# *МАТЕМАТИКА*

**УДК 517.983**

## РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ В $L_{\nu,r}$ - ПРОСТРАНСТВАХ

***канд. физ.-мат. наук, доц. О.В. СКОРОМНИК, Ю.В. ЖАВОРОНОК***
***(Полоцкий государственный университет)***

*Исследуются четыре интегральных уравнения первого рода на положительной полуоси, содержащие гипергеометрическую функцию Гаусса в ядрах. С использованием представлений интегральных операторов левых частей рассматриваемых уравнений в виде композиции двух операторов дробного интегрирования со степенными весами доказываются условия их ограниченности из одних весовых пространств суммируемых функций в другие. Эти результаты применяются для вывода явных формул решений изучаемых интегральных уравнений в рассматриваемых пространствах.*

**Предварительные сведения**

Рассмотрим четыре интегральных уравнения:

$$ {}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_0^x \frac{\left(x^{\delta}-t^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^{\delta}}{t^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = f(x)\ (x>0)\ ; \tag{1} $$

$$ {}_2\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_0^x \frac{\left(x^{\delta}-t^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t^{\delta}}{x^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = f(x)\ (x>0)\ ; \tag{2} $$

$$ {}_3\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_x^\infty \frac{\left(t^{\delta}-x^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^{\delta}}{t^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = f(x)\ (x>0)\ ; \tag{3} $$

$$ {}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_x^\infty \frac{\left(t^{\delta}-x^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t^{\delta}}{x^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = f(x)\ (x>0)\ , \tag{4} $$

$\sigma,\omega\in R,\ \delta>0,$ содержащих в ядре гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$, которая определяется при комплексных $a,b,c$ и $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда [1]:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}, \quad c\neq 0,-1,-2,\ldots, \tag{5} $$

а $(a)_k = a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$, $k=1,2,3\ldots,(a)_0\equiv 1$ – символ Похгаммера.

Интегралы

$$ \left(\mathrm{I}^{\alpha}_{0+}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}dt, \quad \left(\mathrm{I}^{\alpha}_{-}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^\infty\frac{\varphi(t)}{\left(t-x\right)^{1-\alpha}}dt \quad (x>0), $$

где $\alpha\in C,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0$, называются интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка α [2].

Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним.

Операторы $\mathrm{I}^{\alpha}_{0+}, \mathrm{I}^{\alpha}_{-}$ называют операторами дробного интегрирования.

Для функции $f(x)$, заданной на полуоси $(0,\infty)$, каждое из выражений

$$\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n=\left[\mathrm{Re}(\alpha)\right]+1,$$

$$\left(D_{-}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_x^\infty \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n=\left[\mathrm{Re}(\alpha)\right]+1$$

называется дробной производной порядка $\alpha\in C, \mathrm{Re}(\alpha)\geq 0$ на полуоси соответственно левосторонней и правосторонней [2].

Для степенной функции $\varphi(x)=x^{\beta-1}, \mathrm{Re}(\beta)>0$, имеем [2, (2.44)]:

$$\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}\varphi=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}x^{\alpha+\beta-1}, \mathrm{Re}(\alpha)>0, \tag{6}$$

$$D_{0+}^{\alpha}\varphi=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{\beta-\alpha-1}, \mathrm{Re}(\alpha)\geq 0. \tag{7}$$

Для степенной функции $\varphi(x)=x^{\beta-1}$ [2, табл. 9.3, формула (1)]

$$\mathrm{I}_{-}^{\alpha}\varphi=\frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{\alpha+\beta-1}, \mathrm{Re}(\alpha+\beta)<1, \tag{8}$$

$$D_{-}^{\alpha}\varphi=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{\beta-\alpha-1}, \mathrm{Re}(n-\alpha+\beta)<1, n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1. \tag{9}$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\mathrm{I}_{0+}^{\alpha} f=\begin{cases}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha} f, \mathrm{Re}(\alpha)>0,\\ D_{0+}^{-\alpha} f, \mathrm{Re}(\alpha)\leq 0;\end{cases} \qquad \mathrm{I}_{-}^{\alpha} f=\begin{cases}\mathrm{I}_{-}^{\alpha} f, \mathrm{Re}(\alpha)>0,\\ D_{-}^{-\alpha} f, \mathrm{Re}(\alpha)\leq 0.\end{cases}$$

Нам потребуется обобщенное неравенство Минковского [2, формула (1.33)]:

$$\left(\int\limits_{\Omega_1} dx\left|\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{\Omega_2} dy\left(\int\limits_{\Omega_1}|f(x,y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

Введем пространство $L_{\nu,r}$, измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций $f$ на $R_+=(0,\infty)$, для которых $\|f\|_{\nu,r}<\infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r}=\left(\int\limits_0^\infty\left|t^{\nu} f(t)\right|^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (1\leq r<\infty, \nu\in R), \quad \|f\|_{\nu,\infty}=ess\sup_{t>0}\left[t^{\nu}\left|f(x)\right|\right] \quad (r=\infty). \tag{11}$$

Для функции $f$ определим почти всюду в $R_+$ элементарные операторы $M_\xi$, $N_a$:

$$\left(M_\xi f\right)(x)=x^{\xi}f\left(x\right) \quad (\xi\in C), \quad \left(N_a f\right)(x)=f\left(x^a\right) \quad (a\in R, a\neq 0). \tag{12}$$

Эти операторы обладают следующими свойствами.

**Лемма 1** [3]. Для $\nu\in R$ и $1\leq r<\infty$ верны следующие утверждения:

**(a)** $M_\xi$ является изометрическим изоморфизмом $L_{\nu,r}$ на $L_{\nu-\mathrm{Re}(\xi),r}$;

$M_\xi^{-1}$ является изометрическим изоморфизмом $L_{\nu,r}$ на $L_{\nu+\mathrm{Re}(\xi),r}$, и $M_\xi^{-1}=M_{-\xi}$;

**(b)** $N_a$ является ограниченным изоморфизмом $L_{\nu,r}$ на $L_{a\nu,r}$;

$N_a^{-1}$ является ограниченным изоморфизмом $L_{\nu,r}$ на $L_{\nu/a,r}$, и $N_a^{-1} = N_{1/a}$.

Пусть комплексные числа $\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ такие, что существует одно $\alpha_j$, для которого $\mathrm{Re}\alpha_j = \min(\mathrm{Re}\alpha_1,...,\mathrm{Re}\alpha_n,\mathrm{Re}\alpha_{n+1})$. Тогда положим $\alpha_{n+1}=0$ и введем функцию [2, § 10]:

$$m(\alpha_1,...,\alpha_n) = \begin{cases} 0, \quad \mathrm{Re}\alpha_j > 0, i = 1,2,...,n. \\ -\alpha_j, \text{если существует } \alpha_j, \text{ для которого} \\ \mathrm{Re}\alpha_j < \min(0,\mathrm{Re}\alpha_1,...,\mathrm{Re}\alpha_{j-1},\mathrm{Re}\alpha_{j+1},...,\mathrm{Re}\alpha_n) \end{cases} \tag{13}$$

(если существуют $\alpha_j,\alpha_k$ такие, что $\alpha_j \neq \alpha_k$, но $\mathrm{Re}\alpha_j = \mathrm{Re}\alpha_k = \min(0,\mathrm{Re}\alpha_1,...,\mathrm{Re}\alpha_n)$, то функция $m(\alpha_1,...,\alpha_n)$ не определяется);

$$\mathrm{I}_{0+}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r}) = \begin{cases} L_{\nu,r}, \quad \mathrm{Re}\alpha > 0, \\ \mathrm{I}_{0+}^{-\alpha}(L_{\nu,r}), \mathrm{Re}\alpha < 0, \end{cases}; \quad \mathrm{I}_{-}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r}) = \begin{cases} L_{\nu,r}, \quad \mathrm{Re}\alpha > 0, \\ \mathrm{I}_{0-}^{-\alpha}(L_{\nu,r}), \mathrm{Re}\alpha < 0, \end{cases} \quad (1 < r < \infty). \tag{14}$$

Справедливы следующие утверждения.

**Лемма 2** [2, теорема 5.4]. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < m + \frac{1}{p}, 0 \le m \le \alpha, q = \frac{p}{1-(\alpha-m)p}$ и $m \neq 0$ при $p = 1$, тогда операторы $\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}$, $\mathrm{I}_{-}^{\alpha}$ ограничены из $L_{\frac{\mu+1}{p},p}$ в $L_{\frac{\nu+1}{q},q}$, $\nu = (\mu/p - m)q$:

$$\left(\int_0^\infty x^\nu \left|(\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)\right|^q dx\right)^{1/q} \le \kappa_1 \left(\int_0^\infty x^\mu |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}, \ \mu < p-1; \tag{15}$$

$$\left(\int_0^\infty x^\nu \left|(\mathrm{I}_{-}^{\alpha}\varphi)(x)\right|^q dx\right)^{1/q} \le \kappa_2 \left(\int_0^\infty x^\mu |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}, \ \mu > \alpha p - 1, \tag{16}$$

где $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$ – некоторые постоянные.

**Лемма 3** [5, лемма 4]. Пусть $\psi(x) \in L_{\nu,r}$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, \mathrm{Re}(\alpha), 0), \alpha \neq 0,1,2,3...$ и $\mathrm{I}_{0+}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r})$ дается (14). Тогда для того чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = \mathrm{I}_{0+}^{\alpha} x^{\mu} f(x)$, где $f(x) \in \mathrm{I}_{0+}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r})$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = x^{\mu}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha} g(x)$, где $g(x) \in \mathrm{I}_{0+}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r})$, или в виде $\psi(x) = x^{\mu-\varepsilon}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha} x^{\varepsilon} g_1(x)$, где $g_1(x) \in \mathrm{I}_{0+}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r})$.

Из указанных классов функций операторы $\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}x^{\mu}$, $x^{\mu}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}$ и $x^{\mu-\varepsilon}\mathrm{I}_{0+}^{\alpha}x^{\varepsilon}$ при $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, \mathrm{Re}(\alpha), 0)$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 1,2,3...$, ограниченно действуют на пространство $L_{\nu-\mu-\alpha,r}$.

**Лемма 4** [5, лемма 5]. Пусть $\psi(x) \in L_{1-\nu-\alpha,r}$, $1 < r < \infty$, $\nu < 1 + \min(\mu, \mathrm{Re}(\alpha), 0), \alpha \neq 0,1,2,3...$ и $\mathrm{I}_{-}^{m(\alpha)}(L_{\nu,r})$ дается (14). Тогда для того чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = \mathrm{I}_{-}^{\alpha}x^{-\mu}f(x)$, где $f(x) \in \mathrm{I}_{-}^{m(\alpha)}(L_{1-\nu+\tilde{\alpha},r}), \tilde{\alpha} = sign\mathrm{Re}(\alpha)\cdot\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = x^{-\mu}\mathrm{I}_{-}^{\alpha}g(x)$, где $g(x) \in \mathrm{I}_{-}^{m(\alpha)}(L_{1-\nu+\tilde{\alpha},r})$, или в виде $\psi(x) = x^{\varepsilon-\mu}\mathrm{I}_{-}^{\alpha}x^{-\varepsilon}g_1(x)$, где $g_1(x) \in \mathrm{I}_{-}^{m(\alpha)}(L_{1-\nu+\tilde{\alpha},r})$.

**ТЕОРЕМЫ о действии операторов ${}_j\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)$ $(j=1,2)$, ${}_j\mathrm{I}^c_{-}(a,b)$ $(j=3,4)$ в $L_{\nu,r}$ - пространствах**

Рассмотрим интегральные уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса (5) в ядре [2, § 35], являющиеся частными случаями уравнений (1)–(4) соответственно:

$$ {}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) \equiv {}_1\mathrm{I}^c_{0,0;1}(a,b)\varphi(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt = f(x)\,; \tag{17}$$

$$ {}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) \equiv {}_2\mathrm{I}^c_{0,0;1}(a,b)\varphi(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t}{x}\right)\varphi(t)dt = f(x)\,; \tag{18}$$

$$ {}_3\mathrm{I}^c_{-}(a,b)\varphi(x) \equiv {}_3\mathrm{I}^c_{0,0;1}(a,b)\varphi(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt = f(x)\,; \tag{19}$$

$$ {}_4\mathrm{I}^c_{-}(a,b)\varphi(x) \equiv {}_4\mathrm{I}^c_{0,0;1}(a,b)\varphi(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t}{x}\right)\varphi(t)dt = f(x)\,. \tag{20}$$

В [4] были получены следующие композиционные разложения для операторов левых частей этих уравнений в пространствах $L_{\nu,r}$, $1<r<+\infty$:

$$ {}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = \mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi(x)\,;\quad {}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = x^{c-a-b}\mathrm{I}^b_{0+}x^{a-c}\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^b\varphi(x)\,; \tag{21}$$

$$ {}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = x^a\mathrm{I}^b_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^{c-b}_{0+}\varphi(x)\,;\quad {}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = x^b\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{a-c}\mathrm{I}^b_{0+}x^{c-a-b}\varphi(x)\,; \tag{22}$$

$$ {}_3\mathrm{I}^c_{-}(a,b)\varphi(x) = x^{c-a-b}\mathrm{I}^b_{-}x^{a-c}\mathrm{I}^{c-b}_{-}x^b\varphi(x)\,;\quad {}_3\mathrm{I}^c_{-}(a,b)\varphi(x) = \mathrm{I}^{c-b}_{-}x^{-a}\mathrm{I}^b_{-}x^a\varphi(x)\,; \tag{23}$$

$$ {}_4\mathrm{I}^c_{-}(a,b)\varphi(x) = x^a\mathrm{I}^b_{-}x^{-a}\mathrm{I}^{c-b}_{-}\varphi(x)\,;\quad {}_4\mathrm{I}^c_{-}(a,b)\varphi(x) = x^b\mathrm{I}^{c-b}_{-}x^{a-c}\mathrm{I}^b_{-}x^{c-a-b}\varphi(x)\,. \tag{24}$$

Имеет место следующее утверждение, устанавливающее ограниченность оператора ${}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)$, стоящего в левой части (17), и справедливость представлений (21) в весовом пространстве $L_{\nu,r}$, $1<r<+\infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $c,a,b,\nu\in R$, $1<r<+\infty$, $c>b>0$, $a-b\notin Z$, $c,b\notin N$ и $\nu<\min(0,a,b,c-b)+1$. Тогда оператор ${}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-c,r}$, причем, имеют место равенства (21).

*Доказательство.* Покажем, что ${}_1\mathrm{I}^c_{0+}$ ограниченно действует из $L_{\nu,r}$ в $L_{\nu-c,r}$, т.е. выполняется следующее неравенство:

$$ \left\| {}_1\mathrm{I}^c_{0+}\varphi \right\|_{L_{\nu-c,r}} \le k\|\varphi\|_{L_{\nu,r}}\,, $$

где $k>0$ – некоторая постоянная.

Положим $\mathrm{K}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\dfrac{x}{t}\right), & x>t \\ 0, & x<t \end{cases}$, $\mathrm{K}(x,t)$ – однородное ядро степени $(c-1)$, т.е. выполняется условие $\mathrm{K}(\lambda x,\lambda t)=\lambda^{c-1}\mathrm{K}(x,t)$, $(\lambda>0)$.

Осуществляя замену $t=x\tau$ и используя однородность ядра, имеем

$$ \left({}_1\mathrm{I}^c_{0+}\varphi\right)(x) \equiv \int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\varphi(t)dt = \int_0^\infty \mathrm{K}(x,x\tau)\varphi(x\tau)x\,d\tau = x^c\int_0^1 \mathrm{K}(1,t)\varphi(xt)dt. $$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (10), находим

$$\|\mathrm{K}\varphi\|_{L_{\nu-c,r}}=\left(\int\limits_0^\infty x^{\nu r-cr-1}\left|\int\limits_0^1 \mathrm{K}(1,t)\varphi(xt)x^c dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\le\int\limits_0^1|\mathrm{K}(1,t)|\,dt\left(\int\limits_0^\infty x^{\nu r-cr-1}x^{cr}\,|\varphi(xt)|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}=$$

$$=\int\limits_0^1|\mathrm{K}(1,t)|t^{-\nu}dt\left(\int\limits_0^\infty \tau^{\nu r-1}|\varphi(\tau)|^r\,d\tau\right)^{\frac{1}{r}}=k\|\varphi\|_{L_{\nu,r}}\,,$$

где

$$k=\int\limits_0^1|\mathrm{K}(1,t)|t^{-\nu}dt\,. \tag{25}$$

Непосредственно проверяется, что несобственный интеграл (25) сходится при $c>b>0$, $a-b\notin Z$, $\nu<\min(a,b)+1$.

Таким образом, неравенство

$$\left\|{}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi\right\|_{L_{\nu-c,r}}\le\ k\|\varphi\|_{L_{\nu,r}}$$

выполняется при условиях, что $a-b\notin Z$, $c>b>0$, $\nu<\min\left(a,b\right)+1$.

Рассмотрим далее преобразование $\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi$, $\varphi\in L_{\nu,r}$.

На основании леммы 3 оператор $\mathrm{I}^b_{0+}x^a$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu,r}$ на $L_{\nu-a-b,r}$:

$$\left\|\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi\right\|_{L_{\nu-a-b,r}}=\left(\int\limits_0^\infty x^{\nu r-ar-br-1}\left|\left(\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi(x)\right)\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\le k_1\left(\int\limits_0^\infty x^{\nu r-ar-1}\left|x^a\varphi(x)\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}=k_1\|\varphi\|_{L_{\nu,r}}\,, \tag{26}$$

при выполнении условий $\nu<1+\min(a,b,0),\, b>0,\, b\ne 1,2,3\ldots,1<r<\infty$ и имеет место равенство

$$\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi=x^a\mathrm{I}^b_{0+}\varphi_1,\ \varphi_1\in L_{\nu,r}\,.$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi=\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}x^a\mathrm{I}^b_{0+}\varphi_1=\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\varphi_2\,,\ \varphi_2\in L_{\nu-a-b,r}\,.$$

По лемме 3 оператор $\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}$ ограниченно действует из $L_{\nu-a-b,r}$ на $L_{\nu-c,r}$:

$$\left\|\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi\right\|_{L_{\nu-c,r}}\le\ k_2\left\|x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi\right\|_{L_{\nu-b,r}} \tag{27}$$

при выполнении условий $\nu<1+\min(b,a+c,a+b),\, c-b>0,\, c-b\ne 1,2,3\ldots,\ 1<r<\infty$.

Следовательно, из (26), (27) следует, что оператор $\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu,r}$ на пространство $L_{\nu-c,r}$ при выполнении условий $\nu<\min\left(0,a,b,c-b\right)+1$, $c>b>0$, $1<r<\infty$, $c,b\notin N$.

Аналогично показывается, что оператор $x^{c-a-b}\mathrm{I}^b_{0+}x^{a-c}\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^b$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu,r}$ на пространство $L_{\nu-c,r}$ при выполнении условий $\nu<\min\left(0,a,b,c-b\right)+1$, $c>b>0$, $1<r<\infty$, $c,b\notin N$. Это завершает доказательство теоремы.

Аналогично доказывается следующее утверждение, устанавливающее ограниченность оператора ${}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)$, стоящего в левой части (18), и справедливость представлений (22) в весовом пространстве $L_{\nu,r}$, $1<r<+\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $1 < r < +\infty$, $c > b > 0$, $a - b \notin Z$, $c, b \notin N$ и $\nu < \min(0, b, c-b, c-a-b) + 1$. Тогда оператор ${}_2\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-c,r}$, причем имеют место равенства (22).

Аналогично доказательству теоремы 1 на основании леммы 4 доказываются следующие утверждения, устанавливающие ограниченность операторов ${}_j\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)$ $(j = 3, 4)$, стоящих в левых частях (19), (20) и справедливость представлений (23), (24) в весовых пространствах $L_{\nu,r}$, $1 < r < +\infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $1 < r < +\infty$, $c > b > 0$, $a - b \notin Z$, $c, b \notin N$ и $\nu > \max(c, c-b, b, a+b)$. Тогда оператор ${}_3\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-c,r}$, причем имеют место равенства (23).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $1 < r < +\infty$, $c > b > 0$, $a - b \notin Z$, $c, b \notin N$ и $\nu > \max(c, c-a, c-b, b)$. Тогда оператор ${}_4\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-c,r}$, причем имеют место равенства (24).

**ТЕОРЕМЫ о действии операторов ${}_j\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)$ $(j = 1,2,3,4)$ в $L_{\nu,r}$ - пространствах**

Операторы преобразований ${}_1\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)$, ${}_2\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)$, ${}_3\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)$, ${}_4\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)$ могут быть представлены как композиции операторов ${}_1\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)$, ${}_2\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)$, ${}_3\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)$, ${}_4\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)$ соответственно и элементарных операторов $M_\xi$ и $N_a$, определенных в (12).

Действительно,

$$ {}_1\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)\varphi(x) = x^{\sigma}\int_0^x \frac{(x^\delta - t^\delta)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^{\omega}\varphi(t)dt = \left[ t^\delta = \tau,\ t = \tau^{\frac{1}{\delta}},\ dt = \frac{1}{\delta}\tau^{\frac{1}{\delta}-1}d\tau \right] = $$

$$ = \frac{1}{\delta}x^{\sigma}\int_0^{x^\delta} \frac{(x^\delta - \tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{\tau}\right) \tau^{\frac{\omega+1}{\delta}-1}\varphi(\tau^{\frac{1}{\delta}})d\tau = $$

$$ = x^{\sigma}\left( {}_1\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)\left(\frac{1}{\delta}M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi\right)(t)\right)\left(x^\delta\right) = \frac{1}{\delta}M_\sigma N_\delta\, {}_1\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi . $$

Таким образом, имеем

$$ {}_1\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta}M_\sigma N_\delta\, {}_1\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi . \tag{28} $$

Аналогично получаем

$$ {}_2\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta}M_\sigma N_\delta\, {}_2\mathrm{I}_{0+}^{c}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi ; \tag{29} $$

$$ {}_3\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta}M_\sigma N_\delta\, {}_3\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi ; \tag{30} $$

$$ {}_4\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)\varphi(x) = \frac{1}{\delta}M_\sigma N_\delta\, {}_4\mathrm{I}_{-}^{c}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\varphi . \tag{31} $$

Ограниченность операторов ${}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$, ${}_2\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$, ${}_3\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$, ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$, стоящих в левых частях (1)–(4), и справедливость представлений (28)–(31) в весовом пространстве $L_{\nu,r}$, $1<r<+\infty$, устанавливают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $c,a,b,\nu,\omega,\sigma\in R$, $\delta>0, 1<r<\infty$, $c>b>0$, $c,b\notin N$, $a-b\notin Z$, $\nu<\delta\min(0,a,b,c-b)+\omega+1$. Тогда оператор ${}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1,r}$, причем имеет место равенство (28).

*Доказательство.* Аналогично доказательству теоремы 1 на основании обобщенного неравенства Минковского (10) доказывается, что оператор ${}_1\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu,r}$ на пространство $L_{\nu-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1,r}$ при выполнении условий $a-b\notin Z$, $\nu<\delta\min(a,b)+\omega+1, \delta>0$, $c>b>0$.

Рассмотрим оператор $\frac{1}{\delta}M_{\sigma}N_{\delta}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$, где $\mathrm{I}$ – тождественный оператор.

Так как $\varphi\in L_{\nu,r}$, тогда на основании леммы 1 оператор $N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu,r}$ на пространство $L_{\frac{\nu}{\delta},r}$.

Согласно лемме 1 оператор $M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$ ограниченно действует из пространства $L_{\frac{\nu}{\delta},r}$ на пространство $L_{\frac{\nu-\omega-1}{\delta}+1,r}$.

По теореме 1 оператор ${}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$ ограниченно действует из пространства $L_{\frac{\nu-\omega-1}{\delta}+1,r}$ на пространство $L_{\frac{\nu-\omega-1}{\delta}-c+1,r}$ при выполнении условий $\nu<\delta\min(0,a,b,c-b)+\omega+1$, $c>b>0$, $c,b\notin N$, $1<r<\infty$.

На основании леммы 1 оператор $N_{\delta}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$ ограниченно действует из пространства $L_{\frac{\nu-\omega-1}{\delta}-c+1,r}$ на пространство $L_{\nu-\omega-\delta(c-1)-1,r}$.

В силу леммы 1 оператор $\frac{1}{\delta}M_{\sigma}N_{\delta}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu-\omega-\delta(c-1)-1,r}$ на пространство $L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$.

Следовательно, оператор $\frac{1}{\delta}M_{\sigma}N_{\delta}\,{}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)M_{\frac{\omega+1}{\delta}-1}N_{\frac{1}{\delta}}\mathrm{I}$ ограниченно действует из пространства $L_{\nu,r}$ на пространство $L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$ при выполнении условий: $c>b>0$, $c,b\notin N$, $\nu<\delta\min(0,a,b,c-b)+\omega+1$, $1<r<\infty$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $c,a,b,\nu,\omega,\sigma\in R$, $\delta>0, 1<r<\infty$, $c>b>0, c,b\notin N$, $a-b\notin Z$, $\nu<\delta\min(0,b,c-b,c-a-b)+\omega+1$. Тогда оператор ${}_2\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1,r}$, причем имеет место равенство (29).

*Доказательство* проводится аналогично доказательству теоремы 5, с использованием леммы 1 и результатов теоремы 2.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $c, a, b, \nu, \omega, \sigma \in R$, $\delta > 0, 1 < r < \infty$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a-b \notin Z$, $\nu > \delta \max(c, c-b, b, a+b) - \omega$. Тогда оператор ${}_3\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1,r}$, причем имеет место равенство (30).

*Доказательство* проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием леммы 1 и результатов теоремы 3.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $c, a, b, \nu, \omega, \sigma \in R$, $\delta > 0, 1 < r < \infty$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a-b \notin Z$, $\nu > \delta \max(c, c-a, c-b, b) - \omega$. Тогда оператор ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)$ определен на множестве $L_{\nu,r}$ и ограниченно отображает $L_{\nu,r}$ на множество $L_{\nu-\delta(c-1)-\omega-\sigma-1,r}$, причем имеет место равенство (31).

*Доказательство* проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием леммы 1 и результатов теоремы 4.

### РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ${}_j\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\,\varphi = f \;\; (j=1,2)$, ${}_j\mathrm{I}^{c}_{-}(a,b)\,\varphi = f \;\; (j=3,4)$ в $L_{\nu,r}$ - пространствах

В [4] из формул (21)–(24) были получены следующие представления решений уравнений (17)–(20) в пространствах $L_{\nu,r}$:

$$\varphi(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+} f(x)\,; \quad \varphi(x) = x^{-b}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}x^{c-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{a+b-c} f(x)\,; \tag{32}$$

$$\varphi(x) = \mathrm{I}^{b-c}_{0+}x^{a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{-a} f(x)\,; \quad \varphi(x) = x^{a+b-c}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{c-a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}x^{-b} f(x)\,; \tag{33}$$

$$\varphi(x) = x^{-b}\mathrm{I}^{b-c}_{-}x^{c-a}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{a+b-c} f(x)\,; \quad \varphi(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{a}\mathrm{I}^{b-c}_{-} f(x)\,; \tag{34}$$

$$\varphi(x) = \mathrm{I}^{b-c}_{-}x^{a}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{-a} f(x)\,; \quad \varphi(x) = x^{a+b-c}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{c-a}\mathrm{I}^{b-c}_{-}x^{-b} f(x)\,. \tag{35}$$

Тогда из теоремы 1, теоремы 2, теоремы 3 и теоремы 4 вытекают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 9 [5, теорема 5]. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a-b \notin Z$, $\nu < \min(0, a, b, c-b) + 1$, $1 < r < \infty$, $f(x) \in L_{\nu-c,r}$. Уравнение (17) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (32).

ТЕОРЕМА 10. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $c > b > 0$, $1 < r < \infty$, $\nu < \min(0, b, c-b, c-a-b) + 1$, $c, b \notin N$, $a-b \notin Z$, $f(x) \in L_{\nu-c,r}$. Уравнение (18) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (33).

ТЕОРЕМА 11. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $c > b > 0$, $1 < r < \infty$, $\nu > \max(c, c-b, b, a+b)$, $c, b \notin N$, $f(x) \in L_{\nu-c,r}$. Уравнение (19) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (34).

ТЕОРЕМА 12 [5, теорема 6]. Пусть $c, a, b, \nu \in R$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a-b \notin Z$, $\nu > \max(c, c-a, c-b, b)$, $1 < r < \infty$, $f(x) \in L_{\nu-c,r}$. Уравнение (20) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (35).

### РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}(a,b)\varphi = f\,(j=1,2,3,4)$ в $L_{\nu,r}$ - пространствах

На основании леммы 1, теоремы 5, теоремы 6, теоремы 7, теоремы 8 и представлений (32)–(35) получаем следующие представления решений уравнений (1)–(4):

$$\varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_{a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{36}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b} \mathrm{I}_{0+}^{b-c} M_{c-a} \mathrm{I}_{0+}^{-b} M_{a+b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{37}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} \mathrm{I}_{0+}^{b-c} M_a \mathrm{I}_{0+}^{-b} M_{-a} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{38}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c} \mathrm{I}_{0+}^{-b} M_{c-a} \mathrm{I}_{0+}^{b-c} M_{-b} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{39}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b} \mathrm{I}_{-}^{b-c} M_{c-a} \mathrm{I}_{-}^{-b} M_{a+b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{40}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a} \mathrm{I}_{-}^{-b} M_a \mathrm{I}_{-}^{b-c} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{41}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} \mathrm{I}_{-}^{b-c} M_a \mathrm{I}_{-}^{-b} M_{-a} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,; \tag{42}$$

$$\varphi(x) = \delta N_\delta M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c} \mathrm{I}_{-}^{-b} M_{c-a} \mathrm{I}_{-}^{b-c} M_{-b} N_{\frac{1}{\delta}} M_{-\sigma} f(x)\,. \tag{43}$$

ТЕОРЕМА 13. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in R$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a - b \notin Z$, $1 < r < \infty$, $\nu < \delta \min(0, a, b, c-b) + \omega + 1$, $f(x) \in L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$. Уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (36) или (37).

ТЕОРЕМА 14. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in R$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a - b \notin Z$, $1 < r < \infty$, $\nu < \delta \min(0, b, c-b, c-a-b) + \omega + 1$, $f(x) \in L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$. Уравнение (2) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (38) или (39).

ТЕОРЕМА 15. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in R$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a - b \notin Z$, $1 < r < \infty$, $\nu > \delta \max(c, c-b, b, a+b) - \omega$, $f(x) \in L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$. Уравнение (3) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (40) или (41).

ТЕОРЕМА 16. Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in R$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a - b \notin Z$, $1 < r < \infty$, $\nu > \delta \max(c, c-a, c-b, b) - \omega$, $f(x) \in L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$. Уравнение (4) имеет единственное решение $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемое формулами (42) или (43).

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ $_j\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}(a,b)\varphi = f\,(j = 1,2,3,4)$

Пусть $c, a, b, \omega, \nu, \sigma \in R$, $\delta > 0$, $c > b > 0$, $c, b \notin N$, $a - b \notin Z, d > 0$. Пусть $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $f(x) = Ax^{\beta-1}\theta(d-x) \in L_{\nu-\omega-\sigma-\delta(c-1)-1,r}$ $(A \in R, \beta > 0)$, $1 < r < \infty$, $\nu > \delta(c-1) + \sigma + \omega - \beta + 2$. Согласно теореме 13, теореме 14, теореме 15 и теореме 16 интегральные уравнения:

$$_1\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}\varphi(x) \equiv x^\sigma \int_0^x \frac{\left(x^\delta - t^\delta\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x^\delta}{t^\delta}\right) t^\omega \varphi(t)\,dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x),\ x > 0, \tag{44}$$

при $\nu < \delta \min(0, a, b, c-b) + \omega + 1$;

$$_2\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\delta}^{c}\varphi(x) \equiv x^\sigma \int_0^x \frac{\left(x^\delta - t^\delta\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t^\delta}{x^\delta}\right) t^\omega \varphi(t)\,dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x),\ x > 0, \tag{45}$$

при $\nu < \delta \min(0, b, c-b, c-a-b) + \omega + 1$;

$$ {}_3\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\left(t^{\delta}-x^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x^{\delta}}{t^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x),\ x>0, \tag{46} $$

при $\nu > \delta\max(c, c-b, b, a+b)-\omega$;

$$ {}_4\mathrm{I}^{c}_{\sigma,\omega;\delta}\varphi(x) \equiv x^{\sigma}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\left(t^{\delta}-x^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{t^{\delta}}{x^{\delta}}\right)t^{\omega}\varphi(t)dt = Ax^{\beta-1}\theta(d-x),\ x>0, \tag{47} $$

при $\nu > \delta\max(c, c-a, c-b, b)-\omega$ – имеют единственные решения $\varphi \in L_{\nu,r}$, выражаемые соответственно формулами:

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_{a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}M_{c-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_{a+b-c}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \tag{48} $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} \mathrm{I}^{b-c}_{0+}M_{a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_{-a}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c}\mathrm{I}^{-b}_{0+}M_{c-a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}M_{-b}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \tag{49} $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-b}\mathrm{I}^{b-c}_{-}M_{c-a}\mathrm{I}^{-b}_{-}M_{a+b-c}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{-a}\mathrm{I}^{-b}_{-}M_{a}\mathrm{I}^{b-c}_{-}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); \tag{50} $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} \mathrm{I}^{b-c}_{-}M_{a}\mathrm{I}^{-b}_{-}M_{-a}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x); $$

$$ \varphi(x) = \delta N_{\delta} M_{1-\frac{\omega+1}{\delta}} M_{a+b-c}\mathrm{I}^{-b}_{-}M_{c-a}\mathrm{I}^{b-c}_{-}M_{-b}N_{\frac{1}{\delta}}M_{-\sigma}Ax^{\beta-1}\theta(d-x). \tag{51} $$

Применяя формулы (6)–(7) и (8)–(9), из представлений (48)–(51) окончательно получаем:

$$ \varphi(x) = A\delta\frac{\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}+a+b-c\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}+a-c\right)\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}+b-c\right)}x^{(1-c)\delta-\sigma+\beta-\omega-2}\theta(d-x), \tag{52} $$

$\beta > \delta\left(\max(0, c-a, c-b, c-a-b)-1\right)+\sigma+1$;

$$ \varphi(x) = A\delta\frac{\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}-a\right)\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}-b\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}-a-b\right)\Gamma\left(1-\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}-c\right)}x^{(1-c)\delta-\sigma+\beta-\omega-2}\theta(d-x), \tag{53} $$

$\beta > \delta\left(\max(a, b, c, a+b)-1\right)+\sigma+1$;

$$\varphi(x) = A\delta \frac{\Gamma\left(c-a+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(c-b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(c-a-b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)} x^{(1-c)\delta-\sigma+\beta-\omega-2}\theta(d-x), \tag{54}$$

$\beta < \delta \min(0, c-a, c-b, c-a-b) + \sigma + 1$;

$$\varphi(x) = A\delta \frac{\Gamma\left(c+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(a+b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)\Gamma\left(b+\frac{\sigma-\beta+1}{\delta}\right)} x^{(1-c)\delta-\sigma+\beta-\omega-2}\theta(d-x), \tag{55}$$

$\beta < \delta \min(a, b, c, a+b) + \sigma + 1$;

соответственно для уравнений (44)–(47).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.
2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987.
3. Килбас, А.А. Обобщенное Н-преобразование в весовых пространствах суммируемых функций / А.А. Килбас, Е.К. Щетникович // Весцi НАН Беларусi, Серыя фiз.-мат. навук. – 2004. – № 2. – С. 14 – 20.
4. Килбас, А.А. О решении интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2006. – № 10. – С. 35 – 38.
5. Килбас, А.А. Решение интегральных уравнений первого рода с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовом пространстве суммируемых функций / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 3 – С. 10 – 15.


*Поступила 27.02.2014*

## THE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH THE GAUSS HYPERGEOMETRIC FUNCTION IN KERNELS IN $L_{\nu,r}$ - SPACES

***O. SKOROMNIK, Y. ZHAVORONOK***

*Four integral equations of the first kind on the positive half axis involving the Gauss hypergeometric function in the kernels are studied. Using the representations of the integral operators in the left – hand sides of considering equations as compositions of fractional integral operators with power weights, the conditions for their boundedness from one weight spaces of summable functions into another spaces are proved. These results are applied to deduce explicit solutions of studied integral equations in considered spaces.*