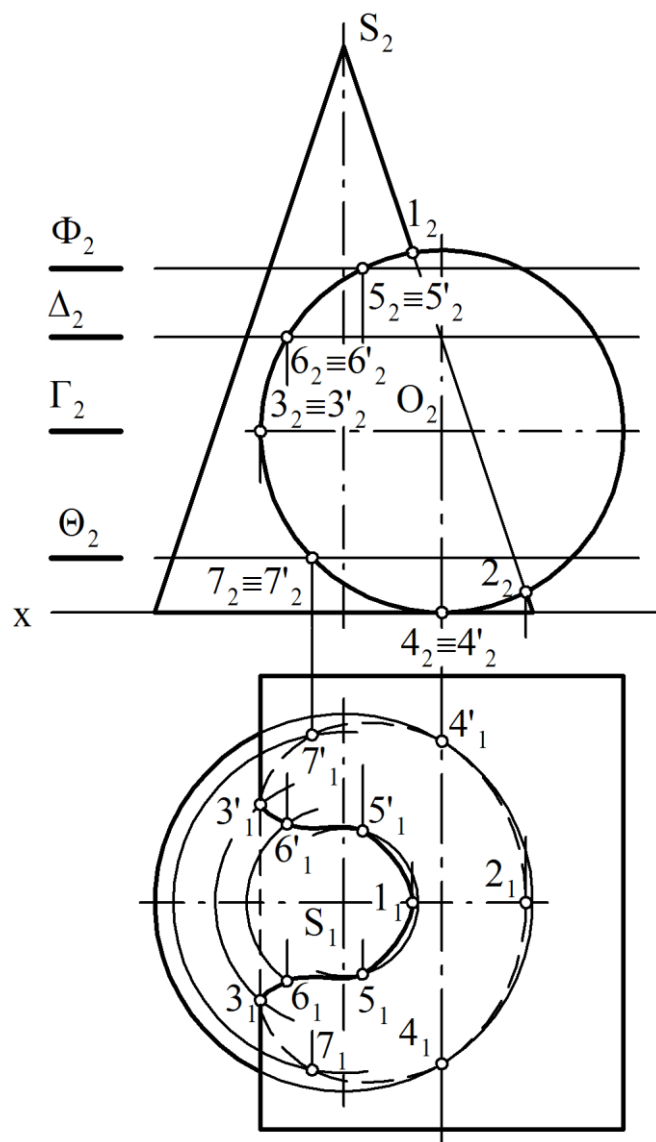


Рис. 8.2

Характерные точки 1, 2, 4, 4' ( $1_2, 2_2, 4_2, 4'_2$ ) определены непосредственно на эюре. Характерные точки 3, 3', находящиеся на контурной образующей цилиндра и определяющие границу видимости линии пересечения, а также точки 5, 5', 6, 6', 7, 7' определены с помощью вспомогательных секущих горизонтальных плоскостей уровня  $\Gamma, \Phi, \Delta, \Theta$ , которые пересекают конус вращения по окружности, а цилиндр – по прямолинейным образующим. На пересечении горизонтальных проекций полученных окружностей и образующих получают общие точки, принадлежащие искомой линии пересечения. На плоскость проекций  $\Pi_2$  линия пересечения проецируется на основание цилиндра.

На рис. 8.3 приведено построение линии пересечения кругового цилиндра с вертикальной осью и сферы.

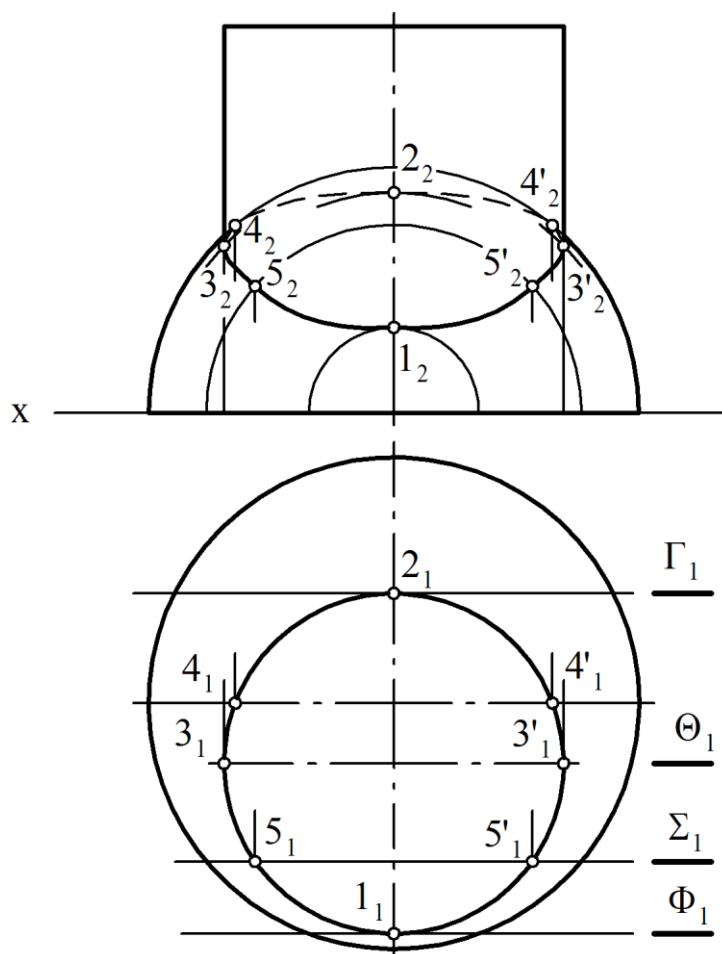


Рис. 8.3

Ход решения задачи аналогичен описанному выше. В качестве вспомогательных секущих плоскостей использованы фронтальные плоскости уровня, которые пересекают сферу по окружностям, а цилиндр – по прямолинейным образующим. Опорные точки  $4, 4'$  ( $4_1, 4'_1, 4_2, 4'_2$ ), лежащие на главном меридиане сферы, на фронтальной проекции построены при помощи линий связи.

Способом вспомогательных секущих плоскостей можно воспользоваться для построения линии взаимного пересечения многогранной поверхности с поверхностью вращения.

На рис. 8.4 приведено построение линии пересечения трехгранной призмы и конуса.

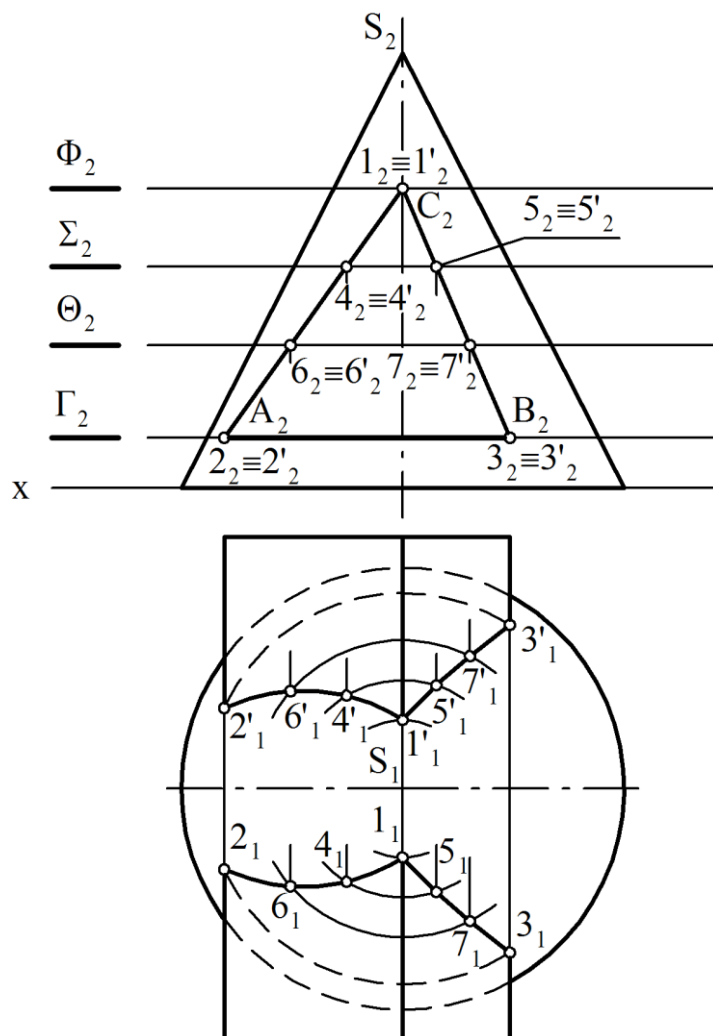


Рис. 10.4

В качестве вспомогательных секущих плоскостей приняты горизонтальные плоскости уровня. Каждая секущая плоскость пересекает конус по окружности, радиус которой равен расстоянию от оси до образующей. Строим горизонтальные проекции окружностей и на их пересечении с проекциями ребер призмы находим проекции  $1_1, 1'_1, 2_1, 2'_1, 3_1, 3'_1$  и  $1_2, 1'_2, 2_2, 2'_2, 3_2, 3'_2$  опорных точек. Промежуточные точки находим с помощью плоскостей  $\Sigma$  и  $\Theta$ . Плоскости  $\Sigma$  и  $\Theta$  пересекают грани призмы по прямым линиям. Их горизонтальные проекции при пересечении с соответствующей окружностью (проекцией линии пересечения плоскостей  $\Sigma$  и  $\Theta$  с конусом) дают проекции промежуточных точек  $4_1, 4'_1, 5_1, 5'_1, 6_1, 6'_1, 7_1, 7'_1$  и  $4_2, 4'_2, 5_2, 5'_2, 6_2, 6'_2, 7_2, 7'_2$ . Как видим на рис. 8.4, фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией основания призмы.

Линией пересечения грани АВ призмы с поверхностью конуса являются ветви окружности, т.к. эта грань параллельна основанию конуса.



## ЛЕКЦИЯ 9. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (продолжение)

9.1. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка.

9.2. Способ сфер.

### 9.1. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

При взаимном пересечении поверхностей второго порядка получается в некоторых случаях распадение линии пересечения на две плоские кривые второго порядка. Это бывает в тех случаях, когда обе пересекающиеся поверхности вращения (цилиндр и конус, два конуса и т.п.) описаны вокруг общей для них сферы. В примерах, приведенных на рис. 9.1, *а* и 9.1, *б*, пересечение происходит по эллипсам.

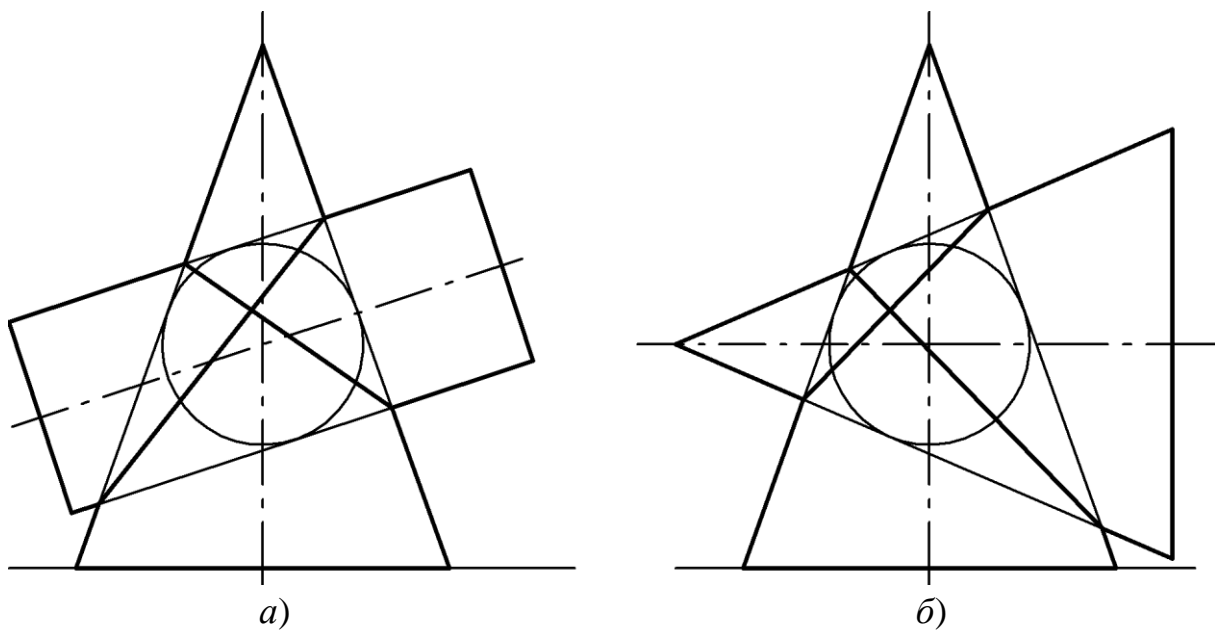


Рис. 9.1

На рис. 9.2 показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися осями. Из точки пересечения осей может быть проведена сфера, вписанная в оба цилиндра. Обе поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов.

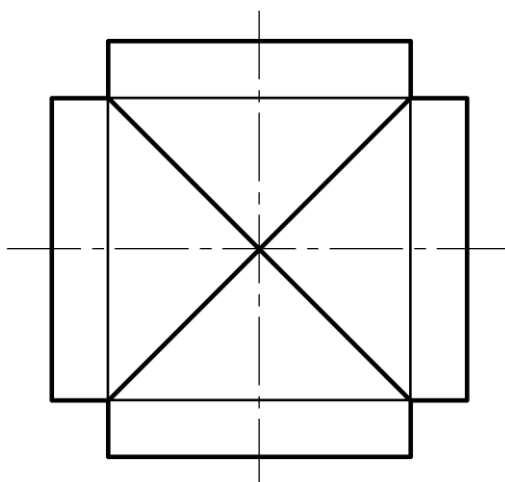


Рис. 9.2

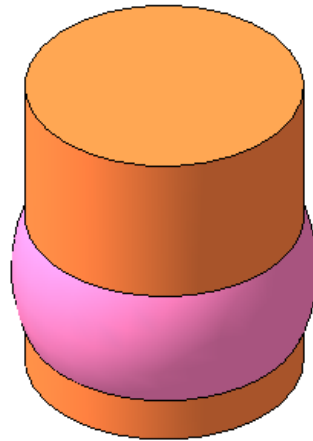
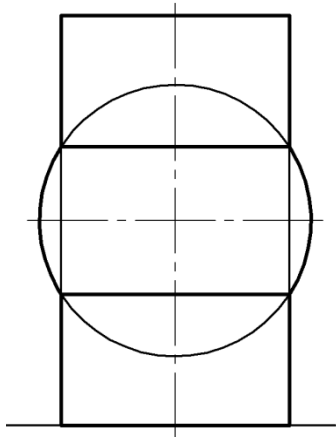
Изображенные на рис. 9.1 и 9.2 кривые пересечения поверхностей проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямолинейных отрезков, т.к. общая плоскость симметрии для каждой пары рассмотренных поверхностей расположена параллельно плоскости  $\Pi_2$ .

Указанные выше построения основаны на следующих положениях:

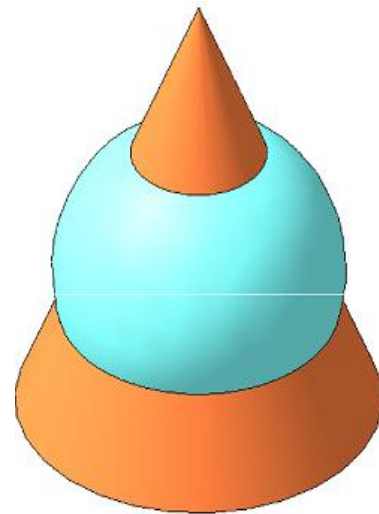
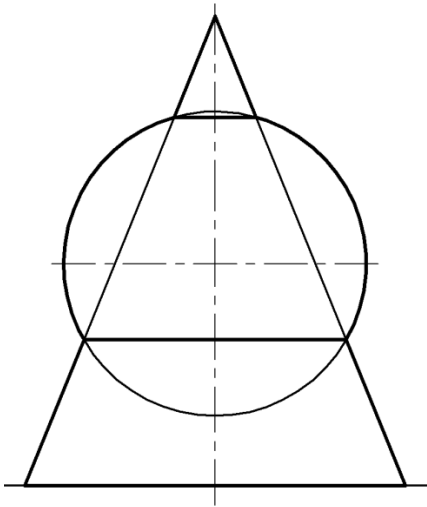
1) поверхности второго порядка, имеющие двойное соприкосновение, пересекаются между собой по двум кривым второго порядка, причем плоскости этих кривых проходят через прямую, определяемую точками прикосновения;

2) две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка (или в нее вписанные), пересекаются между собой по двум кривым второго порядка. Это положение известно под названием теоремы Монжа.

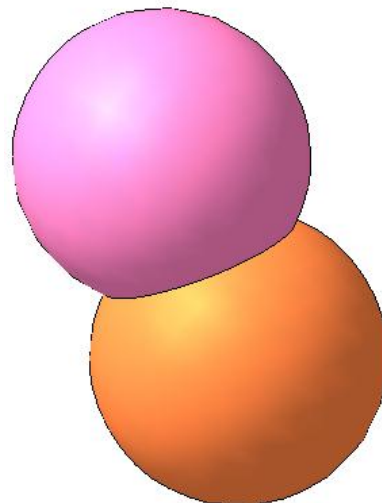
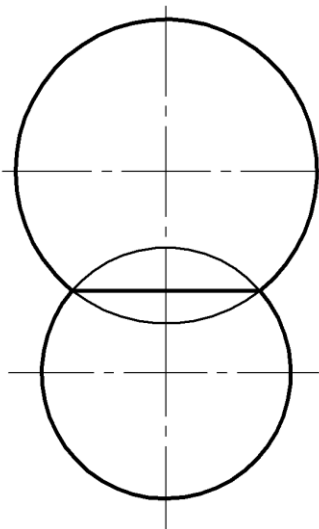
Соосные поверхности вращения (т.е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям. На рис. 9.3 даны три примера: а) цилиндр и сфера (см. рис. 9.3, а); б) конус и сфера (см. рис. 9.3, б); в) две сферы (см. рис. 9.3, в).



a)



б)



в)

Рис. 9.3

## 9.2. Способ сфер

С помощью вспомогательных сферических поверхностей удобно строить линии пересечения двух поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций.

При этом возможны два случая:

1) если оси поверхностей вращения пересекаются, то для построения линии пересечения этих поверхностей применяют семейство концентрических сфер;

2) если оси поверхностей вращения не пересекаются, то используют эксцентрические сферы.

План решения задачи способом концентрических сфер следующий:

1) принимая точку пересечения осей заданных поверхностей за центр, строим вспомогательные сферы – посредники;

2) определяем окружности, по которым пересекаются сферы-посредники с каждой из заданных поверхностей;

3) находим общие точки пересечения полученных окружностей.

Эти точки и принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

На рис. 9.4 построена линия пересечения двух конусов вращения, оси которых пересекаются, образуя общую фронтальную плоскость симметрии.

В данном случае применены вспомогательные сферы, проведенные из одного и того же центра – точки  $O$  ( $O_2$ ) пересечения осей конусов. Диапазон радиусов сфер определяется минимальным и максимальным радиусами. Минимальный радиус секущей сферы назначается из условия касания сферы одной и пересечения другой пересекающейся поверхности. Максимальным радиусом является отрезок прямой от центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерков пересекающихся поверхностей. Окружности, по которым сферы пересекают одновременно две поверхности, проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямолинейных отрезков.

Точки пересечения фронтальных проекций очерковых образующих  $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$  являются высшими и низшими точками линии пересечения. Точки  $5_2, 6_2$  на фронтальной проекции, наиболее близко расположенные к

оси вертикального конуса, определены с помощью сферы радиуса  $R_{min}$ , вписанной в этот конус. Промежуточные точки  $7_2, 8_2, 9_2$  получены при помощи сферы радиуса  $R$ , очерк которой на фронтальной проекции изобразится в виде окружности этого же радиуса. Сфера радиуса  $R$  пересечет горизонтальный конус по окружности диаметра  $AB$  и  $CD$ , а вертикально расположенный конус – по окружности  $EF$  и  $MN$ . В пересечении полученных проекций окружностей – отрезков  $A_2B_2$  и  $C_2D_2$  с  $E_2F_2$  и  $M_2N_2$  – получаем искомые точки  $7_2, 8_2, 9_2$  линии пересечения.

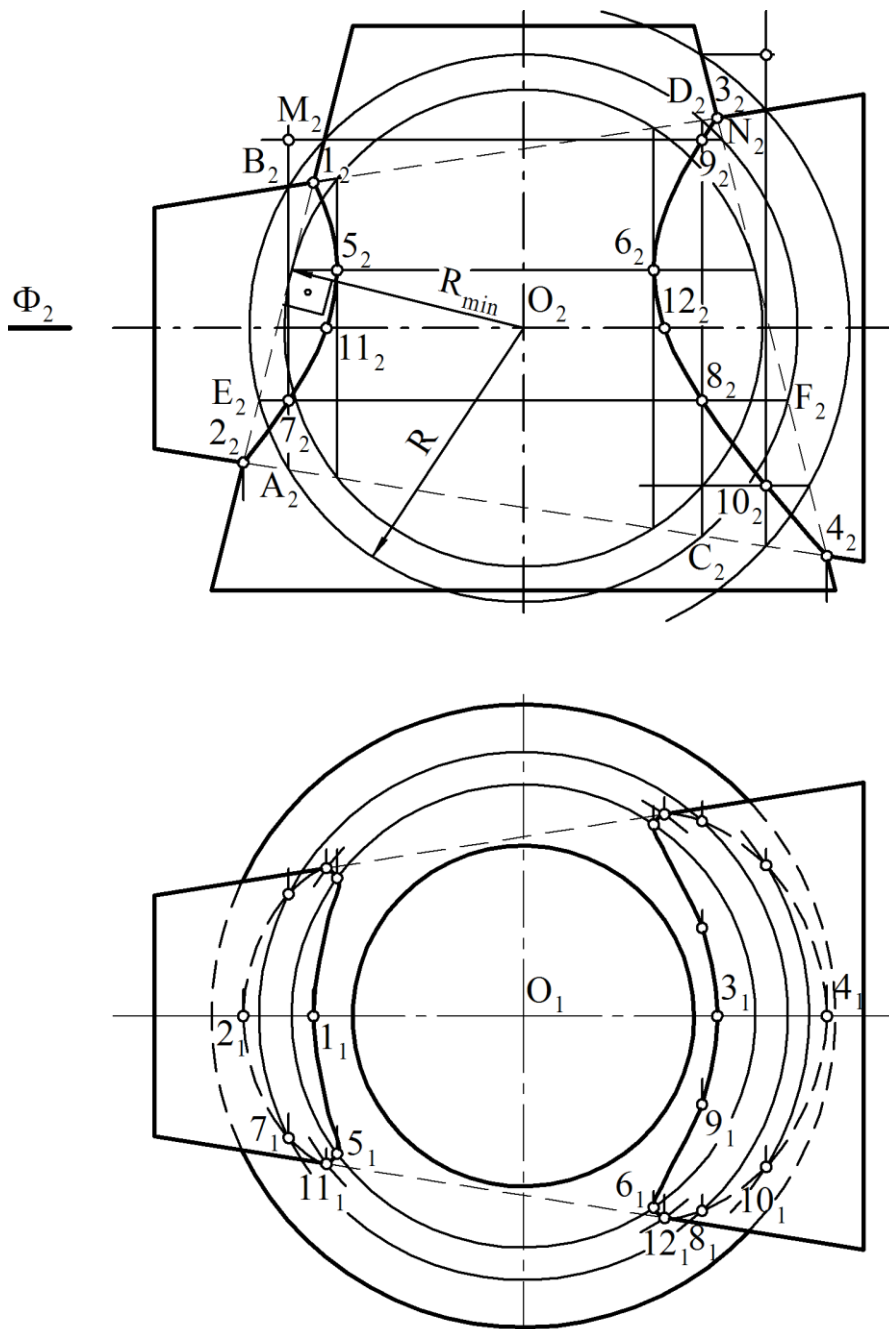


Рис. 9.4

Изменяя радиус  $R$  вспомогательной секущей сферы, можно получить последовательный ряд точек линии пересечения. Недостающие горизонтальные проекции точек линии пересечения определяют на соответствующих параллелях вертикального конуса. Точки  $1_{1_1}$  и  $1_{2_1}$ , в которых происходит разделение горизонтальной проекции линии пересечения на видимую и невидимую ветви, определены с помощью горизонтальной плоскости  $\Phi$ , проходящей через ось горизонтального конуса.

Пример построения линии пересечения двух поверхностей вращения способом эксцентрических сфер приведен на рис. 9.5 (открытый тор пересекается с конусом вращения).

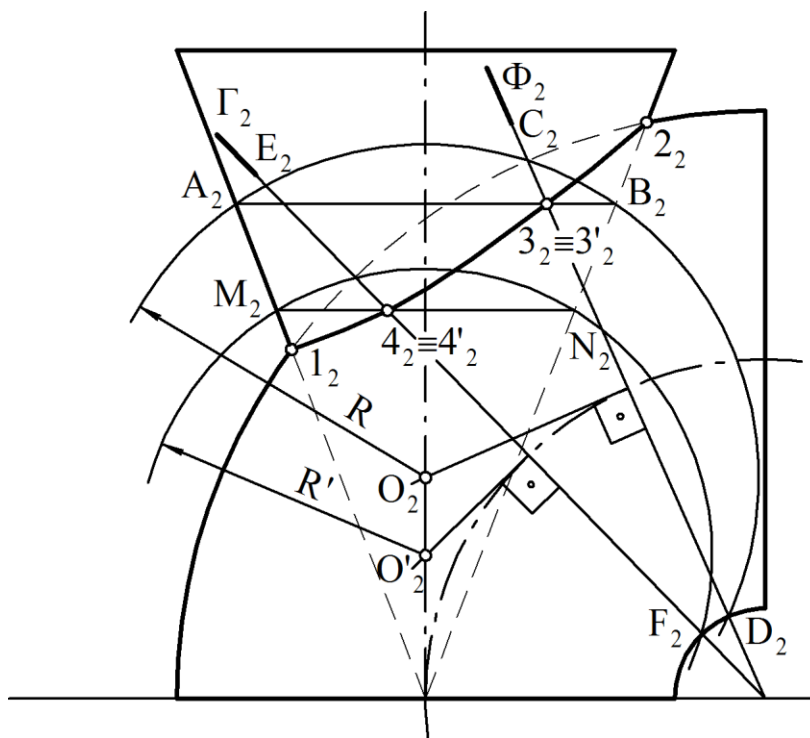


Рис. 9.5

Поверхности имеют одну общую плоскость симметрии. Оси пересекающихся поверхностей вращения между собой не пересекаются. Поверхности заданы фронтальными отрезками.

При построении линии пересечения поверхностей прежде всего определяем точки 1 и 2 пересечения очерковых образующих поверхностей. Затем через ось вращения тора проводим фронтально-проецирующую плоскость  $\Phi$ . Она пересекает тор по окружности. Центры сфер,

пересекающих тор по окружности, находятся на перпендикуляре, восстановленном в центре окружности к плоскости  $\Phi$ . Пересечение этого перпендикуляра с осью конуса вращения даст центр  $O$  ( $O_2$ ) вспомогательной секущей сферы с радиусом  $R$ . Такая сфера пересекает как тор, так и конус вращения по окружностям, фронтальные проекции которых – отрезки  $A_2B_2$  и  $C_2D_2$  прямых. Точки  $3_2$  и  $3'_2$  пересечения окружностей принадлежат фронтальной проекции линии пересечения поверхностей.

Аналогично определяют другие промежуточные точки линии пересечения поверхностей. Вспомогательные сферы имеют различные центры, находящиеся на оси конуса вращения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов В.Н. Начертательная геометрия. – Мн.: Выш. шк., 1977. – 360 с.
2. Начертательная геометрия / Под. ред. Н.Н. Крылова. – М.: Высш. шк., 1990. – 232 с.
3. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1981 – 258 с.
4. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии: Учеб. для вузов – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 136 с.
5. Тарасов Б.Ф., Дудкина Л.А., Немолотов С.О. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов. – СПб.: Лань, 2001. – 249 с.