

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

И. Г. Картавенков

**Теория математической обработки геодезических  
измерений**

**Теория погрешностей (ошибок) измерений с элементами  
теории вероятностей**

**Указания и задания (тесты) для студентов 2 курса  
заочной формы обучения специальности  
1-56.02.01 «Геодезия»**

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

На 2 и 3 курсах заочной формы обучения студентами специальности 1-56.02.01 «Геодезия» изучается дисциплина «Теория математической обработки геодезических измерений», состоящая из двух частей: «Теория погрешностей измерений с элементами теории вероятностей» и «Метод наименьших квадратов».

Формами учебных занятий по теории математической обработки геодезических измерений являются самостоятельная работа, лекции и лабораторные занятия. Аудиторные занятия со студентами заочной формы обучения ограничиваются чтением лекций по узловым вопросам курса и выполнением важнейших лабораторных работ.

На 2 курсе студентами изучается только первая часть дисциплины, включающая пять разделов: основные понятия, положения и теоремы теории вероятностей; случайные величины, свойства и законы их распределения; элементы математической статистики; основы теории погрешностей (ошибок) измерений; математическая обработка измерений одной величины. По данным разделам студенты 2 курса проходят тестирование по вопросам приведенным во 2-ом разделе.

Изучение курса рекомендуется вести в следующей последовательности.

После детального ознакомления с вопросами программы изучаемого раздела, вопросами для самоконтроля и методическими указаниями необходимо проработать соответствующие параграфы учебника [1] или другой литературы [2-10], а также известной студентам литературы по высшей математике.

Целесообразно вести конспект в тетради с пояснением всех выводов. Затем следует разобрать и уяснить решенные в [1, 3-5,10 и др.] задачи. При этом нужно добиваться полного понимания связи между вычисленными операциями и соответствующими теоретическими преобразованиями математических зависимостей.

Глубокое понимание теории ошибок любых измеренных величин невозможно без умения переходить от буквенных значений к численным и наоборот, т.е. без единства в изучении теории и практики вычислений.

Проверить усвоение изучаемого материала можно путем самостоятельного решения задач, приведенных в [1,3,6,10] и др., а также с помощью вопросов для самоконтроля – раздел 2.

На экзамене студент предъявляет паспорт, зачетную книжку, зачетные тесты и результаты лабораторных работ. Повторная сдача зачетов и экзаменов производится в установленном порядке на платной основе для всех студентов.

Студенты выполнившие контрольные работы самостоятельно и защитившие ее, могут от тестирования освободиться.

# 1. Программа I части дисциплины «Теория математической обработки геодезических измерений»

## «Теория погрешностей измерений с элементами теории вероятностей»

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи и краткое содержание курса. Значение курса для инженеров геодезических специальностей. Измерения. Неизбежные ошибки измерений. Грубые ошибки. Контроль правильности измерений: повторные измерения, избыточно-измеренные величины, невязки. Взаимосвязь содержания разделов курса. Связь курса с другими дисциплинами. Краткие исторические сведения.

### 1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ПОЛОЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Предмет изучения теории вероятностей. Невозможные и достоверные события. Случайное событие. Комплекс условий. Испытание. Совместные и несовместные события. Независимые и зависимые события. Полная группа событий. Противоположные события.

Частость и вероятность события. Частость события. Устойчивость частоты при относительно неизменном комплексе условий, примеры. Вероятность события. Аксиоматическое определение понятия вероятности. Вычисление вероятности  $\text{arg}i$ . Практически невозможные и практически достоверные события. Условная вероятность. Формула полной вероятности.

#### Основные положения и теоремы теории вероятностей

Теорема сложения. Теорема умножения. Повышение устойчивости частоты события при увеличении числа испытаний в сериях испытаний. Теорема Бернулли. Статистическое определение вероятности. Биномиальный закон распределения. Вероятнейшее число появления события при многократных испытаниях.

Случайные величины. Случайные величины: непрерывные и дискретные. Закон распределения случайной величины. Способы задания законов распределения. Ряд распределений. Многоугольник распределения. Функция распределения. Ее свойства. Функция плотности распределения. Ее свойства. Основные числовые характеристики случайной величины: начальные, центральные абсолютные моменты. Математическое ожидание. Дисперсия. Свойства математического ожидания и дисперсии.

Среднее квадратическое отклонение. Среднее отклонение. Эксцесс. Меры скошенности.

### Основные законы распределения вероятностей.

Равномерное распределение. Его числовые характеристики. Биномиальное распределение и его числовые характеристики. Закон нормального распределения и его числовые характеристики. Связь среднего, вероятного и среднего квадратического отклонений. Кривая нормального распределения.

Свойства случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения. Математическое ожидание случайной величины – предельное среднее значение. Теоремы о математическом ожидании функций случайных величин. Математическое ожидание частоты события. Параметры распределения случайной величины: нормальное распределение нормированных (безразмерных) значений случайной величины. Нормированное значение отклонения частоты от вероятности.

Интеграл вероятности. Таблицы интеграла вероятностей и функции распределения. Вероятность попадания в интервал. Вероятное отклонение. Понятие о двумерном и многомерном распределении. Коэффициент корреляции. Математическое ожидание многомерной случайной величины. Понятие корреляционной матрицы.

Предельные законы. Закон больших чисел. Неравенство и теорема Чебышева. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова.

## 1.3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основные понятия математической статистики. Выборочный метод. Статистическое определение параметров распределения. Понятие о распределениях, отличных от нормального: Стьюдента, Пуассона, распределении  $\chi^2$ - $\chi_u$  - квадрат. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим; критерии согласия. Оценка эмпирически полученных параметров распределения. Методы определения оценок. Способ доверительных интервалов (для математического ожидания и среднего квадратического отклонения).

Элементы теории корреляции. Статистическая связь (корреляция) между двумя случайными величинами. Линейная и нелинейная корреляция. Коэффициент корреляции и корреляционное отношение, их свойства. Коэффициент регрессии. Понятие о множественной корреляции. Корреляционная матрица, ее свойства и применение.

## 1.4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Ошибки измерений. Классификация измерений. Истинная ошибка измерений. Распределение ошибок измерений и его параметры (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение). Закон распределения Гаусса. Распределение нормированных ошибок.

Классификация ошибок измерений. Свойства случайных и систематических ошибок измерений.

Характеристики (критерии) точности измерений. Средняя квадратическая ошибка. Средняя ошибка и ее связь со средним квадратическим отклонением распределения ошибок. Точность вычисления средней квадратической ошибки. Вероятная и средняя ошибка. Доверительные интервалы характеристик точности. Отбраковка результатов измерений по внутренней сходимости. Исследование ряда ошибок.

Ошибки округления. Свойства ошибок округления. Распределение ошибок округления. Предельная ошибка округлений. Средняя квадратическая ошибка округлений.

Ошибки функций. Истинные ошибки функций. Средняя квадратическая ошибка функции коррелированных измерений. Средняя квадратическая ошибка функции некоррелированных измерений. Типовые примеры. Расчет точности измерений.

Систематические ошибки измерений. Происхождение систематических ошибок, их закономерности распределения. Влияние систематических ошибок на точность измерений. Влияние систематических ошибок на точность функций результатов измерений. Оценка точности функций результатов измерений с учетом случайных и систематических ошибок, точность среднего арифметического, точность арифметической суммы. Допуски невязок. Окончательная отбраковка измерений. Меры борьбы с влиянием систематических ошибок. Понятие о методах систематических влияний.

## 1.5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическая обработка равноточных измерений. Равноточные и неравноточные измерения. Принцип арифметической середины. Уклонения от среднего и их свойства. Дисперсия и средняя квадратическая ошибка среднего арифметического. Доверительные границы для среднего квадратического отклонения результатов измерений. Формула Петерса. Отбраковка измерений в различных случаях геодезической практики. Порядок обработки равноточных измерений одной величины.

Математическая обработка неравноточных измерений. Свойство компенсации ошибок неравноточных измерений. Наиболее надежное значение измеренной величины.

Веса измерений. Весовое среднее. Вес функции коррелированных и некоррелированных результатов измерений. Оценка точности при неравноточных измерениях. Ошибка единицы веса. Вес и средняя квадратическая ошибка среднего весового. Установление системы весов и вычисление ошибки единицы веса в различных случаях геодезической практики. Точность определения ошибки единицы веса. Отбраковка

неравноточных измерений. Порядок обработки неравноточных измерений одной величины.

Оценка точности по разностям двойных измерений. Сущность задачи. Общий случай оценки точности ряда двойных измерений (при разных весах измерений). Оценка точности ряда неравноточных двойных измерений при одинаковой точности измерений отдельных величин. Средняя квадратическая ошибка ряда равноточных двойных измерений. Оценка точности при наличии заметных систематических расхождений в разностях двойных измерений. Порядок обработки ряда измерений.

## 2. ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ (ТЕСТЫ) ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Перечислите события различных видов.
2. Дайте определение относительной частоты и вероятности события.
3. Сформулируйте и запишите теоремы сложения и умножения вероятностей несовместных событий.
4. Сформулируйте и запишите теорему гипотез (формулу полной вероятности).
5. Приведите примеры применения формулы Бернулли в геодезической практике.
6. В каких случаях формулу Бернулли целесообразно заменять локальной теоремой Лапласа.
7. Дайте определение закона распределения случайной величины. Перечислите основные законы ее распределения.
8. Что Вам известно о функции распределения и ее плотности, а также их свойствах?
9. Приведите определение математического ожидания случайной величины и запишите формулы для его вычислений. Перечислите свойства математического ожидания.
10. Приведите определение дисперсии случайной величины и запишите формулы для ее вычислений. Свойства дисперсии.
11. К каким характеристикам случайной величины относят асимметрию и эксцесс?
12. Запишите формулу интеграла вероятностей  $\Phi(t)$  или функцию Лапласа.
13. Как вычисляется вероятность попадания случайной величины при нормальном законе распределения в заданный интервал?
14. Перечислите и запишите свойства случайных ошибок (погрешностей) результатов измерений.
15. Перечислите и запишите свойства систематических составляющих результатов измерений.
16. Запишите равномерный закон распределения и его основные характеристики.
17. Что Вам известно о функциональной и вероятностной зависимости между двумя величинами?

18. Что Вам известно о центральном смешанном моменте второго порядка системы двух случайных величин и по каким зависимостям вычисляют корреляционный момент системы двух прерывных и непрерывных случайных величин?

19. Запишите формулу корреляционной зависимости между двумя случайными величинами  $x$  и  $y$ .

20. В какой последовательности определяются коэффициент корреляции, его надежность и коэффициенты регрессии?

21. Что Вам известно о корреляционной матрице результатов измерений и области ее применения в теории математической обработки геодезических измерений.

22. Запишите формулы средней квадратической ошибки коррелированных и некоррелированных результатов геодезических измерений.

23. Получите формулы средней квадратической ошибки простой и общей арифметической середины.

24. В чем состоит «принцип равных влияний» и для чего он используется в геодезической практике?

25. Понятие веса измерения и вычисление весов однородных измерений в геодезической практике.

26. Получите формулы для вычисления веса функции измеренных величин.

27. Запишите основные формулы, применяемые при обработке равноточных измерений одной и той же величины.

28. В каком порядке и по каким формулам производится обработка неравноточных измерений одной величины.

29. Как строятся доверительные интервалы для истинного значения  $X$  и дисперсии единицы веса?

30. В какой последовательности и по каким формулам выполняется оценка точности по разностям двойных равноточных измерений?

31. В какой последовательности и по каким формулам выполняется оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений?

32. Запишите неравенство, при выполнении которого можно принять гипотезу об отсутствии в разностях ( $d_i$ ) постоянной систематической ошибки.

33. В какой последовательности выполняется исследование ряда ошибок на нормальный закон распределения?

34. С какой целью в теории математической обработки результатов геодезических измерений применяют критерии Аббе, Граббса, Фишера, Романовского, Бартлетта, Пирсона?

35. В чем принципиальное различие формул Гаусса и Бесселя, применяемых для оценки точности однородных измерений?

36. Найти вероятность того, что при вынимании двух шаров из урны, в которой помещено  $n$  шаров, среди которых  $k$  окрашенных, хотя бы один из двух шаров окажется окрашенным.

37. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $L$ , имеющей нормальный закон распределения, соответственно равны 20мм и 4мм. Найти вероятность того, что в результате измерений случайная величина  $L$  примет значение, заключенное в интервале  $\alpha, \beta$  ( $\alpha=8$ ;  $\beta=25$ мм).

38. В треугольнике ABC измерена сторона  $b$ , лежащая против угла  $B$  и угол  $A$ . Вычислите среднюю квадратическую, предельную и относительную ошибки площади треугольника. Числовые данные принять самостоятельно.

39. Определить допустимое значение невязки в ходе технического нивелирования, если средняя квадратическая ошибка отсчета равна 3мм.

40. Определить допустимое значение угловой невязки треугольника и ее вес, если один угол измерен с точностью первого разряда, а два угла – с точностью второго разряда.

41. Превышение  $h$  получено тригонометрическим нивелированием со средней квадратической ошибкой 5см. С какой точностью должно быть измерено расстояние и угол наклона.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная:

1. Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
2. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений / В.Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
3. Большаков В.Д. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: Учеб. пособие для вузов / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1984. – 352 с.
4. Голубев В.В. Основы теории ошибок: Учебное пособие / В.В. Голубев. – М.: МИИГАиК, 2005. – 66 с.
5. Дегтярев А.М. Теория математической обработки геодезических измерений. Вероятностно-статистические методы: Конспект лекций для студентов геодезического факультета / А.М. Дегтярев. – Новополюцк: ПГУ, 2005. – 212 с.

### Дополнительная:

6. Бурмистров Г.А. Задачник по способу наименьших квадратов / Г.А. Бурмистров. – М.: Геодезиздат, 1960. – 347 с.
7. Видуев Н.Г. Математическая обработка геодезических измерений / Н.Г. Видуев, А.Г. Григоренко. – Киев.: Вища школа, 1978. – 376 с.
8. Кемниц Ю.В. Теория ошибок измерений / Ю.В. Кемниц. – М.: Недра, 1967. – 175 с.



9. Смирнов Н.В. Теория вероятности и математическая статистика в приложении к геодезии / Н.В. Смирнов, Д.А. Белугин. – М.: Недра, 1969. – 379 с.
10. Справочник геодезиста (в двух книгах) / под ред. В.Д. Большакова и Г.П. Левчука. – Кн. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1975. – 527 с.
11. Картавенков И. Г. Методические указания и задания к контрольным работам №1 и №2 для студентов 3 курса заочной формы обучения специальности 1–56 02 01 «Геодезия». Теория математической обработки геодезических измерений / И. Г. Картавенков. – Новополюцк: ПГУ, 2008. – 28с.