УДК 528.063

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ КОРРЕЛАТНОМ СПОСОБЕ УРАВНИВАНИЯ

А.В. ГРИЩЕНКОВ, Е.В. ГРИЩЕНКОВ
(Полоцкий государственный университет)

Формула для вычисления главной псевдообратной матрицы коэффициентов условных уравнений при коррелатном способе уравнивания известна лишь для случая равноточных результатов измерений. В представленном нами исследовании она обобщена на случай неравноточных измерений, что делает метод решения систем условных уравнений универсальным в практическом применении. Зная псевдообратную матрицу коэффициентов условных уравнений, возможно обрабатывать системы зависимых уравнений, что по прежней методике давало деление на ноль при обращении матрицы коэффициентов нормальных уравнений коррелат. В результате разработан новый метод решения систем условных уравнений (зависимых или независимых), расширяющий возможности применения коррелатного способа уравнивания. В этом методе впервые используется специально разработанный нами алгоритм рекуррентного получения обратной весовой матрицы коррелат, без которого невозможна обработка систем зависимых условных уравнений.

В практике уравнительных вычислений известны два классических способа уравнивания: параметрический и коррелатный. Для первого способа под руководством профессора В.И. Мицкевича разработан алгоритм получения псевдообратной матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок, используемый для уравнивания нуль-свободных геодезических сетей и опубликованный в [1]. В данном исследовании эта методика применения псевдообратных матриц обобщена на случай коррелатного способа уравнивания, что делает метод решения систем условных уравнений универсальным в практическом применении.

Главная псевдообратная матрица коэффициентов условных уравнений при коррелатном способе уравнивания для случая равноточных измерений вычисляется по формуле [2, с. 47]:

$$B^{+} = B^{T}(BB^{T})^{-1}. \tag{1}$$

Для неравноточных измерений, когда диагональная матрица весов $P \neq E$, существует матричное выражение:

$$B^{+} = P^{\frac{1}{2}} B^{T}(BP^{-1}B^{T})^{-1}, \tag{2}$$

$$R^{+} = (B^{+})^{T} B^{+}, \tag{3}$$

что справедливо для матрицы нормальных уравнений коррелат R для равноточных измерений. Вычисление $(BP^{-1}B^{T})^{-1}$ проблематично, если система уравнений содержит зависимые условные уравнения и определитель матрицы $R = BP^{-1}B^{T}$ равен нулю. При этом для случая зависимых и независимых систем уравнений можно применить новую формулу:

$$B^{+} = P^{-\frac{1}{2}} B^{T} Q_{рек.}, \tag{4}$$

где $Q_{рек.}$ – обратная матрица коэффициентов системы нормальных уравнений коррелат, найденная рекуррентным способом, при соответствующем выборе начальной матрицы Q_0. Здесь $Q_{рек.} = Q_N$, где N – номер последнего измерения.

Формулы для вычисления матрицы $Q_{рек.}$ хорошо известны лишь для параметрического способа уравнивания [3; 4]. Для коррелатного способа нами получены следующие новые формулы:

- для i-того измерения (i-того столбца матрицы B) имеем

$$Q_i = Q_{i-1} - Z_i \cdot \frac{Z_i^T}{g_i}; \tag{5}$$

$$Z_i = Q_{i-1} \cdot B_i; \tag{6}$$

$$g_i = P_i + B_i^T \cdot Z_i. \tag{7}$$

Отметим, что матрица Q_0, используемая при подключении первого столбца матрицы коэффициентов условных уравнений B_1, для коррелатного способа уравнивания будет выбираться по тем же правилам, что и для параметрического способа, однако коэффициент C вычисляется по формуле:

$$C = \max\left|\sqrt{\frac{1}{P_i}} \cdot B_i\right|. \tag{8}$$

Вектор коррелат можно получить из выражения:

$$K = -R^{+}W, \tag{9}$$

где W – вектор свободных членов условных уравнений.

Вектор поправок в измерения из уравнивания можно найти по известной формуле

$$V = P^{-1}B^{T}K. \tag{10}$$

Формулы (2) – (10) позволяют реализовать коррелатный способ уравнивания для всех возможных случаев, когда коэффициенты матрицы B будут независимыми или зависимыми.

Данный алгоритм реализован на ЭВМ в виде подпрограммы qkor.for, исходный текст которой занимает 62 строки. Подпрограмма qkor.for вырабатывает признак PR, характеризующий матрицу системы нормальных уравнений коррелат $BP^{-1}B^{T}$. Если $PR = 0$, то указанная выше матрица R не вырожденная, в противном случае $PR = 1$. В обоих случаях решение будет найдено без особенностей. Величина GR, используемая в основной программе, реализующей коррелатный способ уравнивания, вычисляется по формуле:

$$GR = \frac{Q_{рек.}(1,1)}{R^{+}(1,1)}. \tag{11}$$

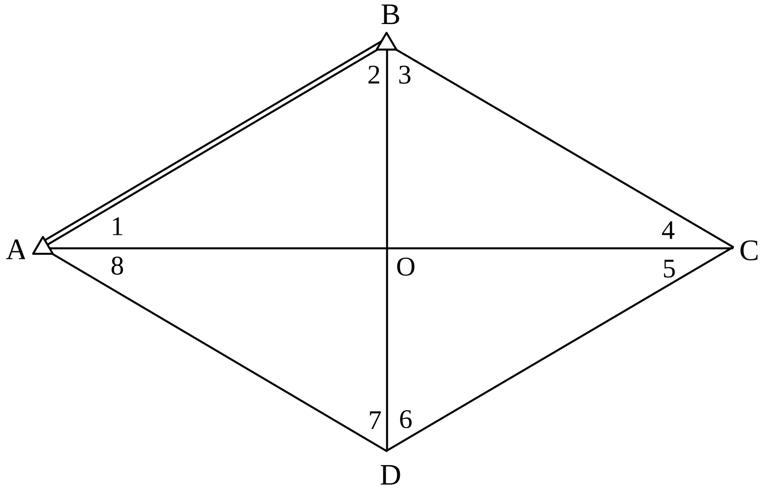
Если $GR > 10$, то $PR = 1$, так как матрица коэффициентов условных уравнений будет содержать зависимые строки.

В практике уравнительных вычислений зависимые условные уравнения могут появляться не только из-за ошибок вычислителя при составлении условных уравнений, но и при коррелатно-параметрическом способе уравнивания, когда не удается четко разделить эти уравнения на зависимые и независимые [5].

Построение универсального алгоритма уравнивания стало возможным благодаря применению новых матричных выражений (2) и (4) при последующем использовании равенств (5) – (10).

Числовые примеры

Пример 1. Применим новые формулы для уравнивания коррелатным способом геодезического четырехугольника, показанного на рисунке.



Геодезический четырехугольник

Таблица 1

Измеренные углы

Угол	Измерение
1	37°58'22"
2	39°18'30"
3	61°01'37"
4	41°41'41"
5	50°01'55"
6	27°14'40"
7	26°57'40"
8	75°45'05"

Матрица коэффициентов независимых условных уравнений приведена в таблице 2.

Таблица 2

Коэффициенты условных уравнений и поправки в углы из уравнивания

№ п/п	Треугольник ADB	Треугольник ABC	Треугольник ADC	Полюс в точке O	Веса измерений P	$\upsilon_P = E$	$\upsilon_P \neq E$
1	1	1	0	–1,2812	1	–8,6676	–19,0368
2	1	1	0	1,2214	2	12,2348	23,8066
3	0	1	0	–0,5537	3	–13,7840	–14,8175
4	0	1	0	1,1226	4	0,2168	0,0478
5	0	0	1	–0,8381	5	–1,3268	5,1432
6	0	0	1	1,9421	6	21,8941	16,6265
7	1	0	1	–1,9659	7	0,4462	5,7816
8	1	0	1	0,2539	8	18,9865	12,4487
W	–23''	10''	–40''	–81,5''			

Матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелат для случая неравноточных измерений приведена в таблице 3.

Таблица 3

Матрица R

1,7679	1,5000	0,2679	–0,9196
1,5000	2,0833	0	–0,5744
0,2679	0	0,6345	–0,0930
–0,9196	–0,5744	–0,0930	4,1339

Главная псевдообратная матрица B^{+} показана в таблице 4.

Таблица 4

Матрица B^{+}

0,3108	0,1964	–0,1630	–0,2172
0,6208	–0,0137	–0,2122	0,3403
–0,8361	0,8408	0,3326	–0,1390
–0,5341	0,6559	0,2421	0,1135
–0,4333	0,2764	0,8688	–0,1291
–0,1383	0,1544	0,7309	0,1989
0,2643	–0,2296	0,4632	–0,1424
0,4251	–0,2824	0,3903	0,0858

Матрицы $Q_{рек.}$ и $Q = R^{+}$ представлены в таблице 5.

Таблица 5

Матрицы $Q_{рек.}$ и Q (в данном примере совпадающие)

1,92383	–1,32267	–0,77889	0,22665
–1,32267	1,40854	0,54570	–0,08623
–0,77889	0,54570	1,89676	–0,05475
0,22665	–0,08623	–0,05475	0,27911

При этом программа qkor.for сообщила: $PR = 0$.

Поправки из уравнивания при $P \neq E$ приведены в таблице 2.

Несмотря на то, что нами применены выражения (2) – (8), результаты уравнивания геодезического четырехугольника оказались такими же, как и при обработке по формулам классического коррелатного способа уравнивания, так как строки матрицы B независимые. Если же строки матрицы B будут зависимыми, то классический способ уравнивания даст деление на ноль при вычислении обратной матрицы нормальных уравнений коррелат и процесс вычислений окажется прерванным.

Пример 2. Рассмотрим обработку системы зависимых условных уравнений, приведенной в таблице 6.

Таблица 6

Коэффициенты условных уравнений и поправки в углы из уравнивания

№ п/п	Треугольник ADB	Треугольник ABC	Треугольник ADC	Треугольник BCD	Веса измерений P	$\upsilon_P \neq E$
1	1	1	0	0	1	1,69
2	1	1	0	0	2	0,84
3	0	1	0	1	3	–7,16
4	0	1	0	1	4	–5,37
5	0	0	1	1	5	10,65
6	0	0	1	1	6	8,88
7	1	0	1	0	7	10,42
8	1	0	1	0	8	9,55
W	–23''	10''	–40''	–7''		

Главная псевдообратная матрица B^+ для рассмотренного примера дана в таблице 7.

Таблица 7

Матрица B^+

0,3463	0,2701	–0,0648	–0,1409
0,2448	0,1910	–0,0458	–0,0996
–0,2666	0,3413	–0,1513	0,4566
–0,2309	0,2955	–0,1310	0,3954
0,0236	–0,1156	0,4914	0,3521
0,0216	–0,1055	0,4485	0,3214
0,3254	–0,2190	0,4898	–0,0546
0,3044	–0,2049	0,4582	–0,0511

Матрица $Q_{рек.}$ представлена в таблице 8.

Таблица 8

Матрица $Q_{рек.}$

25000000,50382	–25000000,15756	–24999999,64287	24999999,69575
–25000000,15756	25000000,42770	24999999,57811	–24999999,83663
–24999999,64287	24999999,57811	25000000,93886	–24999999,84016
24999999,69575	–24999999,83663	–24999999,84016	25000000,62746

Таким образом, по формулам (2) – (10) мы впервые получили поправки в углы из уравнивания при обработке зависимых условных уравнений, используя коррелатный способ уравнивания (см. последнюю колонку таблицы 6).

Матрица $Q = R^+$, вычисленная по формуле (3), приведена в таблице 9.

Таблица 9

Матрица Q

0,50382	–0,15756	0,35713	–0,30425
–0,15756	0,42770	–0,42189	0,16337
0,35713	–0,42189	0,93886	0,15984
–0,30425	0,16337	0,15984	0,62746

При этом программа qkor.for сообщила: $PR = 1$.

Заключение. Благодаря применению псевдообратной матрицы коэффициентов условных уравнений, вычисляемой по формуле (2), стало возможным обрабатывать системы зависимых условных уравнений. Для этого потребовалось применить формулы (5) – (7) для рекуррентного уравнивания геодезических сетей коррелатным способом. Очевидно, что при переходе от (2) к (4) необходимо использовать вспомогательную матрицу $Q_{рек.}$, вместо того чтобы вычислять $(BP^{-1}B^T)^{-1}$, как это было в классическом коррелатном способе уравнивания, дающем деление на ноль при зависимых строках матрицы *B*.

Теперь не требуется:

1) выбирать метод уравнивания в зависимости от характеристик матрицы $BP^{-1}B^T$;

2) применять метод сингулярного разложения матриц, метод регуляризации, предложенный академиком А.Н. Тихоновым, и другие методы решения вырожденных систем нормальных уравнений;

3) анализировать систему условных уравнений до ее решения. Если система нормальных уравнений вырожденная, то она будет решена как обычная с выработкой признака $PR = 1$;

4) производить приближения внутри программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грищенков, Е.В. Универсальный алгоритм идентификации необходимых и избыточных измерений и его практические приложения / Е.В. Грищенков, В.И. Мицкевич // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2011. – № 3. – С. 64 – 68.
2. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука,1984. – 320 с.
3. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. – 191 с.
4. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
5. Герасименко, М.Д. Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений / М.Д. Герасименко // Труды НИИГАиК. – Новосибирск, 1975. – Т. 34. – С. 66 – 73.

Поступила 29.03.2012

A NEW METHOD FOR SOLVING SYSTEMS OF CONDITIONAL EQUATIONS FOR KORELLATNY WAY TO EQUALIZE

A. GRISHCHENKOV, E. GRISHCHENKOV

The formula for calculating the main pseudoinverse matrix of coefficients in the conditional equations for korrelatny equalization method is known only for the case of equally accurate results of measurements. In this article it is extended to the case are not equally accurate measurements, which makes the method for solving systems of equations of condition in the practical application of the universal. Knowing the pseudoinverse matrix of coefficients of the conditional equations, can handle the system of dependent equations, that the former method gave a divide by zero when applying the coefficient matrix of normal equations of correlate. As a result, developed a new method for solving systems of equations of condition (dependent or independent) that extends the capabilities of korrelatny method. In this method, first used a specially algorithm developedthe authors obtain the recurrent weight matrix inverse correlate, without which it can not be processing system of dependent-conditional equations.