Примеры решения типовых задач по разделам «Электростатика. Постоянный ток», «Электромагнетизм», «Электромагнитные колебания и волны» для самостоятельной подготовки к аудиторным проверочным тестам и контрольным аудиторным работам студентов заочного отделения всех технических специальностей

Электростатика

1. Закон Кулона. Поле точечных зарядов.

1. Три одинаковых положительных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл расположены по вершинам равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы взаимного отталкивания зарядов, находящихся в вершинах?

Дано: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл.

Найти: Q_4.

Решение. Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например Q_1, находился в равновесии. В соответствии с принципом суперпозиции на этот заряд действует каждый заряд независимо от остальных. Поэтому заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил будет равна нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ – силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3 и Q_4; $\vec{F}$ – равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$. Так как силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_4$ направлены по одной прямой (см. рис.), то векторное равенство (1) можно заменить скалярной сум-

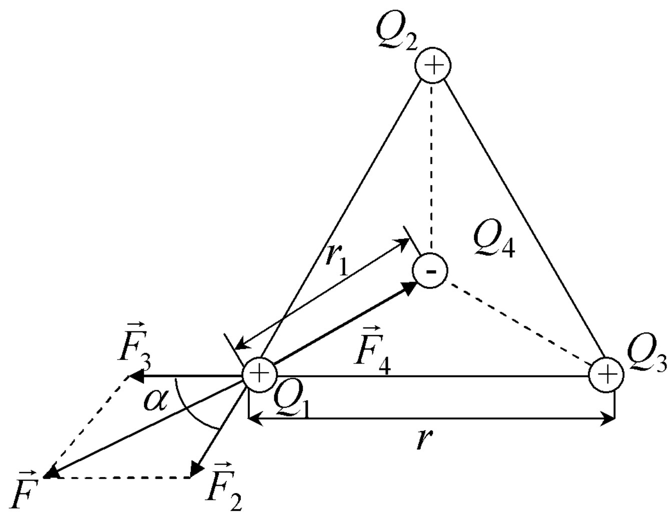


Рис.

мой:

$$F - F_4 = 0 \text{ или } F_4 = F.$$

Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_2 = F_3$, получим

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $Q_2 = Q_3 = Q_1$, найдем

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_4}{\varepsilon r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^2}{\varepsilon r_1^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}, \qquad (2)$$

откуда

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$Q_4 = \frac{Q_1}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \text{ нКл}.$$

Поскольку система находится в равновесии, заряды, находящиеся в двух других вершинах треугольника, будут также в равновесии. На заряд Q_4 действуют три силы, равнодействующая этих трех сил равна нулю. Поэтому заряд Q_4 также будет находиться в равновесии.

Ответ: $Q_4 = 0{,}58$ нКл

2. Четыре точечных одинаковых заряда $Q = 10$ нКл размещены по вершинам квадрата со стороной $b = 0{,}1$ м (рис. *а*). Заряды в вершинах 1 и 2 – положительные, а в вершинах 3 и 4 – отрицательные. Определить: 1) напряженность электрического поля в центре квадрата; 2) потенциал в той же точке поля.

Дано: $Q = 10$ нКл; $b = 0{,}1$ м.

Найти: E; φ.

Решение: 1. Напряженности электрического поля каждого из рассматриваемых зарядов в центре квадрата одинаковы и равны

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

где $r = b\frac{\sqrt{2}}{2}$. Направления векторов $\vec{E}_i$ (i = 1, 2, 3, 4) указаны на рис. Результирующий вектор $\vec{E}$ находим как векторную сумму этих векторов (в данном случае как диагональ квадрата со стороной $2E_i$) $E = 2E_i\sqrt{2}$.

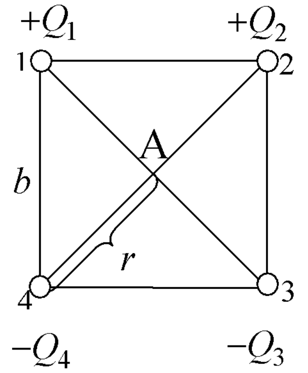
Таким образом,

$$E = 2\sqrt{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{\sqrt{2}Q}{\pi\varepsilon_0 b^2}.$$

Выполним вычисления:

$$E = \frac{\sqrt{2}\cdot 10\cdot 10^{-9}}{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}} = 51\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}.$$

а)



б)

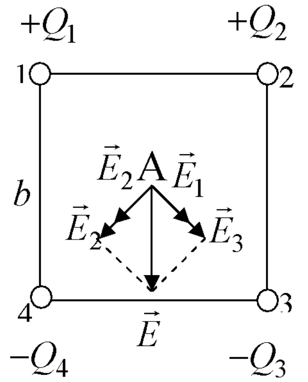


Рис.

2. Потенциалы полей зарядов Q_1, ... ,Q_4 суммируются как скалярные величины:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_4}{r}.$$

Учитывая, что заряды одинаковы по модулю, но имеют разные знаки, находим потенциал поля в точке А:

$$\varphi = 0.$$

Ответ: $E = 51\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$; $\varphi = 0$

3. Два одинаковых заряженных шарика массой m, подвешенные на нитях равной длины, опускаются в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1, а диэлектрическая проницаемость ε_1. Какова должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы углы их расхождения в воздухе и диэлектрике были одинаковы?

Дано: m, ρ_1, ε_1, α.

Найти: ρ.

Решение. До погружения в жидкий диэлектрик, т.е. в воздухе на каждый шарик (рис. *а*) действует сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}_k$ и сила натяжения нити $\vec{T}$.

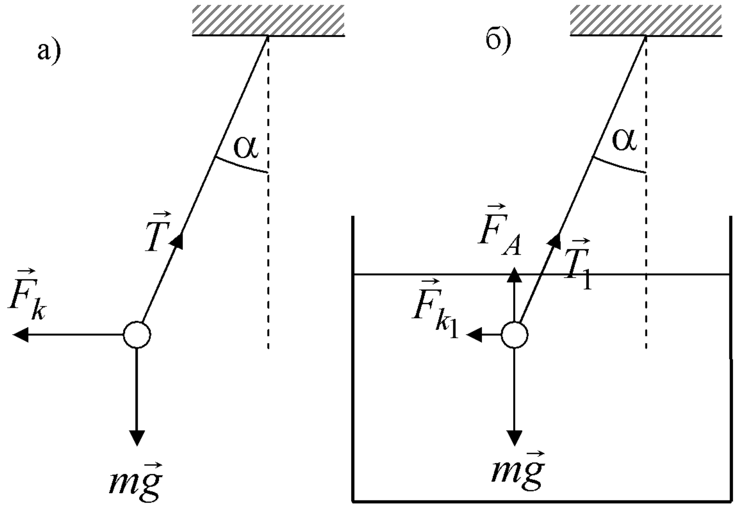


Рис.

При равновесии шариков

$$m\vec{g} + \vec{F}_k + \vec{T} = 0.$$

После погружения в жидкий диэлектрик на каждый шарик (см. рис. б) действует сила тяжести $m\vec{g}$, кулоновская сила $\vec{F}_{k_1}$, выталкивающая (архимедова) сила $\vec{F}_A$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$.

При равновесии шариков

$$m\vec{g} + \vec{F}_{k_1} + \vec{F}_A + \vec{T}_1 = 0.$$

Кулоновская сила отталкивания шариков в воздухе (из треугольника на рис. *а*)

$$F_k = mg\,\mathrm{tg}\alpha, \tag{1}$$

в диэлектрике $F_k = (mg - F_A)\mathrm{tg}\alpha$ (учли выталкивающую силу).

В диэлектрике кулоновская сила уменьшается в ε_1 раз, так что

$$F_{k_1} = \frac{F_k}{\varepsilon_1}.$$

Тогда

$$\frac{F_k}{\varepsilon_1} = (mg - F_A)\mathrm{tg}\alpha. \tag{2}$$

Поделив (2) на (1), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{mg - F_A}{mg} = 1 - \frac{F_A}{mg}. \tag{3}$$

По закону Архимеда

$$F_A = \rho_1 V g,$$

где ρ_1 – плотность жидкого диэлектрика; V – объем шарика; g – ускорение свободного падения.

Масса шарика $m = \rho V$, где ρ – плотность материала шарика. Подставив эти выражения в формулу (3), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Откуда искомая плотность материала шарика

$$\rho = \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\varepsilon_1 - 1}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{\varepsilon_1 \rho_1}{\varepsilon_1 - 1}$

4. Два точечных заряда $Q_1 = 1$ мкКл и $Q_2 = -1$ мкКл расположены на расстоянии $l = 0{,}1$ м. Определить силу F, действующую на точечный заряд $Q_0 = 0{,}1$ мкКл, удаленный на расстояние $x_1 = 0{,}06$ м от первого и $x_2 = 0{,}08$ м от второго заряда.

Дано: $Q_1 = 1$ мкКл; $Q_2 = -1$ мкКл; $l = 0{,}1$ м; $Q_0 = 0{,}1$ мкКл; $x_1 = 0{,}06$ м; $x_2 = 0{,}08$ м.

Найти: F.

Решение. На заряд Q_0 будет действовать сила $\vec{F}$, определяемая векторной суммой

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – силы, действующие со стороны зарядов Q_1 и Q_2.

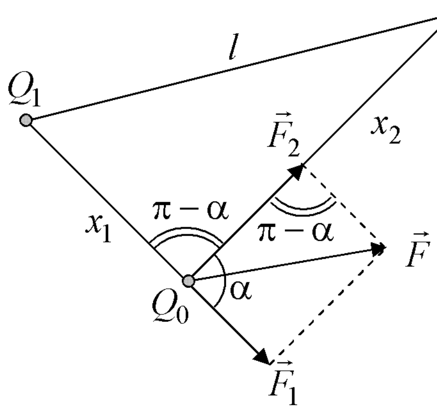


Рис.

Направление сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ показано на рис. Абсолютная величина сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ определяется выражениями

$$F_1 = \frac{Q_0 Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2}; \quad F_2 = \frac{Q_0 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x_2^2}.$$

Абсолютная величина силы $\vec{F}$ может быть найдена по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Из треугольника со сторонами l, x_1, x_2 находим

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos(\pi - \alpha) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\cos\alpha .$$

Оценим угол α:

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2} = \frac{0,01 - 0,0036 - 0,0064}{2 \cdot 0,06 \cdot 0,08} = 0 .$$

Следовательно, $\alpha = \pi/2$ и

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{\left(\frac{Q_0Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_0Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x_2^2}\right)^2} = \frac{Q_0\sqrt{Q_1^2x_2^4 + Q_2^2x_1^4}}{4\pi\varepsilon_0 x_1^2x_2^2} = 0,286 \text{ Н} .$$

Ответ: $F = 0,286$ Н

2. Расчет электростатического поля с применением т. Остроградского-Гаусса.

1. В вакууме образовалось скопление зарядов в форме шара радиусом R с постоянной объемной плотностью ρ. Найти напряженность поля E в точках, лежащих внутри и вне шара.

Дано: R; ρ.

Найти: E.

Решение. В данном случае непрерывное распределение зарядов обладает центральной симметрией, поэтому для нахождения напряженности поля E воспользуемся теоремой Гаусса.

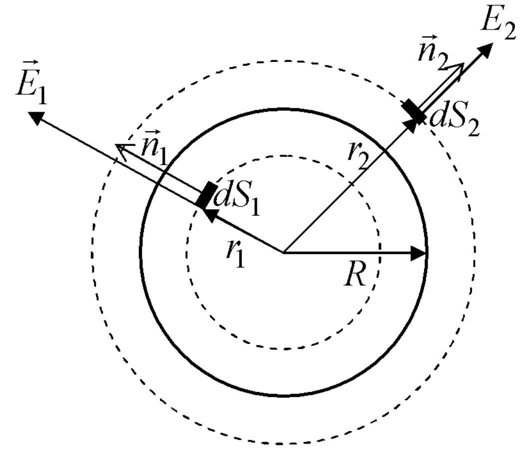


Рис.

Рассмотрим вначале точки, лежащие внутри заряженного шара. В качестве поверхности интегрирования S_1 выбираем сферу радиусом r_1, концентрическую заряженному шару (рис.). Тогда

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 d\vec{S}_1 = \int_{S_1} E_1 dS_1 \cos\alpha = E_1 \int_{S_1} dS_1 = E_1 4\pi r_1^2$$

Здесь мы учли, что $\cos\alpha = 1$ ($\alpha = 0$), так как положительная нормаль $\vec{n}_1$ к поверхности S_1 совпадает с направлением вектора напряженности $\vec{E}_1$. Такая сфера заключает в себе заряд $q_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho$.

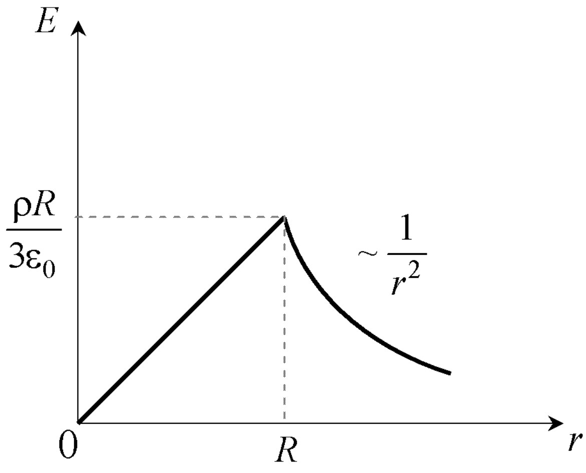


Рис.

Используя теорему Гаусса, запишем $E_1 4\pi r_1^2 = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r_1^3 \rho$. С учетом того, что r_1 было выбрано произвольно ($r_1 < R$), окончательно получим напряженность E_1 внутри заряженного по объему шара:

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Аналогично записываем для точек, лежащих на сфере радиусом $r_2 > R$, т.е.

$$\oint_{S_2} \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = \int_{S_2} E_2 dS_2 \cos 0 = E_2 \int_{S_2} dS_2 = E_2 4\pi r_2^2 .$$

Однако при $r_2 > R$ внутрь произвольной сферы попадает весь заряд q, создающий поле, следовательно,

$$E_2 4\pi r_2^2 = \rho \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi R^3 .$$

Так как r_2 выбрано произвольно ($r_2 > R$), то

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

При значениях $r_1 = r_2 = R$ напряженность

$$E = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0},$$

следовательно, в точке $r = R$ вектор напряженности не терпит разрыва, а имеет конечное значение. На рис. изображен график зависимости величины напряженности поля E заряженного шара от расстояния r.

Ответ: $E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$; $E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

2. Электростатическое поле создается бесконечным круглым цилиндром радиусом R, заряженным в вакууме равномерно с линейной плотностью τ. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра; 2) на расстоянии $r' < R$ от оси цилиндра.

Дано: R; τ; 1) $r > R$; 2) $r' < R$.

Найти: E.

Решение. Из соображений симметрии следует, что вектор $\vec{E}$ в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора $\vec{E}$ зависит только от расстояния r от оси цилиндра. При такой конфигурации поля в качестве произвольной замкнутой поверхности следует выбрать коаксиальную с заряженным цилиндром цилиндрическую поверхность радиусом r и высотой l (рис.). Для всех точек боковой поверхности этой цилиндрической поверхности

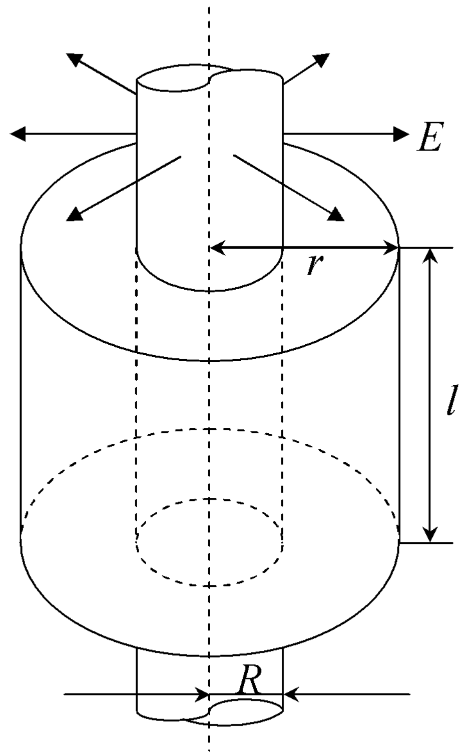


Рис.

$$E_n = E(r) = \text{const},$$

для оснований цилиндра $E_n = 0$.

Согласно теореме Гаусса для поля в вакууме

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где Q – общий заряд, охватываемый произвольной поверхностью S.

1. Если $r > R$. В данном случае поток вектора $\vec{E}$ сквозь торцы построенного цилиндра равен нулю, а поток сквозь его боковую поверхность равен $E2\pi rl$ ($2\pi rl$ – боковая поверхность цилиндра). Тогда по теореме Гаусса

$$E2\pi rl = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$$

(учли, что τ – линейная плотность заряда). Откуда искомая напряженность

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}; \quad (r \geq R).$$

2. Если $r' < R$. В данном случае рассматриваемая замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, а поэтому искомая напряженность

$$E = 0; \quad (r' < R).$$

3. Сплошной непроводящий шар радиусом R обладает полным зарядом Q, причем плотность этого заряда распределена в объеме по линейному закону $\rho = br$. Найти напряженность электрического поля на расстоянии r от центра шара.

Дано: R; Q; $\rho = br$.

Найти: $E(R)$.

Решение. Выразим сначала постоянную b через параметры Q и R.

Полный заряд шара находим интегрированием по его объему V

$$Q = \int_V \rho(r)dV = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2dr = 4\pi b\int_0^R r^3dr = \pi bR^4,$$

откуда получаем выражение для постоянной

$$b = \frac{Q}{\pi R^4}.$$

Выполнив интегрирование лишь для внутренней части сферы радиусом r, найдем заряд $Q(r)$ внутри нее:

$$Q(r) = 4\pi b\int_0^r r^3dr = \pi br^4 = Q\frac{r^4}{R^4}.$$

По теореме Гаусса напряженность электрического поля внутри шара

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}, \ (r \le R). \qquad (1)$$

Напряженность же поля вне шара определяется тем же выражением, что и для точечного заряда

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (r \ge R). \qquad (2)$$

На поверхности шара оба выражения (1) и (2) дают одинаковый результат

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Ответ: $E(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

4. Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 0{,}4\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$ и $\sigma_2 = 0{,}1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$. Определить напряженность электрического поля, создаваемого этими заряженными плоскостями.

Дано: $\sigma_1 = 0{,}4\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}; \sigma_2 = 0{,}1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$.

Найти: E.

Решение. Согласно закону суперпозиции, поля, создаваемые каждой заряженной плоскостью в отдельности, накладываются друг на друга, причем каждая заряженная плоскость создает электрическое поле независимо от присутствия другой заряженной плоскости.

Напряженности однородных электрических полей, создаваемых первой и второй плоскостями, соответственно равны

$$\text{E}_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}; \quad \text{E}_2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Плоскости делят все пространство на три области: I, II, III (рис. 6).

Как видно из рисунка, в областях I и III электрические силовые линии обоих полей направлены в одну сторону и, следовательно, напряженности полей $\text{E}^{(\text{I})}$ и $\text{E}^{(\text{III})}$ в областях I и III равны между собой и равны сумме напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$\text{E}^{(\text{I})} = \text{E}^{(\text{III})} = \text{E}_1 + \text{E}_2$$

или

$$\text{E}^{(\text{I})} = \text{E}^{(\text{III})} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Во второй (II) области (между плоскостями) электрические силовые линии полей направлены в противоположные стороны, следовательно, напряженность поля $\text{E}^{(\text{II})}$ равна разности напряженностей полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

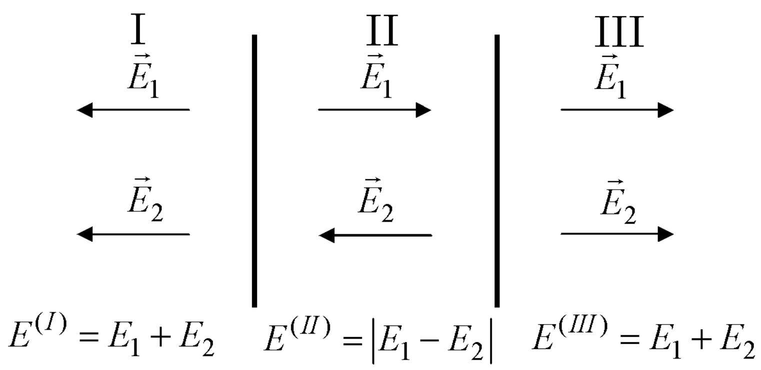


Рис.

$$\text{E}^{(\text{II})} = |\text{E}_1 - \text{E}_2|$$

или

$$E^{(II)} = \frac{1}{2}\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\varepsilon_0}.$$

Подставив данные и произведя вычисления, получим

$$E^{(I)} = E^{(III)} = 28{,}3 \ кВ/м;$$

$$E^{(II)} = 17 \ кВ/м.$$

Картина распределения силовых линий суммарного поля представлена на рис.

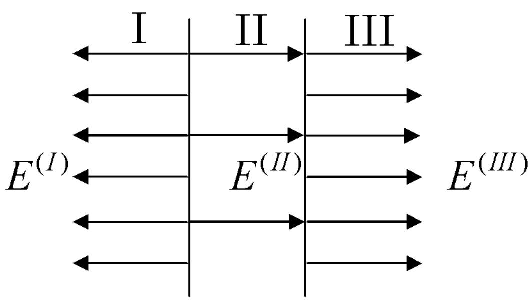


Рис.

Ответ: $E^{(II)} = 17 \ кВ/м$

5. Две концентрические проводящие среды радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0{,}5$ нКл. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

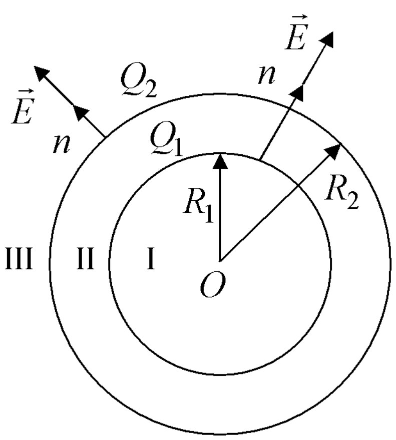


Рис.

Дано: $R_1 = 6$ см; $R_2 = 10$ см; $Q_1 = 1$ нКл; $Q_2 = -0{,}5$ нКл; $r_1 = 5$ см; $r_2 = 9$ см; $r_3 = 15$ см.

Найти: E_1; E_2; E_3; $E(r)$.

Решение. Точки, в которых требуется найти напряженность электрического поля, лежат в трех областях (рис.): область I $(r_1 < R_1)$, область II $(R_1 < r_2 < R_2)$, область III $(r_3 > R_2)$.

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем сферическую поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Гаусса. Так как внутри области I зарядов нет, то согласно указанной теореме получим равенство

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0, \qquad (1)$$

где E_n – нормальная составляющая напряженности электрического поля.

Из соображений симметрии нормальная составляющая E_n должна быть равна самой напряженности и постоянна для всех точек сферы, т.е.

$E_n = E_1 = \mathrm{const}$. Поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Равенство (1) примет вид $E_1 \oint\limits_{S_1} dS = 0$.

Так как площадь сферы не равна нулю, то $E_1 = 0$, т.е. напряженность поля во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II сферическую поверхность проведем радиусом r_2. Так как внутри этой поверхности находится заряд Q_1, то для нее, согласно теореме Гаусса, можно записать равенство

$$\oint\limits_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Так как $E_n = E_2 = \mathrm{const}$, то из условий симметрии следует

$$E_2 \oint\limits_{S_2} dS = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad E_2 S_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}, \quad \text{откуда} \quad E_2 = \frac{Q_1}{S_2 \varepsilon_0}.$$

Подставив сюда выражение площади сферы, получим

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

3. В области III сферическую поверхность проведем радиусом r_3. Эта поверхность охватывает симметричный заряд $Q_1 + Q_2$. Следовательно, для нее уравнение, записанное на основе теоремы Гаусса, будет иметь вид

$$\oint\limits_{S_2} E_n dS = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда, использовав положения, применяемые в первых двух случаях, найдем

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}. \qquad (3)$$

Выразим все величины в единицах СИ ($Q_1 = 10^{-9}$ Кл; $Q_2 = -0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл; $r_2 = 0{,}09$ м; $r_3 = 0{,}15$ м; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2} \text{ В/м} = 1{,}11 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 1{,}11 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = 9\cdot 10^9 \frac{(1-0{,}5)\cdot 10^{-9}}{(0{,}15)^2}\ \text{В}/\text{м} = 200\ \text{В}/\text{м}.$$

4. Построим график $E(r)$. В области I $(r < R_1)$ напряженность $E = 0$. В области II $(R_1 < r < R_2)$ напряженность $E_2(r)$ изменяется по закону $\frac{1}{r^2}$.

В точке $r = R_1$ напряженность

$$E_2(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = 2500\ \text{В}/\text{м}.$$

В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева)

$$E_2(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 900\ \text{В}/\text{м}.$$

В области III $(r_3 > R_2)$ $E_3(r)$ изменяется по закону $\frac{1}{r^2}$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа)

$$E_3(R_2) = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = 450\ \text{В}/\text{м}.$$

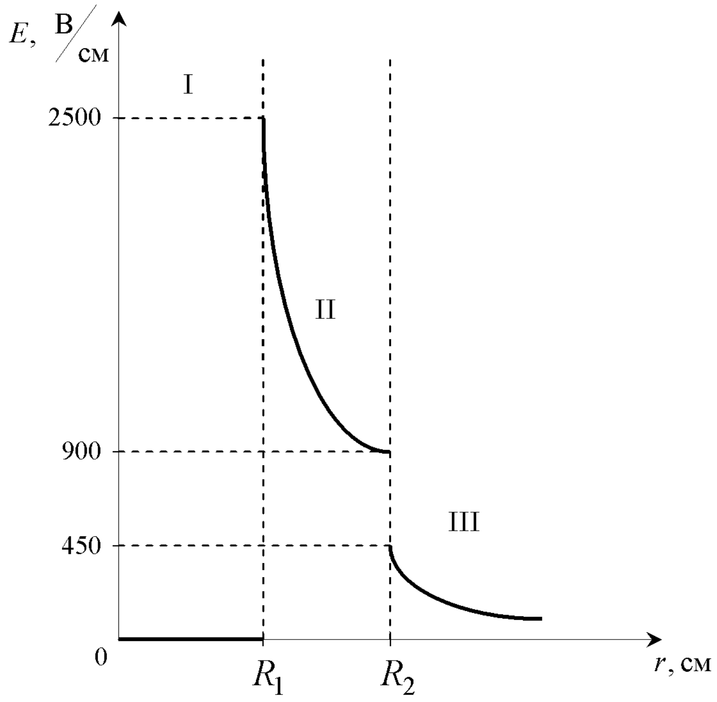


Рис.

Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв. График зависимости $E(r)$ представлен на рис.

3. Расчет поля распределенных зарядов.

1. Тонкий стержень длиной $L = 8$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 400$ ${}^{\text{нКл}}\!/_{\text{м}}$. Для точки A, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии $b = 6$ см от этого конца найти: 1) напряженность электрического поля; 2) потенциал электрического поля.

Дано: $L = 8$ см; $\tau = 400$ ${}^{\text{нКл}}\!/_{\text{м}}$; $b = 6$ см.

Найти: E, φ.

Решение. 1. Выделим на стержне физически малый участок длиной dl (см. рис.).

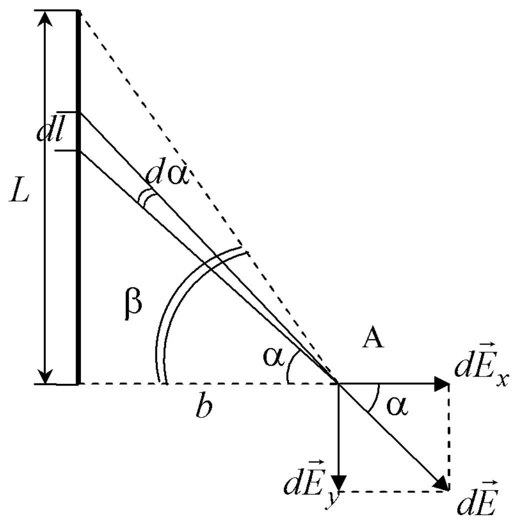


Рис.

Находящийся на нем заряд $dQ = \tau dl$ можно рассматривать как точечный, и тогда напряженность поля этого элемента определим по формуле

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \quad (1)$$

Прежде чем интегрировать это выражение, необходимо две переменные величины в правой части, dl и r выразить через одну. Для этого воспользуемся тригонометрическими равенствами

$$r = \frac{b}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad l = b\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Дифференцируя последнее, получим

$$dl = b\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha.$$

Подставляя выражения для r и dl в формулу (1), находим

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau b\cos^2\alpha\, d\alpha}{b^2\cos^2\alpha}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\frac{\vec{r}}{r}d\alpha.$$

Представим вектор $d\vec{E}$ как сумму двух составляющих: $d\vec{E}_x$ – перпендикулярной стержню и $d\vec{E}_y$ – параллельной ему. Из рис. видно, что $d\vec{E}_x = \cos\alpha d\vec{E}$, а $d\vec{E}_y = \sin\alpha d\vec{E}$. Тогда, интегрируя эти выражения, получим

$$E_x = \int_0^{\beta} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\int_0^{\beta}\cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\sin\beta;$$

$$E_y = \int_0^{\beta} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}\int_0^{\beta}\sin\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{b}(1-\cos\beta).$$

Из рис. следует, что

$$\sin\beta = \frac{L}{\sqrt{L^2+b^2}} = 0{,}8; \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}} = 0{,}6.$$

Произведем вычисления:

$$E_x = \frac{400\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 10^{-2}}\cdot 0{,}8 = 48\ \frac{кВ}{м};$$

$$E_y = \frac{400\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 10^{-2}}\cdot (1-0{,}6) = 24\ \frac{кВ}{м}.$$

Напряженность электрического поля определим по формуле

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

После подстановки полученных значений и вычислений находим $E = 53{,}7\ кВ/м$. Направление вектора напряженности зададим углом γ (рис.), который найдем по формуле

$$tg\gamma = \frac{E_y}{E_x} = 0{,}5.$$

2. Для вычисления потенциала поля в заданной точке используем формулу

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\tau}{r}dl.$$

Подставляя в нее выражения для r и dl, получим

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{\beta}\frac{\tau \mathrm{b}\cos\alpha}{\mathrm{b}\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{\beta}\frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\beta}=$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\ln\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right].$$

Так как $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то $\ln\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=0$. Используя тригонометрические формулы, сделаем преобразования:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sqrt{1-\cos(\beta+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{1+\cos(\beta+\frac{\pi}{2})}}=\frac{\sqrt{1+\sin\beta}}{\sqrt{1-\sin\beta}}=3.$$

Тогда $\varphi=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 3$. Произведем вычисления:

$$\varphi=\frac{400\cdot10^{-9}\cdot\ln 3}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}=3960\ \text{В}.$$

Ответ: $\mathrm{E}=53{,}7\ ^{\text{кВ}}/_{\text{м}}$; $\varphi=3960$ В

2. В одной плоскости с бесконечно длинной равномерно заряженной нитью ($\tau=2\ ^{\text{мкКл}}/_{\text{м}}$) расположен стержень под углом $\alpha=30^\circ$ к нити. Стержень считать заряженным равномерно зарядом $\mathrm{Q}=2{,}4\cdot10^{-9}$ Кл, длина стержня $\mathrm{l}_0=0{,}08$ м. Расстояние от нити до ближайшей точки стержня $\mathrm{x}_0=0{,}04$ м. Определить силу F, действующую на стержень.

Дано: $\tau=2\ ^{\text{мкКл}}/_{\text{м}}$; $\alpha=30^\circ$;

$\mathrm{Q}=2{,}4\cdot10^{-9}$ Кл; $\mathrm{l}_0=0{,}08$ м; $\mathrm{x}_0=0{,}04$ м.

Найти: F.

Решение. Так как стержень имеет конечную длину l_0, то его необходимо разбить на элементарно малые элементы dl, к которым можно применить закон Кулона.

Пусть малый элемент dl находится на расстоянии x от нити и на расстоянии l_0 от

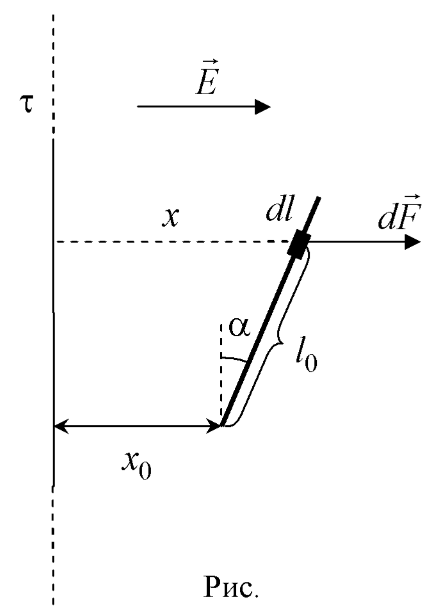


Рис.

нижнего конца стержня (рис.). Сила, действующая на этот элемент,

$$dF = EdQ, \qquad (1)$$

где $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}$ – напряженность поля нити на расстоянии x от нее, а $dQ = q\dfrac{dl}{l_0}$ – заряд рассматриваемого элемента, причем элемент dl настолько мал, что поле в его пределах можно считать постоянным.

Следовательно,

$$dF = \frac{\tau Q dl}{2\pi\varepsilon_0 x l_0}. \qquad (2)$$

Так как вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен длине нити, то при переходе от одного элемента dl к другому направление элементарных сил $d\vec{F}$ меняться не будет и, следовательно, результирующая сила может быть найдена интегрированием (2) по всему стержню.

Из рисунка видно, что $x = x_0 + l_0 \sin\alpha$; $dx = dl \sin\alpha$, отсюда

$$dl = \frac{dx}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и интегрируя по всему стержню, т.е. в пределах от x_0 до $x_0 + l_0 \sin\alpha$, получаем

$$F = \frac{\tau Q}{2\pi\varepsilon_0 l_0 \sin\alpha} \int\limits_{x_0}^{x_0 + l_0 \sin\alpha} \frac{dx}{x} = \frac{\tau Q}{2\pi\varepsilon_0 l_0 \sin\alpha} \ln\frac{x_0 + l_0 \sin\alpha}{x_0} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н

3. Кольцо радиусом R равномерно заряжено зарядом Q. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на перпендикуляре к кольцу, проходящем через его центр, на расстоянии h от плоскости кольца.

Дано: R; Q; h.

Найти: E.

Решение. Так как заряд распределен по кольцу, то кольцо следует разбить на элементарные участки dl, которые несут на себе элементарный заряд (в силу равномерного распределения заряда) (рис.).

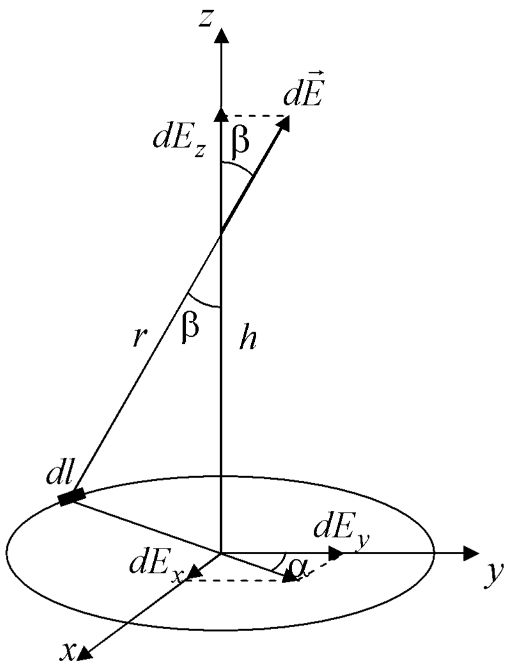


Рис.

$$dQ = \frac{Q}{2\pi R} dl. \qquad (1)$$

Тогда напряженность поля dE, создаваемого элементарным участком dl,

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Однако dE – это абсолютное значение вектора напряженности поля, создаваемого элементарным зарядом dQ. Поэтому определим проекции вектора $d\vec{E}$ на оси x, y, z и только после этого проинтегрируем соответствующие проекции элементарных напряженностей dE_x, dE_y, dE_z.

Из рисунка видно, что

$$dE_z = dE\cos\beta \quad \text{и} \quad r^2 = R^2 + h^2.$$

Учитывая (1), запишем

$$E_z = \int dE\cos\beta = \int \frac{Qdl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi R\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\cos\beta.$$

Так как $\cos\beta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\left(R^2+h^2\right)^{1/2}}$, а элемент дуги dl связан с поворотом на элементарный угол $d\alpha$ соотношением $dl = Rd\alpha$, окончательно получим

$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{QhRd\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\alpha\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}.$$

Учитывая, что $\sin\beta = \frac{R}{\sqrt{\left(R^2+h^2\right)}}$, найдем проекцию вектора E_x на ось x:

$$E_x = \int\limits_{\text{по кольцу}} dE\sin\beta\sin\alpha = \int\limits_{\text{по кольцу}} \frac{QdlR\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{QR\sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\alpha d\alpha = \frac{QR}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon 2\pi\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\cos\alpha\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Аналогично можно показать, что проекция вектора напряженности на ось y также равна нулю:

$$E_y = 0.$$

Следовательно,

$$E_x = E_y = 0; \quad E_z = E = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Ответ: $E_x = E_y = 0$; $E_z = E = \dfrac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}$

4. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом R, равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке O, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити составляет $1/3$ длины окружности и равна 15 см.

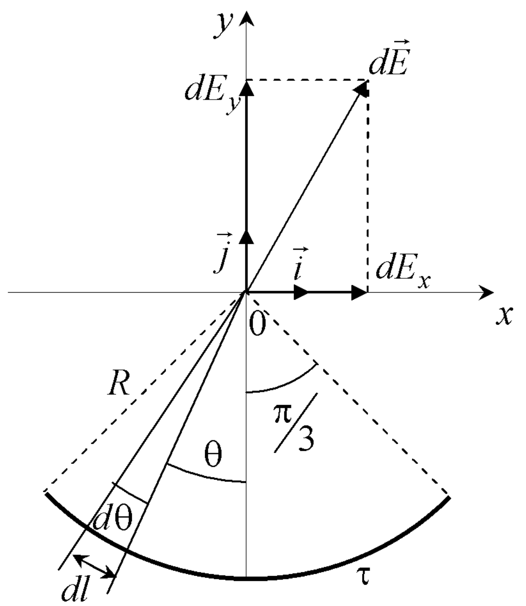


Рис.

Дано: R; $\tau = 10$ нКл/м; $\frac{1}{3}l = 15$ см.

Найти: $\vec{E}$, φ.

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось y была расположена симметрично относительно концов дуги (рис.).

На нити выделим элемент длины dl. Заряд $dQ = \tau dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в точке O. Для этого найдем сначала напряженность $d\vec{E}$ поля, создаваемого зарядом dQ:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, напряженность которой вычисляется. Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции dE_x и dE_y на оси координат:

$$d\vec{E} = \vec{i}dE_x + \vec{j}dE_y,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы направлений (орты).

Напряженность $\vec{E}$ найдем интегрированием:

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l dE_x + \vec{j}\int_l dE_y.$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длиной l. В силу симметрии интеграл $\int_l dE_x$ равен нулю. Тогда

$$\vec{E} = \vec{j}\int_l dE_y, \tag{1}$$

где

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta.$$

Так как $r = R = \text{const}$ и $dl = Rd\theta$, то

$$dE_y = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta.$$

Подставим найденное выражение dE_y в (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси OY, пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/3$, а результат удвоим

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/3}\cos\theta d\theta = \vec{j}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/3}.$$

Подставив указанные пределы и выразив R через длину дуги $(3l = 2\pi R)$, получим

$$\vec{E} = \vec{j}\frac{\tau}{2\varepsilon_0 l}\sqrt{3}.$$

Из этой формулы видно, что вектор $\vec{E}$ совпадает с положительным направлением оси OY. Подставив значения τ и l в последнюю формулу и сделав вычисления, найдем

$$E = 2{,}18 \text{ кВ/м}.$$

Определим потенциал электрического поля в точке O. Найдем сначала потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dQ в точке O:

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Заменим r на R и произведем интегрирование:

$$d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{l\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как $l = 2\pi R/3$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим

$$\varphi = 188 \text{ В}$$

Ответ: $\varphi = 188$ В

5. Определите потенциал в центре кольца с внутренним радиусом $R_1 = 30$ см и внешним $R_2 = 60$ см, если на нем равномерно распределен заряд $Q = 5$ нКл.

Дано: $R_1 = 30$ см; $R_2 = 60$ см; $Q = 5$ нКл .

Найти: φ.

Решение. Кольцо разобьем на концентрические бесконечно малые тонкие кольца внутренним радиусом r и внешним $(r + dr)$. Площадь рассматриваемого кольца (рис.)

$$dS = 2\pi r dr.$$

Потенциал в центре кольца, создаваемый бесконечно тонким кольцом,

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma dr}{2\varepsilon_0},$$

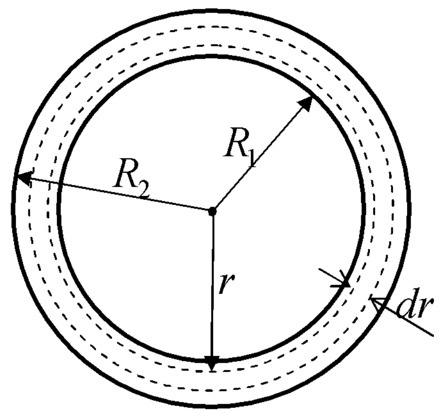


Рис.

где σ – поверхностная плотность заряда.

Для определения потенциала в центре кольца следует арифметически сложить $d\varphi$ от всех бесконечно тонких колец. Тогда

$$\varphi = \int d\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1).$$

Учитывая, что заряд кольца $Q = \sigma S$, где $S = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ – площадь кольца, получим потенциал в центре кольца

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 (R_2 + R_1)} = 25\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi = 25$ В

6. Электростатическое поле создается в вакууме шаром радиусом $R = 8$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 10\ ^{\text{нКл}}\!/_{\text{м}^3}$. Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими от центра шара на расстояниях: 1) $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см; 2) $r_3 = 2$ см и $r_4 = 5$ см.

Дано: $R = 8$ см; $\rho = 10\ ^{\text{нКл}}\!/_{\text{м}^3}$; $r_1 = 10$ см; $r_2 = 15$ см; $r_3 = 2$ см; $r_4 = 5$ см.

Найти: 1) $\varphi_1 - \varphi_2$; 2) $\varphi_3 - \varphi_4$.

Решение: 1. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr, \tag{1}$$

где $E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$ – напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным с объемной плотностью ρ шаром, в любой точке, лежащей **вне шара** на расстоянии r от его центра.

Подставив это выражение в формулу (1) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

2. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_3 и r_4 от центра шара,

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3}^{r_4} E\,dr, \tag{2}$$

где $E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$ – напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным с объемной плотностью ρ шаром, в любой точке, лежащей **внутри шара** на расстоянии r от его центра. Подставив это выражение в формулу (2) и проинтегрировав, получим искомую разность потенциалов

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{r_3}^{r_4} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_{r_3}^{r_4} r dr = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_4^2 - r_3^2\right).$$

Вычислив, получим: 1) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}643$ В; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 0{,}395$ В.

Ответ: 1) $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}643$ В; 2) $\varphi_3 - \varphi_4 = 0{,}395$ В.

7. Электрическое поле создается бесконечно длинным цилиндром радиусом $R = 7$ мм, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 15$ нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано: $R = 7$ мм; $\tau = 15$ нКл/м; $r_1 = 1$ см; $r_2 = 2$ см.

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Для определения разности потенциалов используем соотношение между напряженностью электростатического поля и изменением потенциала

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi. \qquad (1)$$

В случае заряженного цилиндра электростатическое поле обладает сферической симметрией, поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -E dr.$$

Подставив сюда выражение для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

получим

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем искомую разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1+R}^{r_2+R} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2+R}{r_1+R} = 125\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 125$ В

4. Движение зарядов в поле.

1. Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов $U_0 = 10$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U_1 = 100$ В, по линии *AB*, параллельной пластинам (рис.). Расстояние d между пластинами равно 2 см. Длина l_1 пластин конденсатора в направлении полета электрона равна 20 см. Определить расстояние *BC* на экране, отстоящем от конденсатора на $l_2 = 1$ м.

Дано: $U_0 = 10$ кВ; $U_1 = 100$ В; $d = 2$ см; $l_1 = 20$ см; $l_2 = 1$ м.

Найти: *BC*.

Решение. Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений:

1) по инерции вдоль линии *AB* с постоянной скоростью υ_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора;

2) равномерно ускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью υ, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора.

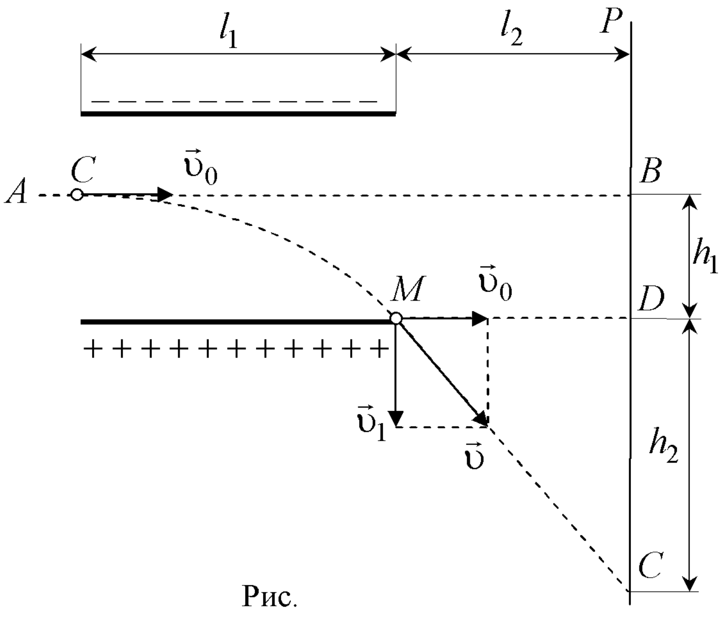


Рис.

Из рисунка видно, что искомое расстояние $|BC| = h_1 + h_2$, где h_1 – расстояние, на которое смещается электрон в вертикальном направлении во время движения в конденсаторе; h_2 – расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости υ_0, и точкой C, в которую электрон попадает в действительности.

Выразим отдельно h_1 и h_2.

Пользуясь формулой длины пути для равноускоренного движения, найдем

$$h_1 = \frac{at^2}{2}, \tag{1}$$

где a – ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t – время полета электрона внутри конденсатора.

По второму закону Ньютона $a = F/m$, где F – сила, с которой поле действует на электрон; m – его масса. В свою очередь,

$$F = eE = \frac{eU_1}{d},$$

где e – заряд электрона; U_1 – разность потенциалов между пластинами конденсатора; d – расстояние между ними.

Время полета электрона внутри конденсатора найдем из формулы пути равномерного движения

$$l_1 = \upsilon_0 t, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{l_1}{\upsilon_0},$$

где l_1 – длина конденсатора.

Выражение скорости υ_0 найдем из условия равенства работы, совершаемой полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = eU_0.$$

Отсюда

$$\upsilon_0^2 = \frac{2eU_0}{m}. \tag{2}$$

Подставляя в формулу (1) последовательно значения a, F, t и υ_0^2 из соответствующих выражений, получим

$$h_1 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0}.$$

Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников MDC и векторного

$$h_2 = \frac{\upsilon_1 l_2}{\upsilon}, \qquad (3)$$

где υ_1 – скорость электрона в вертикальном направлении в точке M; l_2 – расстояние от конденсатора до экрана.

Скорость υ_1 найдем по формуле $\upsilon_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид

$$\upsilon_1 = \frac{eU_1 l_1}{dm\upsilon_0}.$$

Подставив выражение υ_1 в формулу (3), получим

$$h_2 = \frac{eU_1 l_1 l_2}{dm\upsilon_0^2}$$

или, заменив υ_0^2 по формуле (2), найдем

$$h_2 = \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0}.$$

Окончательно для искомого расстояния $|BC|$ будем иметь

$$|BC| = h_1 + h_2 = \frac{U_1 l_1^2}{4dU_0} + \frac{U_1 l_1 l_2}{2dU_0} = \frac{U_1 l_1}{2dU_0}\left(\frac{l_1}{2} - l_2\right) = 5{,}5\ \text{см}.$$

Ответ: $|BC| = 5{,}5$ см

5. Работа электростатических сил. Энергия заряда в электростатическом поле. Потенциал электростатического поля.

1. Найти работу A поля по перемещению заряда $Q = 10$ нКл из точки 1 в точку 2 (рис.), которые находятся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}4\ ^{\text{мкКл}}/_{\text{м}^2}$ бесконечными параллельными плоскостями, расстояние l между которыми равно 3 см.

Дано: $Q = 10$ нКл; $\sigma = 0{,}4\ ^{\text{мкКл}}/_{\text{м}^2}$; $l = 3$ см.

Найти: A.

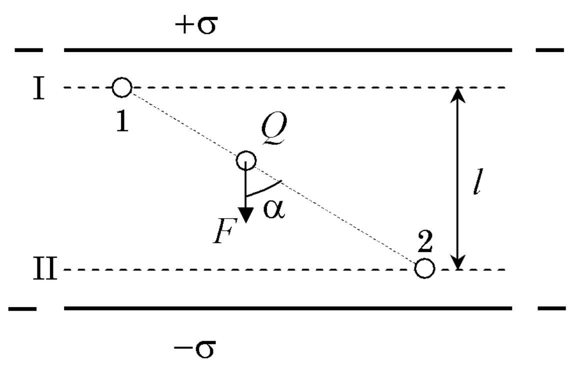


Рис.

Решение. Возможны 2 способа решения задачи.

1-й способ. Работу сил поля по перемещению заряда Q из точки 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2 найдем по формуле

$$A = Q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \qquad (1)$$

Для определения потенциалов в точках 1 и 2 проведем через эти точки эквипотенциальные поверхности I и II. Эти поверхности будут плоскостями, так как поле между двумя равномерно заряженными плоскостями однородно. Для такого поля справедливо соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El, \qquad (2)$$

где E – напряженность поля; l – расстояние между эквипотенциальными поверхностями.

Напряженность поля между параллельными бесконечными разноименно заряженными плоскостями

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Подставив это выражение E в формулу (2), а затем выражение $\varphi_1 - \varphi_2$ в формулу (1), получим

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l.$$

2-й способ. Так как поле однородно, то сила, действующая на заряд Q при его перемещении, постоянна. Поэтому работу перемещения заряда из точки 1 в точку 2 можно представить формулой

$$A = F\Delta r\cos\alpha,$$

где F – сила, действующая на заряд; Δr – модуль перемещения заряда Q из точки 1 в точку 2; α – угол между направлениями перемещения и силы. Но

$$F = QE = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Подставив это выражение F в равенство (3), а также заметив, что $\Delta r\cos\alpha = l$, получим

$$A = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l. \qquad (4)$$

Таким образом, оба решения приводят к одинаковому результату. Подставив в выражение (4) значения величин, найдем

$$A = 13{,}6 \text{ мкДж}.$$

Ответ: $A = 13{,}6$ мкДж

2. Определить начальную скорость υ_0 сближения протонов, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние r_{min}, на которое они могут сблизиться, равно 10^{-11} см.

Дано: $r_{min} = 10^{-11}$ см.

Найти: υ_0.

Решение. Между двумя протонами действуют силы отталкивания, вследствие чего движение протонов будет замедленным. Поэтому задачу можно решить как в инерциальной системе координат (связанной с центром масс двух протонов), так и в неинерциальной (связанной с одним из ускоренно движущихся протонов). Во втором случае законы Ньютона не имеют места. Применение же принципа Даламбера затруднительно из-за того, что ускорение системы будет переменным. Поэтому удобно рассмотреть задачу в инерциальной системе отсчета.

Поместим начало координат в центр масс двух протонов. Поскольку имеем дело с одинаковыми частицами, то центр масс будет находиться в точке, делящий пополам отрезок, соединяющий частицы. Относительно центра масс частицы будут иметь в любой момент времени одинаковые по модулю скорости. Когда частицы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, скорость υ_i каждой частицы равна половине υ_0, т.е. $\upsilon_i = \upsilon_0/2$.

Для решения задачи применим закон сохранения энергии, согласно которому полная механическая энергия E изолированной системы постоянна, т.е.

$$E = T = \Pi,$$

где T – сумма кинетических энергий обоих протонов относительно центра масс; Π – потенциальная энергия системы зарядов.

Выразим потенциальную энергию в начальный Π_1 и конечный Π_2 моменты движения.

В начальный момент, согласно условию задачи, протоны находились на большом расстоянии, поэтому потенциальной энергией можно пренебречь $(\Pi_1 = 0)$. Следовательно, для начального момента полная энергия будет равна кинетической энергии T_1 протонов, т.е.

$$E = T_1. \tag{1}$$

В конечный момент, когда протоны максимально сблизятся, скорость и кинетическая энергия равны нулю, а полная энергия будет равна потенциальной энергии Π_2, т.е.

$$E = \Pi_2. \tag{2}$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$T_1 = \Pi_2. \tag{3}$$

Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий протонов:

$$T_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_1^2}{2} = m\upsilon_1^2 = \frac{m\upsilon_0^2}{4}. \tag{4}$$

Потенциальная энергия системы двух зарядов Q_1 и Q_2, находящихся в вакууме, определяется по формуле $\Pi = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где r – расстояние между зарядами. Воспользовавшись этой формулой, получим

$$\Pi_2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}. \tag{5}$$

С учетом равенств (4) и (5) формула (3) примет вид

$$\frac{m\upsilon_0^2}{4} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}, \quad \text{откуда} \quad \upsilon_0 = \frac{e}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{min}}}.$$

Выполнив вычисления, найдем

$$\upsilon_0 = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_0 = 2{,}35 \cdot 10^6$ м/с

3. Три точечных заряда $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл и $Q_3 = -4$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной длиной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы.

Дано: $Q_1 = 2$ нКл, $Q_2 = 3$ нКл, $Q_3 = -4$ нКл, $a = 10$ см.

Найти: П.

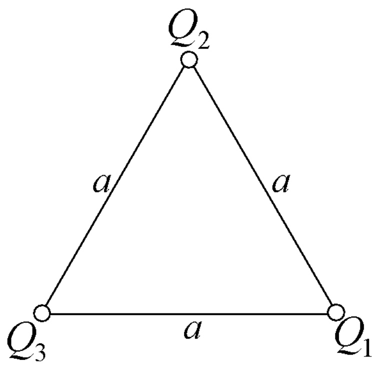


Рис.

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов (рис.) равна алгебраической сумме энергий взаимодействия каждой из взаимодействующих пар зарядов, т.е.

$$\Pi = \Pi_{12} + \Pi_{13} + \Pi_{23}, \tag{1}$$

где соответственно потенциальные энергии одного из зарядов, находящегося в поле другого заряда на расстоянии a от него, равны

$$\Pi_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{a}; \quad \Pi_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_3}{a}; \quad \Pi_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2Q_3}{a}. \tag{2}$$

Подставив формулы (2) в выражение (1), найдем искомую потенциальную энергию системы зарядов

$$\Pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3\right)}{a} = -1{,}26 \text{ мкДж}$$

Ответ: $\Pi = -1{,}26$ мкДж

4. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь под действием электростатического поля вдоль линии напряженности от нити с расстояния $r_1 = 2$ см до $r_2 = 10$ см, изменил свою скорость от $\upsilon_1 = 1$ Мм/с до $\upsilon_2 = 5$ Мм/с. Определите линейную плотность τ заряда нити.

Дано: $r_1 = 2$ см; $r_2 = 10$ см; $\upsilon_1 = 1$ Мм/с; $\upsilon_2 = 5$ Мм/с.

Найти: τ.

Решение. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении протона из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2, идет на увеличение кинетической энергии протона

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta T. \tag{1}$$

В случае нити электростатическое поле обладает осевой симметрией, поэтому

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{или} \quad d\varphi = -E dr.$$

Тогда разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от нити,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2}{r_1}. \tag{2}$$

Учли, что напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной нитью,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что

$$\Delta T = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

получим

$$\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

откуда искомая линейная плотность заряда нити

$$\tau = \frac{\pi\varepsilon_0 m\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{Q\ln\frac{r_2}{r_1}} = 4{,}33 \text{ мкКл}/\text{м}.$$

Ответ: $\tau = 4{,}33$ мкКл/м

5. Частица массой m, имеющая заряд q, со скоростью υ_0 приближается с большого расстояния к заряженному незакрепленному кольцу, двигаясь по его оси. Радиус кольца R, заряд $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}\cdot\mathrm{q}>0)$, масса M. Вначале кольцо покоится. Чему будет равна скорость частицы, когда она проходит через центр кольца? Как изменится ответ, если кольцо закрепить?

Дано: m; q; υ_0; R; $\mathrm{Q}(\mathrm{Q}\cdot\mathrm{q}>0)$; M.

Найти: υ.

Решение. При движении вдоль оси заряженного кольца силы, действующие на частицу и кольцо, будут меняться. Поэтому для решения задачи удобно воспользоваться законами сохранения импульса и механической энергии.

Считая систему «частица – кольцо» замкнутой, закон сохранения импульса

$$\Delta\vec{\mathrm{P}}=\vec{\mathrm{P}}_2-\vec{\mathrm{P}}_1=(\mathrm{m}\vec{\upsilon}+\mathrm{M}\vec{\mathrm{u}})-\mathrm{m}\vec{\upsilon}_0=0$$

(где $\vec{\upsilon}$, $\vec{\mathrm{u}}$ – скорости частицы и кольца в момент времени, когда частица проходит через центр кольца) запишем в проекции на направление движения тел системы:

$$\mathrm{m}\upsilon+\mathrm{Mu}-\mathrm{m}\upsilon_0=0. \tag{1}$$

В начальный момент полная механическая энергия тел равна кинетической энергии частицы $\mathrm{W}_1=\frac{1}{2}\mathrm{m}\upsilon_0^2$ и в момент, когда частица находится в центре кольца, $\mathrm{W}_2=\frac{\mathrm{m}\upsilon^2}{2}+\frac{\mathrm{Mu}^2}{2}+\mathrm{W}_{\text{вз}}$, где $\mathrm{W}_{\text{вз}}$ – энергия взаимодействия частицы с кольцом в рассматриваемом положении:

$$\mathrm{W}_{\text{вз}}=\mathrm{q}\varphi.$$

Потенциал φ, создаваемый кольцом в центре, легко определить, разбив заряд Q на элементарные заряды $\Delta\mathrm{Q}$, каждый из которых можно считать точечным. Так как все заряды $\Delta\mathrm{Q}$ находятся на равных расстояниях от центра кольца, то потенциал, создаваемый ими, будет равен

$$\varphi=\sum\frac{\Delta\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{R}},$$

где R – радиус кольца.

Следовательно, $\mathrm{W}_2=\frac{\mathrm{m}\upsilon^2}{2}+\frac{\mathrm{Mu}^2}{2}+\frac{\mathrm{qQ}}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{R}}$ и закон сохранения механической энергии примет вид

$$W_1 = W_2 \quad \text{или} \quad \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (2)$$

Выразив скорость кольца u из закона сохранения импульса (1) $u = \dfrac{m(\upsilon_0 - \upsilon)}{M}$ и подставив в закон сохранения энергии (2), получим

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m^2(\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0\upsilon + \upsilon^2)}{2M} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (3)$$

После преобразований уравнение (3) примет вид

$$\upsilon^2 - \frac{2m\upsilon_0}{M+m}\upsilon - \frac{M-m}{M+m}\upsilon_0^2 + \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R} = 0.$$

Отсюда находим

$$\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{M+m} \pm \sqrt{\frac{M^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} - \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R}}. \qquad (4)$$

Для того чтобы частица пролетела сквозь кольцо, ее скорость υ должна быть больше скорости u кольца. Очевидно, что частица догонит удаляющееся от нее кольцо, если относительная скорость $\upsilon_{отн} = \upsilon - u \geq 0$, или с учетом (1) и (4)

$$\upsilon_{отн} = \upsilon - \frac{m\upsilon_0}{M} + \frac{m\upsilon}{M} = \frac{m\upsilon_0}{M} \pm \frac{M+m}{M}\sqrt{\frac{M^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} - \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R}} - \frac{m\upsilon_0}{M}.$$

По условию $\upsilon_{отн} \geq 0$ соответствует перед радикалом знак «+». Следовательно,

$$\upsilon_{отн} = \frac{m\upsilon_0}{M+m} + \sqrt{\frac{M^2\upsilon_0^2}{(M+m)^2} - \frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(M+m)R}}. \qquad (5)$$

Если кольцо закреплено, то, полагая $M >> m$, из (5) получаем

$$\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{M} + \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}} \approx \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}. \qquad (6)$$

Выражение (6) можно также получить, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Ответ: $\upsilon = \dfrac{m\upsilon_0}{M} + \sqrt{\upsilon_0^2 - \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}} \approx \sqrt{\upsilon_0^2 - \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}$

6. Поле диполя. Дипольный момент.

1. Диполь с электрическим моментом $P = 2$ нКл$\cdot$м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 30$ ${}^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}}$. Вектор $\vec{P}$ составляет угол $\alpha_0 = 60^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ с направлением силовых линий поля. Определить произведенную внешними силами работу A поворота диполя на угол $\beta = 30^\circ$.

Дано: $P = 2$ нКл$\cdot$м; $E = 30$ ${}^{\text{кВ}}\!/_{\text{м}}$; $\alpha_0 = 60°$; $\beta = 30°$.

Найти: A.

Решение. Из исходного положения (рис.*а*) диполь можно повернуть на угол $\beta = 30° = {}^{\pi}\!/_{6}$ двумя способами: или по часовой стрелке до угла $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = {}^{\pi}\!/_{3} - {}^{\pi}\!/_{6} = {}^{\pi}\!/_{6}$ (рис.*б*), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = {}^{\pi}\!/_{3} + {}^{\pi}\!/_{6} = {}^{\pi}\!/_{2}$ (рис. *в*).

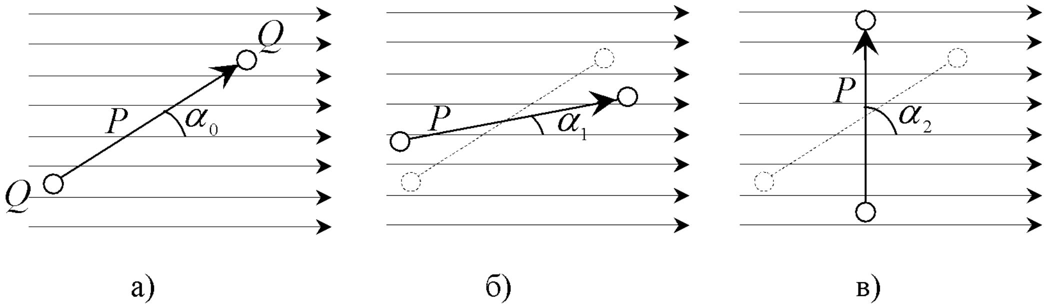


Рис.

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля. Следовательно, работа внешних сил при этом отрицательна. Во втором случае поворот может быть произведен только под действием внешних сил и, следовательно, работа внешних сил при этом положительна.

Работу, совершаемую при повороте диполя, можно вычислить двумя способами: 1) непосредственно интегрированием выражения элементарной работы; 2) с помощью соотношения между работой и изменением потенциальной энергии диполя в электрическом поле.

1-й способ. Элементарная работа при повороте диполя на угол α

$$dA = Md\alpha = PE\sin\alpha d\alpha,$$

и полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} PE\sin\alpha d\alpha = PE\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \sin\alpha d\alpha = -PE(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = PE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha).$$

Работа по часовой стрелке

$$A_1 = PE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = -21{,}9 \text{ мкДж},$$

против часовой стрелки

$$A_2 = PE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 30 \text{ мкДж}.$$

2-й способ. Работа A внешних сил связана с изменением потенциальной энергии $\Delta П$ соотношением

$$A = \Delta П = П_2 - П_1,$$

где $П_1$ и $П_2$ – потенциальные энергии системы соответственно в начальном и конечном состояниях. Так как потенциальная энергия диполя в электрическом поле выражается формулой

$$П = -PE\cos\alpha,$$

то

$$A = PE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha),$$

что совпадает с формулой, полученной первым способом.

Ответ: по часовой стрелке $A_1 = PE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = -21{,}9$ мкДж; против часовой стрелки $A_2 = PE(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_2) = 30$ мкДж.

2. Три точечных заряда Q_1, Q_2 и Q_3 образуют электрически нейтральную систему, причем $Q_1 = Q_2 = 10$ нКл. Заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определить максимальные значения напряженности E_{max} и потенциала φ_{max} поля, создаваемого этой системой зарядов, на расстоянии $r = 1$ м от центра треугольника, длина a стороны которого равна 10 см.

Дано: $Q_1 = Q_2 = 10$ нКл; $r = 1$ м; $a = 10$ см; $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$.

Найти: E_{max}, φ_{max}.

Решение. Нейтральную систему, состоящую из трех точечных зарядов, можно представить в виде диполя. Действительно, «центр тяжести» зарядов Q_1 и Q_2 лежит на середине отрезка прямой, соединяющей эти заряды (рис. 10.26). В этой точке можно считать сосредоточенным заряд $Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1$. А так как система зарядов нейтральная $\left(Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\right)$, то

$$Q_3 = -\left(Q_1 + Q_2\right) = -Q.$$

Так как расстояние l между зарядами Q_3 и Q, равными по значению, меньше расстояния r $\left(l < r\right)$ (рис.), то систему этих двух зарядов можно считать диполем с электрическим моментом

$$\vec{P} = |Q|\vec{l},$$

где $\vec{l}$ – плечо диполя, равное по модулю $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (см. рис.). Так как $|Q| = 2Q_1$, то электрический момент такого точечного диполя

$$P = Q_1 a\sqrt{3}.$$

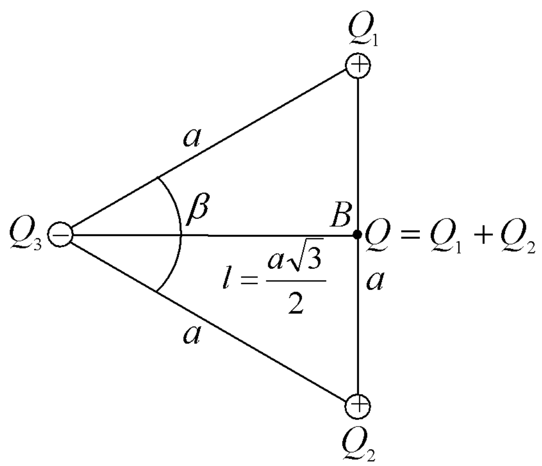


Рис.

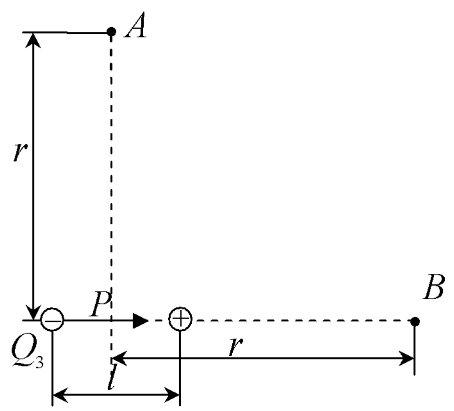


Рис.

Тот же результат можно получить другим способом.

Систему из трех зарядов представим как два диполя с электрическими моментами $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ (рис.), равными по модулю

$$\vec{P}_1 = |P_1| = Q_1 a; \quad \vec{P}_2 = |P_2| = Q_2 a.$$

Электрический момент $\vec{P}$ системы зарядов найдем как векторную сумму $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, т.е.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

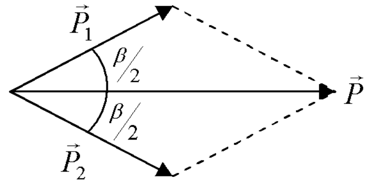


Рис.

Как это следует из рис. 10.28, имеем

$$P = 2P_1 \cos\left(\beta/2\right).$$

Так как $P_1 = Q_1 a$ и $\beta = \pi/3$, то

$$P = 2Q_1 a \frac{\sqrt{3}}{2} = Q_1 a\sqrt{3},$$

что совпадает с найденным ранее.

Напряженность E и потенциал φ поля диполя выражаются формулами

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}\ ; \quad \varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{r}$ (рис.).

Напряженность и потенциал будут иметь максимальные значения при $\alpha = 0$, следовательно,

$$E_{max} = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; \quad \varphi_{max} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

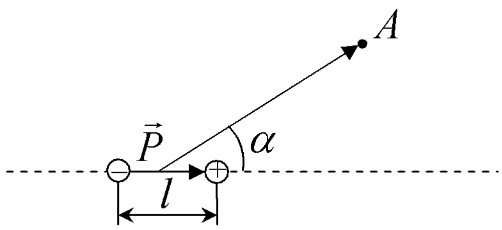


Рис.

Так как $P = Q_1 a\sqrt{3}$, то

$$E_{max} = \frac{2Q_1 a\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 3{,}12\ \text{В}/\text{м};$$

$$\varphi_{max} = \frac{Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{3} = 1{,}56\ \text{В}.$$

Ответ: $E_{max} = 3{,}12\ \text{В}/\text{м}$; $\varphi_{max} = 1{,}56$ В

7. Электрическая емкость. Расчет эквивалентных электрических емкостей. Энергия конденсатора.

1. Определить электрическую емкость C плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной d_1 = 2 мм и эбонита толщиной d_2 = 1,5 мм, если площадь S пластин равна 100 см^2.

Дано: d_1 = 2 мм; d_2 = 1,5 мм; S = 100 см^2.

Найти: C.

Решение. Емкость конденсатора, по определению, $C = \mathrm{Q/U}$, где Q − заряд на пластинах конденсатора; U − разность потенциалов пластин. Заменив в этом равенстве общую разность потенциалов U конденсатора суммой $U_1 + U_2$ напряжений на слоях диэлектриков, получим

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U_1 + U_2}}. \qquad (1)$$

Приняв во внимание, что $\mathrm{Q} = \sigma \cdot \mathrm{S}$, $\mathrm{U_1 = E_1 d_1} = \frac{\mathrm{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}\mathrm{d_1}$ и $\mathrm{U_2 = E_2 d_2} = \frac{\mathrm{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}\mathrm{d_2}$,

равенство (1) можно переписать в виде

$$\mathrm{C} = \frac{\sigma \mathrm{S}}{\frac{\mathrm{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}\mathrm{d_1} + \frac{\mathrm{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}\mathrm{d_2}}, \qquad (2)$$

где σ − поверхностная плотность заряда на пластинах; $\mathrm{E_1}$ и $\mathrm{E_2}$ − напряженности поля в первом и втором слоях диэлектрика соответственно; D − электрическое смещение поля в диэлектриках.

Умножив числитель и знаменатель равенства (2) на ε_0 и учтя, что $\mathrm{D} = \sigma$, получим

$$\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{S}}{\mathrm{d_1}/\varepsilon_1 + \mathrm{d_2}/\varepsilon_2};$$

$$\mathrm{C} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}\ (\text{Ф/м}) \cdot \text{м}^2}{2 \cdot 10^{-3}/5 + 1{,}5 \cdot 10^{-3}/3\ \text{м}} = 9{,}83 \cdot 10^{-11}\ \text{Ф} = 98{,}3\ \text{пФ}.$$

Ответ: $\mathrm{C} = 98{,}3$ пФ

2. Два плоских конденсатора одинаковой электроемкости $C_1 = C_2 = C$ соединены в батарею последовательно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой E. Как изменится разность потенциалов U_1 на пластинах первого конденсатора, если пространство между пластинами второго конденсатора, не отключая источника тока, заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon' = 7$?

Дано: $\varepsilon' = 7$; $C_1 = C_2 = C$; E.

Найти: U_1'/U.

Решение. До заполнения второго конденсатора диэлектриком разность потенциалов на пластинах обоих конденсаторов была одинакова: $U_1 = U_2 = E/2$. После заполнения электроемкость второго конденсатора возросла в ε' раз:

$$C_2' = \varepsilon' C_2 = \varepsilon' C.$$

Электроемкость первого не изменилась, т.е. $C_1' = C$. Так как источник тока не отключался, то общая разность потенциалов на батарее конденсаторов осталась прежней, она лишь перераспределилась между конденсаторами.

На первом конденсаторе

$$U_1' = \frac{Q}{C_1'} = \frac{Q}{C}, \tag{1}$$

где Q – заряд на пластинах конденсатора.

Поскольку при последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине и на всей батарее одинаков,

то $Q = C_{бат}' E$, где $C_{бат}' = \dfrac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'} = \dfrac{C \cdot \varepsilon' C}{C + \varepsilon' C} = \dfrac{\varepsilon' C}{1 + \varepsilon'}$.

Таким образом, $Q = \dfrac{\varepsilon' C}{1 + \varepsilon'} \cdot E$.

Подставив это выражение заряда в формулу (1), найдем

$$U_1' = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon' C E}{(1 + \varepsilon')C} = \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'} E.$$

Чтобы найти, как изменилась разность потенциалов на пластинах первого конденсатора, вычислим отношение

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{\varepsilon' E \cdot 2}{(1 + \varepsilon')E} = \frac{2\varepsilon'}{1 + \varepsilon'} = 1{,}75.$$

Ответ: разность потенциалов на пластинах первого конденсатора возросла в 1,75 раза.

3. Между пластинами плоского конденсатора находится два слоя диэлектриков: слюда с $\varepsilon_1 = 7$ толщиной $d_1 = 0{,}3$ мм и эбонит с $\varepsilon_2 = 3$ толщиной $d_2 = 0{,}7$ мм (рис. *а*). Площадь пластин равна $S = 20$ см^2. Найти: 1) емкость конденсатора; 2) емкость конденсатора, если между теми же пластинами помещены те же диэлектрики, поровну заполняющие объем конденсатора (рис. *б*).

Дано: $\varepsilon_1 = 7$; $d_1 = 0{,}3$ мм; $\varepsilon_2 = 3$; $d_2 = 0{,}7$ мм.

Найти: C.

Решение.

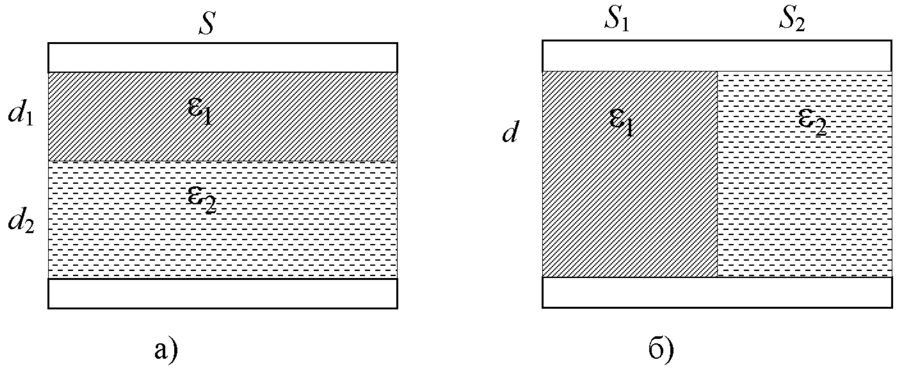


Рис.

1. Легко видеть, что в сущности у нас последовательно соединены два конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2},$$

соответственно, искомая емкость

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{(8{,}85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})}{\dfrac{0{,}3 \cdot 10^{-3}}{7} + \dfrac{0{,}7 \cdot 10^{-3}}{3}} = 64{,}1 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 64{,}1 \text{ пФ}.$$

2. Здесь мы имеем дело с параллельно соединенными конденсаторами, площадь пластин которых уменьшена вдвое: $S_1 = S_2 = S/2$, а расстояние между пластинами одинаково и равно $d = d_1 + d_2$. Поэтому искомая емкость

$$C = C + C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2(d_1 + d_2)} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2(d_1 + d_2)} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2(d_1 + d_2)} =$$

$$= \frac{(8{,}85 \cdot 10^{-12})(20 \cdot 10^{-4})(7+3)}{2(0{,}3 \cdot 10^{-3} + 0{,}7 \cdot 10^{-3})} = 88{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 88{,}5 \text{ пФ}.$$

Ответ: 1) 64,1 пФ; 2) 88,5 пФ

4. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин $S = 10^{-2}$ м^2 и расстоянием между ними $d_1 = 10^{-3}$ м заряжен от батареи до разности потенциалов $U = 100$ В. Затем пластины раздвигают до расстояния $d_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м. Найти энергию конденсатора до W_1 и после $W_{2а}$ и $W_{2б}$ раздвижения пластин, если батарея перед раздвижением а) не отключается; б) отключается.

Дано: $S = 10^{-2}$ м^2; $d_1 = 10^{-3}$ м; $U = 100$ В; $d_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: W_1; $W_{2а}$; $W_{2б}$.

Решение. Так как емкость конденсатора зависит от его геометрических размеров, то

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}.$$

Энергию конденсатора до раздвижения пластин можно определить по формуле

$$W_1 = C_1\frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_1} = 4{,}43 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

После раздвижения пластин емкость будет

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}.$$

В случае *а*, когда во время раздвижения пластин напряжение на обкладках постоянно, т.е $U = \text{const}$, энергия определяется по формуле

$$W_{2а} = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 1{,}77 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

В случае *б* на пластинах будет неизменным первоначальный заряд $Q = C_1 U$. Поэтому для нахождения энергии конденсатора воспользуемся выражением

$$W_{2б} = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S d_2 U^2}{2d_1^2} = 1{,}11 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Ответ: $W_1 = 4{,}43 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W_{2а} = 1{,}77 \cdot 10^{-7}$ Дж; $W_{2б} = 1{,}11 \cdot 10^{-5}$ Дж

5. В широкий сосуд с водой ($\varepsilon = 81$) вертикально опускаются пластины плоского конденсатора, подсоединенного к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора разность потенциалов $U = 6$ кВ (рис.). Расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ см. На какую высоту h поднимется жидкость между пластинами конденсатора? Плотность воды $\rho = 10^3\ \frac{кг}{м^3}$, ускорение свободного падения $g = 9{,}8\frac{м}{с^2}$. Жидкость несжимаема. Поверхностное натяжение пренебрежимо мало.

Дано: $\varepsilon = 81$; $U = 6$ кВ; $d = 0{,}5$ см; $g = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}; \rho = 10^3\ \frac{кг}{м^3}$.

Найти: h.

Решение. Устойчивое состояние любой системы характеризуется минимумом энергии. Найдем полную энергию W нашей системы, которая складывается из энергии электрического поля конденсатора $W_э$, потенциальной энергии поднятой жидкости $W_ж$ и энергии источника постоянного напряжения $W_и$. Рассмотрим каждое слагаемое отдельно.

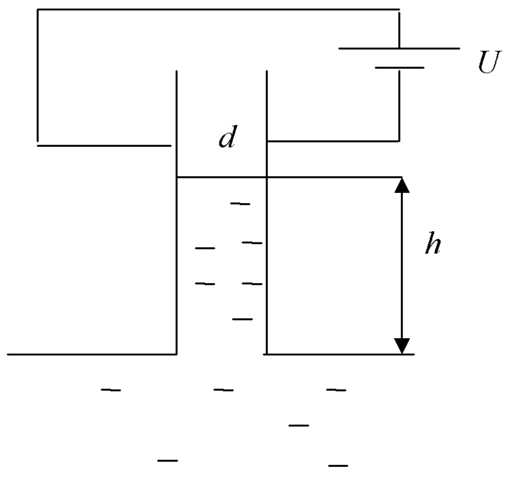


Рис.

Емкость нашего конденсатора равна сумме емкостей конденсатора с диэлектрической жидкостью высотой *h* и воздушного конденсатора высотой $(H - h)$:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon L h}{d} + \frac{\varepsilon_0 L (H - h)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L H}{d} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) L h}{d},$$

где H – высота пластин конденсатора; L – их длина.

До опускания пластин в жидкость электрическая емкость была равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L H}{d}.$$

Так как диэлектрическая проницаемость жидкости (ε = 81) больше единицы, то $C > C_0$. Увеличение емкости конденсатора связано с перетеканием заряда за счет работы, совершаемой источником напряжения:

$$\Delta Q = Q' - Q = CU - C_0 U = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) L h}{d} U.$$

Таким образом, электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, составляет

$$W_э = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 LH}{2d}U^2 + \frac{\varepsilon_0 L(\varepsilon - 1)h}{d}U^2.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости, центр тяжести которой находится на высоте $h/2$, а масса поднятой жидкости $m = \rho Ldh$, равна

$$W_ж = \rho Ldhg\frac{h}{2} = \frac{\rho Ldgh^2}{2}.$$

Обозначим исходную энергию источника напряжения через W_0.

При касании пластин конденсатора поверхности жидкости происходит перетекание заряда ΔQ, следовательно, источник затрачивает часть своей энергии на совершение работы

$$\Delta A = \Delta QU = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Lh}{d}U^2.$$

Очевидно, оставшаяся энергия источника напряжения составляет

$$W_u = W_0 - \Delta A = W_0 - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Lh}{d}U^2.$$

Тогда полная энергия рассматриваемой системы

$$W(h) = W_э + W_ж + W_и = W_0 + \frac{\varepsilon_0 LH}{2}U^2 + \rho\frac{Ldg}{2}h^2 - \frac{U^2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Lh}{2d}.$$

Приравняем нулю производную полной энергии по высоте *h*:

$$\frac{dW(h)}{dh} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)L}{2d} + \rho Ldgh = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая система будет обладать минимальной полной энергией при высоте жидкости

$$h_1 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2d^2\rho g} = \frac{(8{,}85 \cdot 10^{-12})(81 - 1)(6 \cdot 10^3)^2}{2(5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81} = 0{,}05 \text{ м} = 5 \text{ см}$$

Ответ: 5 см

6. Три одинаковые плоские металлические пластины площадью $S = 100$ см^2 и толщиной $d = 1$ мм каждая расположены параллельно друг другу (рис.) Расстояние между соседними пластинами равно их толщине. Крайние пластины подсоединены к электрической цепи. Определить электроемкость этой системы проводников. Принять, что диэлектрическая проницаемость окружающей пластины среды $\varepsilon = 1$.

Дано: $S = 100$ см^2; $d = 1$ мм; $\varepsilon = 1$.

Найти: C.

Решение. Воспользуемся формулой $Q = C\Delta\varphi$.

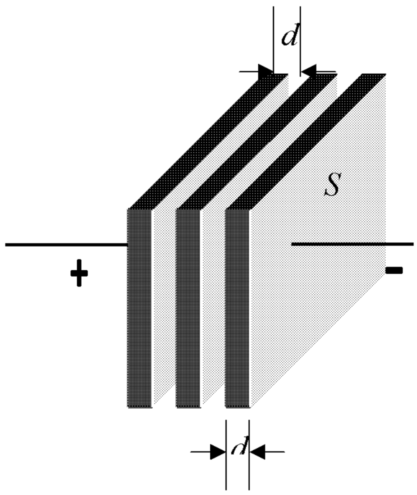


Рис.

Предположим, что крайним пластинам через электрическую цепь сообщили заряды $+Q$ и $-Q$. Так как пластины расположены близко друг от друга, то их можно считать бесконечными.

Внутри пластин электрическое поле отсутствует, а снаружи каждая из заряженных пластин создает электрическое поле напряженностью

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на пластинах.

Направления векторов напряженности полей таковы, что при их сложении вне зазоров между пластинами результирующее поле будет нулевым, а в зазорах напряженность равна

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2\vec{E}_+, \quad \text{т.е.} \quad E = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между соседними пластинами в однородном поле определим по формуле $\Delta\varphi = Ed$.

Тогда разность потенциалов между крайними пластинами

$$\Delta\varphi_{\text{сист}} = 2Ed = \frac{2Qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

По определению $C = \dfrac{Q}{\Delta\varphi_{\text{сист}}}$. Тогда $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d}$. Тогда

$$C = \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-3}}\,\Phi = 44{,}2\cdot 10^{-12}\ \Phi = 44{,}2\ \text{п}\Phi.$$

Ответ: 44,2 пФ

8. Энергия электростатического поля.

1. Металлический шар радиусом $R = 3$ см несет заряд $Q = 20$ нКл. Шар окружен слоем парафина толщиной $d = 2$ см. Определить энергию W электрического поля, заключенного в слое диэлектрика.

Дано: $R = 3$ см; $Q = 20$нКл; $d = 2$ см.

Найти: W.

Решение.

Так как поле, созданное заряженным шаром, является неоднородным, то энергия поля в слое диэлектрика распределена неравномерно.

Однако объемная плотность энергии будет одинакова во всех точках, отстоящих на равных расстояниях от центра сферы, так как поле заряженного шара обладает сферической симметрией.

Выразим энергию в элементарном сферическом слое диэлектрика объемом dV:

$$dW = \omega dV,$$

где ω – объемная плотность энергии (рис.).

Полная энергия выразится интегралом

$$W = \int \omega dV = 4\pi \int_R^{R+d} \omega r^2 dr, \qquad (1)$$

где r – радиус элементарного сферического слоя; dr – его толщина.

Объемная плотность энергии определяется по формуле

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2},$$

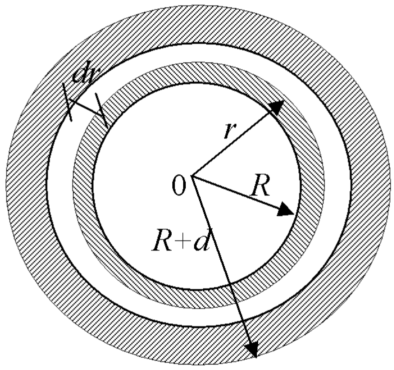


Рис.

где E – напряженность поля.

В нашем случае $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$ и, следовательно, $\omega = \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^4}$.

Подставив это выражение плотности в формулу (1) и вынеся за знак интеграла постоянные величины, получим

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^{R+d}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right) = \frac{Q^2 d}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R(R+d)} = 12 \text{ мкДж}.$$

Ответ: 12 мкДж

2. Определить собственную потенциальную энергию Π электростатического поля, которой обладает шар радиусом $R = 3$ см, несущий равномерно распределенный по объему заряд $Q = 5$ нКл.

Дано: $R = 3$ см; $Q = 5$ нКл.

Найти: Π.

Решение. Собственная потенциальная энергия равномерно заряженного по объему шара равна работе A внешних сил, которую нужно совершить, «собирая» шар из дифференциально малых порций зарядов dq, перенося их из бесконечности. Пусть шар уже имеет некоторый заряд q и радиус r.

Потенциал поверхности такого шара

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Для присоединения заряда dq необходимо совершить работ

$$dA_{\text{вн.сил}} = \varphi dq.$$

Эта работа равна приращению собственной потенциальной энергии

$$d\Pi = A_{\text{вн.сил}} = \varphi dq = \frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Будем считать, что заряд dq равномерно распределяется по поверхности шара радиуса r. Тогда

$$dq = \rho dV = \rho S dr = 4\pi r^2 \rho dr,$$

где ρ – объемная плотность заряда; dV – объем сферического слоя.

Тогда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \quad \text{и}$$

$$d\Pi = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0} r^4 4\pi\rho dr = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0} r^4 dr.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от 0 до R:

$$\Pi = \int_0^R d\Pi(r) = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho^2}{\varepsilon_0}\frac{R^5}{5}.$$

Так как $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}$ и $\rho^2 = \dfrac{Q^2}{(\frac{4\pi}{3})^2 R^6}$, то

$$\Pi = \frac{4\pi}{3}\frac{Q^2R^5}{(\frac{4\pi}{3})^2R^6 5\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \Pi = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Вычисляя, получим

$$\Pi = \frac{3}{5}\frac{5\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10}9\cdot 10^9 \text{ Дж} = 4{,}5\cdot 10^{-6} \text{ мкДж.}$$

Ответ: $\Pi = 4{,}5\cdot 10^{-6}$ мкДж.

9. Поле в диэлектрике.

1. В пространстве, наполовину заполненном парафином ($\varepsilon_2 = 2$), создано однородное электростатическое поле, напряженность которого в вакууме $E_1 =$ 4 В/м. Вектор $\vec{E}_1$ образует с плоской границей вакуум – слюда угол $\alpha =$ 60°. Определите в парафине:1) электрическое смещение D_2; 2) напряженность E_2 электростатического поля; 3) поляризованность P_2.

Дано: ε_2 = 2; E_1 = 4 В/м; α = 60°; ε_1 = 1.

Найти: 1) D_2; 2) E_2; 3) P_2.

Решение. Поскольку в задаче задан вектор $\vec{E}_1$ как по модулю, так и по направлению (рис.), то задано и направление вектора $\vec{D}_1$ в вакууме (рис.) (векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{D}_1$ параллельны).

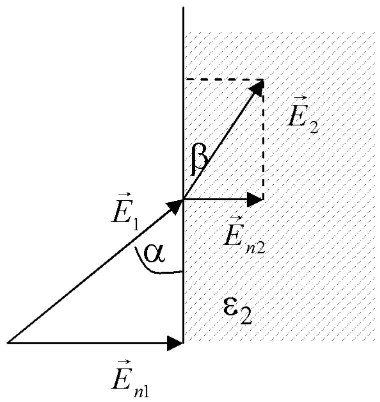


Рис.

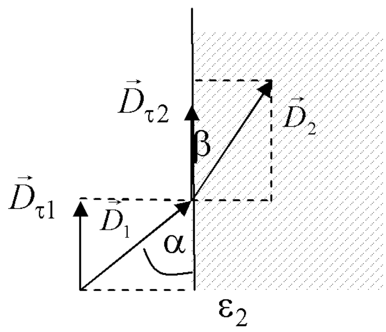


Рис.

Связь между нормальной и тангенциальной составляющими векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$

$$D_n = \varepsilon\varepsilon_0 E_n \quad \text{и} \quad D_\tau = \varepsilon\varepsilon_0 E_\tau. \tag{1}$$

При переходе через границу раздела тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}_1 = (E_\tau)$ и нормальная составляющая вектора $\vec{D}_1 = (D_n)$ не претерпевают скачка, т.е.

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad D_{n1} = D_{n2}, \tag{2}$$

а нормальная составляющая вектора $\vec{E}_1 = (E_n)$ и тангенциальная составляющая вектора $\vec{D}_1 = (D_\tau)$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \qquad (3)$$

что схематически изображено на рис.

Из формулы (3), учитывая, что $\varepsilon_1 = 1$, получим

$$E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad \text{и} \quad D_{\tau 1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}. \qquad (4)$$

Из рис. с учетом формул (1) и (4), следует, что

$$D_2 = \sqrt{D_{n2}{}^2 + D_{\tau 2}{}^2} = \sqrt{D_{n1}{}^2 + \varepsilon_2{}^2 D_{\tau 1}{}^2}.$$

В вакууме (см. рис. 10.35)

$$D_{n1} = D_1 \sin\alpha = \varepsilon_0 E_1 \sin\alpha; \quad D_{\tau 2} = D_1 \cos\alpha = \varepsilon_0 E_1 \cos\alpha.$$

Тогда искомое электрическое смещение в парафине

$$D_2 = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \varepsilon_2{}^2 \cos^2\alpha}$$

Из рис. с учетом формул (1) и (4) следует, что

$$E_2 = \sqrt{E^2{}_{n2} + E^2{}_{\tau 2}} = \sqrt{\frac{E^2{}_{n1}}{\varepsilon_2^2} + E^2{}_{\tau 1}}.$$

В вакууме (см. рис.) $E_{n1} = E_1 \sin\alpha$; $E_{\tau 1} = E_1 \sin\alpha$.

Тогда искомая напряженность электростатического поля в парафине

$$E_2 = E_1 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_2^2} + \cos^2\alpha}.$$

Поляризованность $\vec{P}$ связана с $\vec{E}_1$ и с $\vec{D}_1$ соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad ,$$

отсюда следует, что вектор $\vec{P}_2$ в парафине направлен так же, как вектор $\vec{D}_2$ (или $\vec{E}_2$).

Тогда искомая поляризованность в парафине

$$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2.$$

Вычисляя, получим:

1) $D_2 = 46$ пКл/м^2; 2) $E_2 = 2{,}6$ В/м; 3) $P_2 = 23$ пКл/м^2.

Ответ: 1) $D_2 = 46$ пКл/м^2; 2) $E_2 = 2{,}6$ В/м; 3) $P_2 = 23$ пКл/м^2.

2. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата парафиновая пластинка ($\varepsilon =$ 2) толщиной 5 мм. Определите поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Дано: U = 1,5 кВ; $\varepsilon =$ 2; d = 5 мм.

Найти: σ'.

Решение. Векторы $\vec{D}$, $\vec{E}$ и $\vec{P}$ связаны соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где $\vec{D}$ и $\vec{E}$ – соответственно векторы электрического смещения и напряженности поля плоского конденсатора; $\vec{P}$ – вектор поляризованности диэлектрика.

Так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то

$$D_n = D \quad \text{и} \quad E_n = E.$$

Тогда можем записать $D = \varepsilon_0 E + P$,
где $p = \sigma'$, т.е. равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика (учли, что $p_n = p$).

Тогда $\sigma' = D - \varepsilon_0 E$.

Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ и $E = \dfrac{U}{d}$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, найдем

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 2{,}65 \text{ мкКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma' = 2{,}65$ мкКл/м^2

3. Расстояние между обкладками плоского конденсатора d = 1 мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов U = 700 В между обкладками вставили стеклянную пластинку ($\varepsilon =$ 7).

Определите: 1) диэлектрическую восприимчивость χ стекла; 2) поверхностную плотность σ' связанных зарядов на стеклянной пластине.

Дано: d = 1 мм; U = 700 В; $\varepsilon =$ 7.

Найти: 1) χ; 2) σ'.

Решение. Связь диэлектрической проницаемости ε и диэлектрической восприимчивости χ

$$\varepsilon = 1 + \chi, \quad \text{откуда искомая} \quad \chi = \varepsilon - 1.$$

Напряженность поля внутри конденсатора после его зарядки

$$E_0 = \frac{U}{d}, \tag{1}$$

а после того, как в конденсатор вставили диэлектрик, с учетом формулы (1)

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon d}.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов σ' равна поляризованности P:

$$\sigma' = P.$$

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$P = \chi\varepsilon_0 E.$$

Тогда искомая поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \chi\varepsilon_0 E = \frac{\chi\varepsilon_0 U}{\varepsilon d}.$$

Вычисляя, получаем:

$$1)\ \chi = 6;\quad 2)\ \sigma' = 5{,}31\ \text{мКл/м}^2.$$

Ответ: 1) $\chi = 6$; 2) $\sigma' = 5{,}31$ мКл/м^2.

4. Пространство между обкладками плоского конденсатора с площадью обкладок $S = 100$ см^2 заполнено эбонитом ($\varepsilon = 3$). Определите поверхностную плотность σ' связанных зарядов на эбоните, если обкладки конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 10$ мН.

Дано: $S = 100$ см^2; $\varepsilon = 3$; $F = 10$ мН.

Найти: σ'.

Решение. Поверхностная плотность σ' связанных зарядов равна поляризованности P: $\sigma' = P$.

Поляризованность диэлектрика P и напряженность E электростатического поля связаны соотношением

$$P = \chi\varepsilon_0 E,$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика:

$$\chi = \varepsilon - 1$$

(ε – диэлектрическая проницаемость).

Учитывая вышесказанное, получим, что

$$\sigma' = P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E. \qquad (1)$$

Напряженность электростатического поля

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора, которую найдем из формулы для силы притяжения между обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Учли, что заряд на обкладках конденсатора $Q = \sigma \cdot S$.

Тогда

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 |F|}{S}}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$E = \sqrt{\frac{2|F|}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}. \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулу (1), найдем искомую плотность связанных зарядов на эбоните:

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 |F|}{\varepsilon S}} = 4{,}86 \text{ мкКл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma' = 4{,}86$ мкКл/м^2