УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

УДК 528.063

БОНДАРЕНКО
Валентина Анатольевна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Специальность 25.00.32 – геодезия

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Новополоцк 2004

Работа выполнена на кафедре геодезии и кадастров Учреждения образования «Полоцкий государственный университет»

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент И.Г. КАРТАВЕНКОВ, Полоцкий государственный университет, кафедра геодезии и кадастров г. Новополоцк

Научный консультант: кандидат технических наук, доцент В.И. МИЦКЕВИЧ, Полоцкий государственный университет, кафедра прикладной геодезии и фотограмметрии, г. Новополоцк

Официальные оппоненты: доктор технических наук В.Ю. МИНЬКО, Научно-исследовательское республиканское унитарное предприятие по землеустройству, геодезии и картографии «БелНИЦзем», отдел геодезии и картографии, г. Минск

кандидат технических наук, доцент М.М. ИВАНОВА, Белорусский государственный университет транспорта, кафедра изысканий и проектирования транспортных коммуникаций, г. Гомель

Оппонирующая организация: кафедра геодезии и фотограмметрии Белорусской государственной сельскохозяйственной академии, г. Горки

Защита состоится 22 декабря 2004 г. в 14^{00} на заседании Совета по защите кандидатских диссертаций К.02.19.02 в Учреждении образования «Полоцкий государственный университет» по адресу: Республика Беларусь, 211440, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29, УО «ПГУ».

Тел. (103752145)32383, факс (103752145)34263.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке УО «ПГУ».
Автореферат разослан 19 ноября 2004 г.

Ученый секретарь
Совета по защите диссертаций,
кандидат технических наук_____ Л.А. Черкас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Развитие геодезии в настоящее время основывается на современных достижениях науки и новейшей технической базе. Проводится большая работа по эффективному внедрению в производство новых методов создания и развития геодезических построений и широкому внедрению ЭВМ. Современная теория математической обработки геодезических измерений, основа которой заложена в работах К. Гаусса, Ф. Гельмерта, А Крюгера, Ф Красовского базируется на прочном геодезическом фундаменте, созданном известными учеными-геодезистами: В.Д. Большаковым, Н.Д. Дроздовым, В.А Коугия, Ю В. Линником, Ю.И. Маркузе, В.В. Поповым, К.Л. Проворовым, В К. Христовым и многими другими Решение геодезических задач характеризуется высокой точностью расчетов.

Все эти факторы значительно повышают качество геодезической информации, одновременно порождая новые проблемы, требующие обоснованного решения. В результате появляется необходимость в обобщении и анализе существующих методов решения задач проектирования и уравнивания геодезических сетей. Разработка новых методов, сочетающих наиболее сильные стороны существующих, позволит с максимальной эффективностью использовать возможности современных вычислительных технологий.

Связь работы с крупными научными программами, темами

Исследования выполнялись в рамках госбюджетных тем «Совершенствование топографо-геодезических работ для нужд народного хозяйства», № ГР 19963865, 1997 – 2000 гг., «Топографо-геодезическое обеспечение использования земель и кадастров» ГБ № 1121, 2001 – 2004 гг.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является разработка новых методов проектирования и математической обработки геодезических измерений на основе применения псевдообратных матриц в уравнительных вычислениях.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является современная технология математической обработки измерений. Предметом исследования является проектирование, уравнивание и оценка точности геодезических построений на основе псевдообратных матриц.

Гипотеза

В диссертационной работе гипотеза не выдвигалась.

Методология и методы проведения исследований

На основе теории математической обработки геодезических измерений обобщены методы, в которых используются псевдообратные матрицы, и разработаны новые методики, приспособленные для работы на современных быстродействующих компьютерах. Исследования по теме диссертации выполнялись с учетом современных достижений в области нелинейного программиро-

вания. Инструментальной компьютерно-технической базой для выполнения работы служили IBM PC и язык программирования FORTRAN-77, содержащий большую библиотеку стандартных программ.

Научная новизна и значимость полученных результатов

Научная новизна и значимость исследований, выполненных в настоящей работе, заключается в применении псевдообратных матриц при решении известных задач новыми методами:

1. Оценка точности нивелирных и спутниковых GPS сетей в нефиксированной системе координат.
2. Разработка альтернативного метода оценки точности площадей.
3. Реализация алгоритмов поиска грубых ошибок в результатах измерений классическими методами и методом Lp-оценок.
4. Получение простой и надежной методики расчета вероятности попадания координат определяемого пункта в круг или эллипс ошибок при нетрадиционных методах уравнивания.

Практическая значимость полученных результатов

Практическая значимость результатов исследований заключается в следующем:

1. На основе методов уравнивания и оценки точности результатов геодезических измерений, в которых используются псевдообратные матрицы, получены обобщения, приведшие к унификации известных алгоритмов для ЭВМ.
2. Разработано программное обеспечение – программа NIWA 2, внедренная в производство – для уравнивания нивелирных и спутниковых GPS сетей новыми и традиционными методами.
3. Получены простые, быстродействующие алгоритмы для вычисления вероятности попадания координат пункта в круг или эллипс погрешностей при нетрадиционных методах уравнивания.
4. Разработаны ускоренные методы коррекции оценок параметров при изменении свободных членов параметрических уравнений поправок.
5. Разработан альтернативный метод оценки точности площадей, позволяющий повысить качество земельно-информационных систем и кадастра.

Внедрение диссертационной работы

Программа NIWA 2 внедрена в производство в Республиканском унитарном предприятии аэрокосмических методов в геодезии «Белаэрокосмогеодезия» Комитета по земельным ресурсам, геодезии и картографии при Совете Министров Республики Беларусь.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Новые методы оценки точности результатов геодезических измерений по материалам уравнивания на основе обобщения известных способов, использующих псевдообратные матрицы.
2. Быстродействующие методики выполнения оценки точности и вероятностных расчетов на основе статистических испытаний.

3. Результаты исследования возможностей применения псевдообратных матриц при многостепенной оптимизации.

4. Новый метод оценки точности площадей.

Личный вклад соискателя

Самостоятельно выполненные автором исследования опубликованы в научной печати. Программный комплекс NIWA 2 разработан совместно с коллективом соавторов, степень участия – равная.

Апробация и опубликованность результатов

Результаты выполненных исследований опубликованы в 15 научных статьях на 75 страницах. Из них 3 статьи – в научных журналах, 4 – в научных сборниках, 8 – депонированы.

Изложенные в диссертации результаты исследований докладывались:

– на международной научной конференции «Проблемы комплексного картографирования и создания межрегиональных ГИС стран СНГ» (г. Минск, БГУ, ноябрь 1999 г.);

– на международной научно-производственной конференции, посвященной 160-летию БГСХА (г. Горки, БГСХА, сентябрь 2000 г.);

– на международной научно-технической конференции «Геодезия, картография, кадастры и экология» (г. Новополоцк, ПГУ, октябрь 2000 г.);

– на международной научно-производственной конференции «Землеустройство: состояние, проблемы, перспективы» (г. Горки, БГСХА, ноябрь 2001 г.).

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем работы составляет 90 страниц, 25 таблиц, 11 рисунков и 3 приложения. Список использованных источников включает 118 наименований, из них 102 – на русском, 16 – на других языках.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** определена область применения расширенной псевдообратной матрицы F при уравнивании и оценке точности результатов геодезических измерений.

Вторая глава посвящена использованию матрицы F при оптимальном проектировании геодезических сетей.

В **третьей главе** рассматривается возможность применения матрицы F при уравнивании с учетом ошибок исходных данных и систематических ошибок.

В **четвертой главе** показано, что использование расширенной псевдообратной матрицы F позволяет выполнять поиск грубых ошибок не только при уравнивании по методу наименьших квадратов, но и по методу Lp-оценок.

В практике геодезических вычислений при уравнивании параметрическим способом в неявной форме используется матрица

$$F = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \,, \qquad (1)$$

которая, как оказалось, обладает следующим свойством, присущим псевдообратным матрицам:

$$FA = E\,. \tag{2}$$

Дальнейшие исследования показали, что матрица F удовлетворяет к тому же 1, 2 и 4 свойствам Мура – Пенроуза:

$$\begin{aligned}
&1)\ AFA = A\left(A^T PA\right)^{-1} A^T PA = AE = A\,;\\
&2)\ FAF = \left(A^T PA\right)^{-1} A^T PA\left(A^T PA\right)^{-1} A^T P = F\,;\\
&3)\ (AF)^T = (A\left(A^T PA\right)^{-1} A^T P)^T = PA\left(A^T PA\right)^{-1} A^T = PAFP^{-1} \neq AF\,;\\
&4)\ (FA)^T = (\left(A^T PA\right)^{-1} A^T PA)^T = E^T = E = FA\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Причем, если матрица F квадратная (т.е. нет избыточных измерений), то она удовлетворяет всем свойствам (3).

В работе мы выделили матрицу F и назвали ее расширенной псевдообратной матрицей

Важным вопросом уравнительных вычислений является оценка точности конечных результатов. Для линейной векторной функции U случайного вектора Y корреляционная матрица поправок определяется по формуле:

$$K_V = FK_Y F^T\,. \tag{4}$$

Если корреляционная матрица измерений неизвестна, а имеется матрица весов измерений P, то обратная матрица весов параметров вместо (4) будет определяться по формуле

$$Q = FP^{-1}F^T. \tag{5}$$

Матрица F в (5) определяется из выражения (1):

$$Q = (A^T PA)^{-1} A^T PP^{-1} PA(A^T PA)^{-1} = (A^T PA)^{-1}\,.$$

Численное значение матрицы F можно получить по формуле Ю.П. Андреева:

$$F_i = \frac{(\hat{X})_i - \hat{X}}{\delta_i}\,, \tag{6}$$

где $\hat{X}$ – вектор уравненных координат;

$\left(\hat{X}\right)_i$ – вектор уравненных координат для измерения с номером i, в которое внесена поправка δ_i.

По этой формуле получают столбец матрицы $F_{i\times N}$. Для получения всей матрицы F необходимо выполнить N уравнительных вычислений. Объем расчетов можно резко сократить, если воспользоваться формулой (1).

Задача уравнивания и оценки точности свободных геодезических сетей в вычислительном и вероятностном аспектах выходит за рамки традиционных положений метода наименьших квадратов.

Согласно исследованиям проф. Ю.И. Маркузе, В.Н. Ганьшина и других:

– уравнивание свободной сети традиционным способом есть частный случай уравнивания с использованием g-обратных матриц;

– из множества решений систем нормальных уравнений решение, основанное на получении псевдообратных матриц, обладает наименьшей нормой, а корреляционная матрица искомых параметров – наименьшим следом.

В работе В.Н. Ганьшина, А.Ф. Стороженко и А.Г. Ильина «Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов» предложен алгоритм для уравнивания нульсвободной нивелирной сети.

Если уравнивается нульсвободная нивелирная сеть, то отметки всех пунктов от средней плоскости получают по формуле

$$H = GFh, \tag{7}$$

где h – вектор измеренных превышений;

$G_{t\times(t-1)}$ – вспомогательная матрица:

$$G = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & t-1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

F – расширенная псевдообратная матрица:

$$F = (a^T P a)^{-1} a^T P \tag{9}$$

для $a = A_{N\times(t-1)}$, т.е. матрица a есть матрица A без последнего столбца.

Обратная матрица весов параметров:

$$Q = A^+ P^{-1} \left(A^+\right)^T, \tag{10}$$

где

$$A^+ = GF. \tag{11}$$

В диссертационной работе мы применили матрицу F для разработки нового алгоритма уравнивания нульсвободной нивелирной сети, не уступающего по своим возможностям вышеизложенной методике.

Вместо (7) уравненные отметки можно получить после обработки свободной нивелирной сети, опирающейся на один любой исходный пункт, взяв уклонения от средней отметки. В результате получаем преимущество не только в том, что не требуется составлять громоздкую матрицу G, но и уравниваем нульсвободную сеть методом Lp-оценок с помощью (1), применяя F:

$$F = \left(A^T C A\right)^{-1} A^T C, \tag{12}$$

где

$$C = P\left(diag\left|V\right|^{n-2}\right), \tag{13}$$

V – вектор поправок в измерения, полученный при любом показателе степени n. При $n = 2$ получим уравнивание по методу наименьших квадратов, при $n = 1$ – по методу наименьших модулей.

В табл. 1 приведены результаты обработки нивелирной сети из вышеназванной работы В.Н. Ганьшина, А.Ф. Стороженко и А.Г. Ильина при $n = 1; 2; 3$.

Таблица 1

Результаты уравнивания методом Lp-оценок свободной и нульсвободной нивелирной сети с отметками от средней плоскости

№ репера	n = 1				n = 2			
	$H_{св}$, м (своб.)	$m_{H_{св}}$, мм	H, м (нуль – своб)	m_H, мм	$H_{св}$, м (своб)	$m_{H_{св}}$, мм	H, м (нуль – своб)	m_H, мм
1	2	3	4	5	6	7	8	9
93	189.631	97	–0.748	77	189.631	73	–0.749	52
2	190.999	134	0.620	88	191.000	92	0.619	44
12	197.951	143	7.572	113	197.950	96	7.570	47
86	186.305	170	–4.074	121	186.307	105	–4.074	60
22	192.371	174	1.992	153	192.370	122	1.990	92
96	191.890	198	1.511	160	191.899	108	1.518	68
18	183.506	0	–6.873	127	183.506	0	–6.874	92

Продолжение табл. 1

№ репера	n = 3			
	$H_{св}$, м (своб.)	$m_{H_{св}}$, мм	H, м (нуль – своб.)	m_H, мм
10	11	12	13	14
93	189.631	157	–0.748	78
2	190.999	204	0.620	84
12	197.951	247	7.572	117
86	186.305	279	–4.074	124
22	192.371	299	1.992	157
96	191.890	332	1.511	167
18	183.506	0	–6.873	125

Алгоритм профессора В.Н. Ганьшина дает такой же результат (см. табл. 1 при $n = 2$), но не позволяет определять отметки при любых других n.

Новым методом легко выполняется не только уравнивание, но и оценка точности полученных результатов с применением формул:

$$Q = fP^{-1}f^T; \tag{14}$$

$$f_i = \frac{(\hat{H})_i - \hat{H}}{\delta_i}, \tag{15}$$

где $\hat{H}$ – отметка пункта нульсвободной нивелирной сети от средней плоскости (из столбцов 4, 8, 13 табл. 1);

$(\hat{H})_i$ – отметка пункта нульсвободной нивелирной сети от средней плоскости, для искаженного на величину δ_i превышения.

Для получения $(\hat{H})_i$ следует знать уравненные отметки свободной сети $\left(\hat{H}_{св}\right)_i$, которые можно получить по формуле

$$\left(\hat{H}_{св}\right)_i = H_0 - FL', \tag{16}$$

где F определяем из (15) только один раз при уравнивании для соответствующего n;

H_0 – предварительные отметки определяемых пунктов, найденные по неуравненным превышениям;

$L'_i = L_i + \delta_i$ – измененный на величину δ_i i-тый элемент вектора свободных членов линейных параметрических уравнений поправок.

В табл. 1 столбцы 3, 7, 12 получены по формулам (5) и (12). А оценка точности, записанная в столбцах 5, 9, 14, выполнена по новым формулам (14) – (16). При n = 2 результаты оценки точности совпали с результатами, полученными профессором В.Н. Ганьшиным, а значения M_H меньше, чем при других степенях n.

По данным табл. 1 можно сделать вывод, что при использовании разных n величина H изменяется незначительно, чего нельзя сказать о результатах оценки точности. В новом алгоритме дважды используется расширенная псевдообратная матрица: F – для получения отметок из уравнивания свободной сети; f – для оценки точности результатов уравнивания при переходе от свободной сети к нульсвободной.

При обработке геодезических измерений, выполненных в несколько эпох на одном и том же объекте, вместо формулы

$$X = -QB \tag{17}$$

лучше применять выражение

$$X = -FL. \tag{18}$$

Причина этого заключается в том, что при переходе от одной эпохи к другой состав измерений и характеристики их точности остаются без изменений, а поэтому не изменяются матрицы Q и F.

Но в выражении (18) используется вектор свободных членов, получаемый в каждой эпохе, а в матрице $B = A^T PL$, кроме L, применяются матрицы A и P, что усложняет обработку измерений, так как требуется заново вычислять эти матрицы, а следовательно, требуется большее число вычислительных операций.

Последнее обстоятельство имеет большое значение при оценке точности геодезических сетей методом статистических испытаний. Известно, что при оценке точности геодезических сетей с помощью матрицы Q анализируется эллипс ошибок, параметры которого вычисляют по формулам:

$$a^2 = \frac{\mu^2}{2}\left(Q_{XX} + Q_{YY} + W\right); b^2 = \frac{\mu^2}{2}\left(Q_{XX} + Q_{YY} - W\right);$$

$$W = \sqrt{\left(Q_{XX} - Q_{YY}\right)^2 + 4Q_{XY}^2}; tg\,2\varphi = \frac{2Q_{XY}}{Q_{XX} - Q_{YY}} \tag{19}$$

На рис. 1 показана геодезическая сеть полигонометрии, выбранная таким образом, чтобы отношение полуосей эллипса a/b было не менее 3.

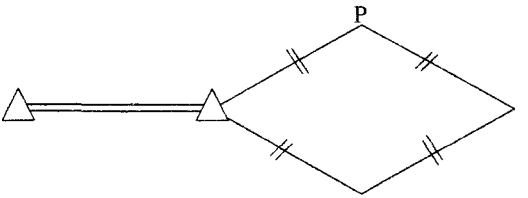

Рис. 1 Схема сети полигонометрии

Применение формулы (18) при оценке точности методом статистических испытаний позволило выполнить 1000 испытаний и получить эллипс рассеяния для этой сети с шагом сетки 0.0050 м (рис. 2), затратив всего 1 секунду машинного времени.

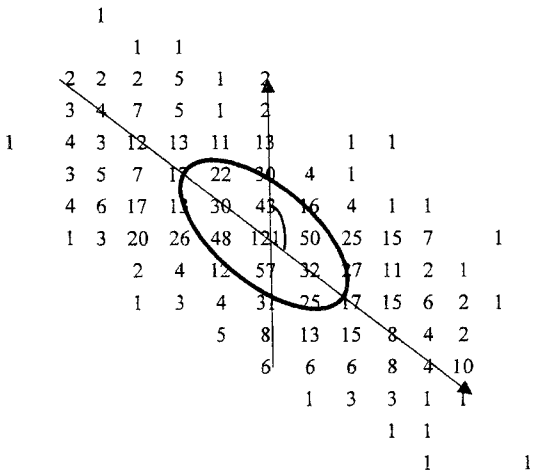

Рис 2 Эллипс рассеяния

По формулам (19) для пункта P получено: a = 0.0146 м; b = 0.0068 м и $\varphi = 133^0 53'$.

По отношению полуосей a и b к шагу сетки легко построить средний квадратический эллипс ошибок, количество попаданий в который составило 429, что соответствует вероятности P = 0,43. Теоретическая вероятность попадания координат в средний квадратический эллипс ошибок P = 0,39, что составляет 390 попаданий. Из рис. 2 видно, что $\varphi \approx 135^0$.

Следовательно, используя вычисленную матрицу F, можно не только выполнить оценку точности функций уравненных и измеренных величин, но и вычислить вероятность попадания координат определяемого пункта в эллипс (или круг) ошибок методом статистических испытаний.

Вычисление вероятности рекомендуется выполнять при большом количестве опытов (10 000 опытов) следующим образом.

По величинам средних квадратичских ошибок результатов геодезических измерений M_j, полученным после уравнивания, генерируем вектор свободных членов параметрических уравнений поправок L.

Вычисляем вектор приращений координат

$$\delta X = -FL.$$

Для каждого определяемого пункта вычисляем статистическое уклонение

$$R_j = \sqrt{\delta_{x_i}^2 + \delta_{x_{i+1}}^2}, \tag{20}$$

где δ_{x_i}, $\delta_{x_{i+1}}$ – компоненты вектора δX.

Если $R_j \le M_j$, то пункт j попал в круг ошибок.

Вероятность попадания координат определяемого пункта в круг ошибок рассчитаем по формуле

$$P = \frac{K}{10000}, \tag{21}$$

где K – число попаданий определяемого пункта в круг ошибок при 10 000 испытаний.

Практическая значимость данного предложения заключается в возможности вычисления вероятности P при нетрадиционных методах уравнивания. Ранее P рассчитывалось при уравнивании по МНК, для которого P = 0,65, независимо от величины M_j.

В качестве примера наши предложения применены к методу многостепенной оптимизации, когда уравненные координаты пунктов и уравненные измерения получают путем минимизации двух целевых функций:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{c_i}{\sigma_i} \right)^{n_i} \left| L_i(X) \right|^n ; \tag{22}$$

$$\Phi_2(X) = min(max\, M_i). \tag{23}$$

Соответствующие расчеты приведены в табл. 2 для сетей, заимствованных из научной литературы.

Данные, приведенные в табл. 2, позволяют сделать следующие выводы:

1. При уравнивании по МНК величина P близка к 0,65, что является надежным контролем при отладке программы.

2. Благодаря многостепенной оптимизации, величины M_j уменьшились, по сравнению с МНК, что и предусматривалось критерием (23).

3. Несмотря на уменьшение ошибок M_j, количество попаданий координат пунктов в круг ошибок увеличилось.

Таблица 2

Результаты вычисления вероятности

№ примера	1	2	3	4	5	6
Обработка по методу наименьших квадратов						
μ	0 608	1 139	0 833	1 053	1 098	1 121
M_1	0 0523	0 0475	0 0424	0 0595	0 0373	0 0077
M_2	0 0536	0 0292	0 0439	0 0766	0 0406	0 0141
M_3	0 0245	0 0387	0 0206	0 0392	–	0 0125
M_4	–	–	–	0 0589	–	–
P_1	0 634	0 635	0 638	0 659	0 640	0 644
P_2	0 635	0 632	0 649	0 673	0 622	0 645
P_3	0 667	0 631	0 637	0 630	–	0 641
P_4	–	–	–	0 658	–	–
Обработка по методу многостепенной оптимизации						
μ	0 471	1 084	0 803	0 515	0 989	0 331
M_1	0 0467	0 0436	0 0409	0 0437	0 0381	0 0061
M_2	0 0435	0 0325	0 0430	0 0549	0 0377	0 0110
M_3	0 0196	0 0436	0 0208	0 0239	–	0 0111
M_4	–	–	–	0 0459	–	–
P_1	0 643	0 639	0640	0 676	0 642	0 636
P_2	0 640	0 632	0 648	0 659	0 624	0 651
P_3	0 668	0 626	0 634	0 619	–	0 641
P_4	–	–	–	0 676	–	–

Дальнейшие исследования показали, что использование расширенной псевдообратной матрицы позволяет унифицировать не только алгоритмы уравнивания и оценки точности результатов измерений и их функций, но и алгоритмы проектирования

З П. Тамутис, решая задачу определения оптимального плана измерений и оптимального плана положения пунктов сети, в неявном виде использовал матрицу $F = (A^T PA)^{-1} A^T P$

С учетом выражения (1) формулы З П. Тамутиса преобразованы нами в (24)

$$P_i = \frac{K1}{K2} \bar{f}_i, \tag{24}$$

где $K1 = \sum_{i=1}^{N} \bar{f}_i$, $\bar{f}_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{i} F_{ji}^2}$, $K2 = SpQ_{np} = \sum_{j=1}^{i} Q_{jj}$.

Таким образом, была определена еще одна задача, для решения которой непосредственно используется матрица F.

В результате исследований, выполненных во второй главе, нами получен новый алгоритм оценки точности площадей, в основе которого лежит двойное применение матрицы F

Для вычисления площади многоугольника обычно применяют формулу Гаусса

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \tag{25}$$

Оценку точности площади выполняют с применением формулы

$$m_S = \mu\sqrt{fP^{-1}f^T}\,, \tag{26}$$

где f – вектор частных производных исходной площади по результатам измерений

$$f_{1\times N} = \frac{S_\delta - S}{\delta} \tag{27}$$

Здесь S_δ – возмущенное значение площади после изменения j-того измерения на малую величину δ

Вместо N-кратного уравнивания геодезической сети предложено воспользоваться расширенной псевдообратной матрицей (1) и формулой Ю П Андреева

$$F_{t\times N} = \frac{\hat{X}_\delta - \hat{X}}{\delta}\,, \tag{28}$$

где в числителе – разность уравненных координат после и до возмущения измерений на величину δ

Зная F, δ и $\hat{X}$, можно получить $\hat{X}_\delta$ и S_δ без повторного уравнивания, а затем выполнить оценку точности определения площади по формулам (27) и (26).

В качестве примера выполнена оценка точности определения площади земельного участка, по границам которого проложен ход полигонометрии (рис 3), где измерения $c_1 = c_2 = c_3 = 100$ м, $\beta_4 = \beta_5 = 90^\circ$ произведены с точностью $\sigma_0 = \sigma_\beta = 20''$, $\sigma_c = 0\ 02$ м. Согласно (1) получено

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0\ 1600 & -1 & 0\ 000407 & -0\ 000078 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0\ 1600 & -1 & 0\ 000078 & -0\ 000407 \end{pmatrix},$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 101 \\ 1 \\ 101 \\ 101 \end{pmatrix},\ (\hat{X}_\delta)_1 = \begin{pmatrix} 102 \\ 2 \\ 101 \\ 102 \end{pmatrix},\ (\hat{X}_\delta)_2 = \begin{pmatrix} 101 \\ 0\ 8400 \\ 101 \\ 101\ 1600 \end{pmatrix},\ (\hat{X}_\delta)_3 = \begin{pmatrix} 101 \\ 0 \\ 102 \\ 100 \end{pmatrix}$$

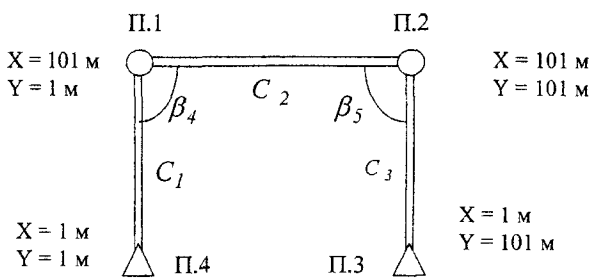

Рис 3 Схема полигонометрического хода

Аналогично находят $\left(\hat{X}_\delta\right)_4$ и $\left(\hat{X}_\delta\right)_5$ по столбцам 4 и 5 матрицы F. В результате при $\delta = 1$ по формуле (28) имеем

$$f = \frac{\partial S}{\partial T} = \left(50.50;\ 16.00;\ 50.50;\ -0.01640; -0.01640\right),$$

где T – вектор результатов измерений с весовой матрицей

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\mu = \sigma_o = 20''$.

Средняя квадратическая ошибка определения площади по новому алгоритму – $m_S = 1.54$ м^2, а по программе «Оценка» – $m_S = 1.52$ м^2.

Предложенный метод в вычислительном отношении проще и надежнее, поскольку использует частные производные функции S по измеренным величинам, а не по координатам, которые являются функциями от измеренных величин.

Современные геодезические приборы позволяют с высокой точностью выполнять все виды измерений. Именно поэтому задача локализации ошибок исходных данных приобретает большое значение. В работе показано, что матрица F косвенно использовалась в различных способах учета ошибок исходных данных.

В способе, предложенном Ю.И. Маркузе, с учетом (1) имеем $u = FB$ и

$$Q_X = \left(F|u\right)\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{\bar{Z}} \end{pmatrix}\left(F|u\right)^T. \qquad (29)$$

Следовательно, формула

$$Q_X = R_{11}^{-1} + uQ_{\bar{Z}}u^T \qquad (30)$$

может быть обоснована и является частным случаем более общей формулы (29).

Способ учета ошибок исходных данных, основанный на фундаментальной теореме о переносе ошибок, использует преимущества методов Ю.И. Маркузе и В.К. Христова:

$$Q_X = FK_yF^T, \qquad (31)$$

где

$$K_y = P^{-1} + BQ_{\bar{Z}}B^T. \qquad (32)$$

Здесь применение матрицы F не только приводит к упрощению формулы (30), но и позволяет получить новый метод оценки точности с учетом ошибок исходных данных.

Достоверность результата, полученного с использованием нового способа, подтверждается результатами, полученными с применением способов В.К. Христова и Ю.И. Маркузе.

Вектор поправок в измерения с учетом систематических ошибок определяется из выражения

$$V = AX + B_{\Delta} L_C + L \,. \tag{33}$$

Решение системы (33) с применением расширенной псевдообратной матрицы выполняется по следующим формулам:

$$X = -FL\,, \quad F = \left(A^T DA\right)^{-1} A^T D\,;$$

$$D = P\left(E - G\right), \; {}_{\Delta} L_C = -f\left(AX + L\right), \tag{34}$$

где

$$f = \left(B^T PB\right)^{-1} B^T P \text{, а } G = Bf \,. \tag{35}$$

Для корреляционной матрицы поправок имеем

$$K_V = \sigma^2 \left(E - G\right) P^{-1} . \tag{36}$$

Выражение (36) получено академиком Ю.В. Линником с развернутой матрицей G и использовалось при обнаружении грубых ошибок в измерениях.

Для уравнивания результатов геодезических измерений методами Lp-оценок необходимо отыскивать минимум целевой функции

$$\Phi\left(X\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^n} \left| L_i\left(X\right)\right|^n . \tag{37}$$

Как показали наши исследования, при $n \geq 1$ значения неизвестных можно вычислить по формуле

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \frac{1}{n-1} FL\left(X\right), \tag{38}$$

а для оценки точности использовать

$$Q_{n \geq 1} = FP^{-1} F^T \,,$$

где

$$F = \left(A^T CA\right)^{-1} A^T C \,. \tag{39}$$

На практике можно применить такие целевые функции, для которых невозможно записать выражение (39) из-за незнания матрицы С. Примером может служить многостепенная оптимизация, выполняемая путем минимизации целевой функции (23).

Тогда для получения матрицы F применим формулу

$$F_{i \times \nabla} = \frac{(X_i)_{s.u} - \hat{X}_i}{\delta_{s\,u}} \,, \tag{40}$$

аналогичную (15), с шагом

$$\delta_{S_i} = 10^{\left(\lg \sqrt{S} - \frac{m}{3}\right)}; \quad \delta_u = \frac{\delta_S \rho}{S} \,,$$

где S – длина стороны;

m – количество значащих цифр в мантиссе числа при использовании ЭВМ.

Судя по результатам исследований профессора В.А. Коугия, поиск грубых ошибок при параметрическом способе уравнивания позволяет идентифицировать в результатах измерений ошибки, более мелкие, чем при коррелатном.

Сущность предложения В.А. Коугия сводится к соблюдению неравенства

$$\frac{|V_i|}{d_i} > 1 , \qquad (41)$$

где V_i – поправка в измерение из уравнивания, а

d_i – допуск на величину поправки:

$$d_i = t\sqrt{(K_V)_{ii}} . \qquad (42)$$

В (43) t – квантиль (принимает значения от 2 до 3 в соответствии с доверительной вероятностью), а $(K_V)_{ii}$ – диагональный элемент корреляционной матрицы поправок:

$$K_V = \sigma^2\left(P^{-1} - A\left(A^T PA\right)^{-1} A^T\right). \qquad (43)$$

С применением расширенной псевдообратной матрицы формула (43) примет вид:

$$K_V = (E - G)P^{-1} , \qquad (44)$$

что является самым простым матричным выражением, дополняющим формулы (34) и (35).

Обобщив формулу (44) на основе метода Lp-оценок, имеем

$$K_V = (E - G)C^{-1} , \qquad (45)$$

где $G = A\left(A^T CA\right)^{-1} A^T C$, а C – определяется из выражения (13).

Кроме того, в случае Lp-оценок вместо (43) необходимо использовать

$$d_i = \left(3.0 - \frac{n}{4}\right)\sqrt{(K_V)_{ii}} . \qquad (46)$$

При многостепенной оптимизации вместо (45) предложено применять выражение

$$K_V = const(E - AF)D^+ , \qquad (47)$$

где D^+ – главная псевдообратная матрица от неизвестной матрицы D;

$F = \left(A^T DA\right)^{-1} A^T D$ можно получить только численным методом по формуле (40).

Зная из численного дифференцирования $H(X)$, можно приближенно получить

$$R = A^T DA \approx \frac{1}{n_{cp}\left(n_{cp} - 1\right)} H(X) , \qquad (48)$$

где n_{cp}– среднее значение показателей степени n для всех измерений.

В этом случае

$$D = \left(A^T\right)^+ RF \qquad \text{или}$$

$$D^+ = F^+ R^{-1} A^T = F^T\left(FF^T\right)^{-1} R^{-1} A^T . \qquad (49)$$

В отличие от диагональной матрицы C, D^{+} – полная матрица, а диагональные элементы матрицы K_V в выражении (42) могут оказаться отрицательными. Поэтому

$$d_i = t\sqrt{|K_V|_{ii}}\,. \tag{50}$$

В процессе исследований нами была разработана программа уравнивания нивелирных и спутниковых GPS сетей NIWA 2, внедренная в производство в 2000 году. В программу заложен алгоритм поиска грубых ошибок в измеренных превышениях, разработанный на основе метода Линника – Коугия.

Программа NIWA 2 позволяет выполнять поиск грубых ошибок в измерениях при различных показателях степени n.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты выполненных исследований заключаются в следующем:

1. На основе расширенной псевдообратной матрицы F выполнена унификация известных алгоритмов проектирования, уравнивания и оценки точности результатов геодезических измерений и их функций [4, 7, 9, 10, 11].

2. Двукратное применение матрицы F позволило разработать новую быстродействующую методику оценки точности нивелирных и спутниковых сетей без исходных пунктов [15].

3. Разработан простой алгоритм получения эллипса ошибок методом статистических испытаний [5] и методика для выполнения вероятностных расчетов в уравнительных вычислениях при нетрадиционных способах уравнивания [3].

4. Предложен новый алгоритм оценки точности площадей, в основе которого лежит двойное применение матрицы F [2].

5. Применение расширенной псевдообратной матрицы F позволяет выполнять оценку точности результатов геодезических измерений при любых методах уравнивания, включая алгоритм Lp-оценок [8, 12, 13].

6. В процессе исследований разработана программа уравнивания нивелирных и спутниковых GPS сетей NIWA 2, внедренная в производство в 2000 году, которая позволяет выполнять поиск грубых ошибок в измерениях при различных показателях степени n [1, 6, 14].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И., Сырова Н.С. Уравнивание нивелирных сетей с поиском грубых ошибок измерений // Геодезия и картография. – 2003. – № 5. – С. 26 – 28.
2. Бондаренко В.А., Глебко М.Г. Оценка точности определения площадей с помощью псевдообратных матриц // Земля Беларуси. – 2004. – № 2. – С. 26 – 27.
3. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. О вычислении вероятности попадания в круг ошибок методом статистических испытаний // Вестник ПГУ. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2004.– № 11. – С. 84 – 86.
4. Бондаренко В.А. Области применения расширенной псевдообратной матрицы, используемой при параметрическом способе уравнивания // Материалы междунар. науч. конф. 22 – 24 нояб. 1999 г. – Мн.: БГУ. – С. 150.
5. Бондаренко В.А. Получение эллипса ошибок методом статистических испытаний // Геодезия, картография, кадастры и экология: Тр. междунар. науч.-техн. конф. 25 – 27 октября 2000 г. – Новополоцк: ПГУ, 2001. – С. 32 – 35.
6. Бондаренко В.А. Формула Ю.В. Линника и ее применение при поиске грубых ошибок измерений // Современные проблемы землеустройства и земельного кадастра: Материалы междунар. науч.-произв. конф., посвящ. 160-летию БГСХА. – Горки: БГСХА, 2000. – С. 143 – 147.
7. Бондаренко В.А. Проектирование точности измерений на основе псевдообратных матриц // Землеустройство, геодезия и картография: проблемы и пути их решения: Сб. науч. тр. Вып. 1 – Мн.: Технопринт, 2003. – С. 196 – 200.
8. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. О влиянии грубых промахов в информации на результаты уравнивания плановых геодезических сетей линейными и нелинейными методами / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк.– 1998.– 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 09.06.98, № 637 – гд. 98 // РЖ 52. Геодезия и аэросъемка. – 1998. – № 12. – 12.52.167. ДЕП. – С. 22.
9. Бондаренко В.А. Применение расширенной псевдообратной матрицы при уравнивании и оценке точности с учетом ошибок исходных данных / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 11 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 22.03.99, № 656 – гд. 99.
10. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И. Вопросы уравнивания параметрическим способом при наличии систематических ошибок измерений с применением расширенной псевдообратной матрицы / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 3 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 668 – гд. 99 // РЖ 52. Геодезия и аэросъемка. – 1999. – № 11. – 11.52.218. ДЕП. – С. 28.
11. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Взаимосвязь главной и расширенной псевдообратных матриц при обработке неравноточных результатов измерений / Полоцкий гос. ун-т.– Новополоцк.– 1999. – 4 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 22.03.99, № 660 – гд. 99.
12. Мицкевич В.И., Бондаренко В.А., Шнитко С.Г. Рекомендации по численному отысканию элементов расширенной псевдообратной матрицы при параметрическом способе уравнивания геодезических сетей / Полоцкий

гос. ун-т. – Новополоцк. – 1999. – 4 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99, № 674 – гд. 99 // РЖ 52. Геодезия и аэросъемка. – 1999. – № 11. –11.52.217. ДЕП. – С. 28.

13. Мицкевич В.И., Бондаренко В.А., Ялтыхов В.В. О поиске грубых ошибок в измерениях при уравнивании геодезических сетей методом LP-оценок с использованием параметрического способа / Полоцкий гос. ун-т.– Новополоцк. – 1999. – 6 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 28.06.99, № 671 – гд. 99 // РЖ 52. Геодезия и аэросъемка. – 1999. – № 11. – 11.52.212 ДЕП. – С. 28.
14. Бондаренко В.А., Мицкевич В.И., Сырова Н.С. Поиск ошибок в измерениях нелинейными методами одно- и многокритериальной оптимизации / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 13 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.00, № 709 – гд. 00.
15. Бондаренко В.А., Присяжнюк А.П. Уравнивание нивелирных сетей и сетей GPS без исходных пунктов с помощью расширенной псевдообратной матрицы / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк. – 2000. – 3 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.00, № 716 – гд. 00 / РЖ 52. Геодезия и аэросъемка. – 2001.– № 3.– 01.03 – 52.221. ДЕП.– С. 31.

РЭЗЮМЭ

БАНДАРЭНКА Валянціна Анатольеўна

РАШЭННЕ ЗАДАЧ ПРАЕКТАВАННЯ І ЎРАЎНОЎВАННЯ ГЕАДЭЗІЧНЫХ СЕТАК З ВЫКАРЫСТАННЕМ ПСЕЎДААДВАРОТНЫХ МАТРЫЦ

Ключавыя словы: вынікі геадэзічных вымярэнняў, праектаванне, геадэзічныя сеткі, ацэнка дакладнасці, псеўдаадваротныя матрыцы, расшыраная псеўдаадваротная матрыца, вольныя нівелірныя сеткі, нетрадыцыйныя спосабы ураўноўвання, уніфікацыя алгарытмаў.

Даследуюцца магчымасці абагульнення алгарытмаў праектавання, ураўноўвання і ацэнкі дакладнасці вынікаў геадэзічных вымярэнняў на аснове псеўдаадваротных матрыц.

Мэтай працы з'яўляецца распрацоўка новых метадаў праектавання і матэматычнай апрацоўкі вынікаў геадэзічных вымярэнняў на аснове выкарыстання псеўдаадваротных матрыц у ўраўняльных вылічэннях.

Асноўныя вынікі выкананых даследаванняў зводзяцца да наступнага:

– выканана абагульненне вядомых алгарытмаў праектавання, ураўноўвання і ацэнкі дакладнасці вынікаў геадэзічных вымярэнняў і іх функцый на аснове расшыранай псеўдаадваротнай матрыцы F;

– распрацавана новая хуткадзеючая методыка ацэнкі дакладнасці нівелірных і спадарожнікавых сетак без зыходных пунктаў;

– распрацаваны нескладаны алгарытм атрымання эліпсу памылак метадам статыстычных выпрабаванняў;

– прапанавана методыка для выконвання імавернасных разлікаў у ўраўняльных вылічэннях пры нетрадыцыйных метадах ураўноўвання;

– прапанаваны новы алгарытм ацэнкі дакладнасці плошчаў;

– распрацавана праграма ураўноўвання нівелірных сетак і спадарожнікавых сетак NIWA 2, укараненая ў вытворчасць у 2000 годзе, якая дазваляе знаходзіць грубыя памылкі ў вымярэннях пры розных паказчыках ступені n.

Рэкамендуецца прымяняць расшыраную псеўдаадваротную матрыцу F для вырашэння задач праектавання і матэматычнай апрацоўкі вынікаў геадэзічных вымярэнняў комплексна як традыцыйнымі, так і нетрадыцыйнымі метадамі.

РЕЗЮМЕ

БОНДАРЕНКО Валентина Анатольевна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ

Ключевые слова: результаты геодезических измерений, проектирование, геодезические сети, оценка точности, псевдообратные матрицы, расширенная псевдообратная матрица, свободные нивелирные сети, нетрадиционные способы уравнивания, унификация алгоритмов.

Исследуются возможности унификации алгоритмов проектирования, уравнивания и оценки точности результатов геодезических измерений на основе псевдообратных матриц.

Целью работы является разработка новых методов проектирования и математической обработки результатов геодезических измерений на основе применения псевдообратных матриц в уравнительных вычислениях.

Основные результаты выполненных исследований заключаются в следующем:

- выполнена унификация известных алгоритмов проектирования, уравнивания и оценки точности результатов геодезических измерений и их функций на основе расширенной псевдообратной матрицы F;
- разработана новая быстродействующая методика оценки точности нивелирных и спутниковых сетей без исходных пунктов;
- разработан простой алгоритм получения эллипса ошибок методом статистических испытаний;
- предложена методика для выполнения вероятностных расчетов в уравнительных вычислениях при нетрадиционных методах уравнивания;
- предложен новый алгоритм оценки точности площадей;
- разработана программа уравнивания нивелирных сетей NIWA 2, внедренная в производство в 2000 году, которая позволяет выполнять поиск грубых ошибок в измерениях при различных показателях степени n.

Рекомендуется применять расширенную псевдообратную матрицу F для решения задач проектирования и математической обработки результатов геодезических измерений комплексно как традиционными, так и нетрадиционными методами.

THE RESUME

BONDARENKO Valentyna Anatoljevna

THE SOLVING OF ISSUES OF DESIGNING AND EQUALIZATION OF GEODETIC NETWORKS WITH USE OF PSEUDOINVERSE MATRICES

Key words: results of geodetic measurements, designing, geodetic networks, accuracy rating, pseudoinverse matrices, augmented pseudoinverse matrix, free leveling networks, nonconventional ways of equalization, unification of algorithms.

The opportunities of unification of algorithms of designing, equalization and accuracy rating of results of geodetic measurements on base of pseudoinverse matrices are investigated.

The aim of the course is to develop new methods of designing and mathematical treatment of results of geodetic measurements on base of pseudoinverse matrices.

The basic results of the conducted researches consist in following:

– the unification of well-known algorithms of designing, equalization and accuracy rating of results of geodetic measurements and their functions on base of augmented pseudoinverse matrix F is executed;

– the new fast-acting technique of accuracy rating of leveling and satellite networks without of bench-mark points is developed;

– the simple algorithm to obtain error ellipse by method of statistic experiments is developed;

– the technique of execution of probabilities accounts in compensation computations for nonconventional ways of equalization;

– the new algorithm of accuracy rating of areas is offered;

– the program NIWA 2 to equalize of leveling networks is introduced in production in 2000 year. It allows searching gross errors in the results of measurements with various exponents n.

It is recommended to apply an augmented pseudoinverse matrix F to solve issues of designing and mathematical processing of results of geodetic measurements in complex by conventional and nonconventional ways.