УДК 528.063

УРАВНИВАНИЕ СПУТНИКОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ БЕЗ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ МЕТОДОМ L_p-ОЦЕНОК

А.Ю. БУДО, Н.О. КУПРИЕНКО, О.О. УСОВА
(Полоцкий государственный университет);
А.П. ПРИСЯЖНЮК
(Аэрокарт, Минск)

Для геодезического применения спутниковых геодезических систем используется относительный метод определения координат. В статье рассматриваются вопросы уравнивания GPS-сети построенной в виде замкнутых геометрических фигур (так называемый сетевой метод), который представляет собой систему пунктов с определением векторов между ними таким образом, чтобы они образовали замкнутые геометрические фигуры (полигоны). При этом возникает задача уравнивания, которую можно решить коррелатным или параметрическим способом. Второй способ проще первого при реализации метода L_p-оценок. Однако он должен быть дополнен соответствующей методикой при уравнивании GPS-построений без исходных пунктов. Осложняется задача уравнивания и в том случае, когда предусматривается обработка зависимых GPS-измерений. Это приводит к разработке новых методов уравнивания в рамках способа L_p-оценок. Указанные выше задачи решаемы в полном объёме, включая оценку точности как при раздельном (только для наземных результатов измерений), так и при совместной обработке в относительном методе определения координат.

Введение. За последние 15 лет экспериментальные исследования показали, что спутниковые методы по сравнению с традиционными по точности определения пространственных координат удовлетворяют практически всем видам топографо-геодезических работ. Спутниковые методы можно применять для создания съёмочного обоснования крупномасштабных съёмок вплоть до масштаба 1:500. При этом достоинствами спутниковых методов являются: отсутствие необходимости в постройке геодезических сигналов; полная независимость измерения от взаимной видимости между пунктами, времени суток и года; всепогодность измерений; возможность определения координат в кратчайшие сроки.

Исследования российских ученых показали, что корреляционная матрица в спутниковых GPS-измерениях, полученная по внутренней сходимости результатов серии, влияет на результаты уравнивания незначительно. Незначительной будет максимальная погрешность приращения координат для измерений, проведенных в благоприятных условиях (при незаслоненности небосвода). Отсюда следует, что при правильном выборе места установки спутникового приемника, т.е. при открытом небосводе, отмечена некоррелированность результатов измерений приращения координат. В этом случае можно производить уравнивание спутниковой сети раздельно для каждой горизонтальной и вертикальной составляющих (так же, как нивелирные сети).

Цель исследования – практическое доказательство того, что при единичной корреляционной матрице совместное и раздельное уравнивание дают одинаковые результаты, однако при раздельном уравнивании время вычисления на ЭВМ сокращается до 30 раз по сравнению с совместным.

Основная часть. В работах [1, 2] отмечается возможность раздельного уравнивания приращений прямоугольных координат ΔX, ΔY, ΔZ, полученных в относительном методе спутниковой геодезии. Преимущества раздельного уравнивания перед совместным очевидны:

1) в девять раз уменьшаются матрицы: матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок A; матрица нормальных уравнений A^TPA и обратная к ней матрица, а также матрица $F = (A^TPA)^{-1}A^TP$, используемая при оценке точности в нетрадиционных алгоритмах уравнивания;

2) примерно в 30 раз уменьшается время вычислений на персональных компьютерах;

3) значительно уменьшается число операторов в программе уравнивания спутниковых измерений;

4) по одной и той же программе возможно уравнивание не только GPS-измерений, но и нивелирных превышений.

Препятствием к раздельному уравниванию служит наличие объемной корреляционной матрицы для вектора между двумя смежными пунктами GPS и необходимость перехода при учете корреляции к обобщенному методу наименьших квадратов. При отсутствии корреляции совместный и раздельный метод уравнивания дают одинаковые результаты (уравненные координаты и результаты оценки точности даже при использовании метода L_p-оценок).

Исследования показали, что при совместном и раздельном уравнивании оценку точности можно выполнить по следующим формулам [2]:

$$\mu_{совм} = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}{3}}; \qquad (1)$$

$$M_{совм} = \mu_{совм}\sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}}\,, \tag{2}$$

где

$$Q_{11} = \left(\frac{m_x}{\mu_x}\right)^2;\ Q_{22} = \left(\frac{m_y}{\mu_y}\right)^2;\ Q_{33} = \left(\frac{m_z}{\mu_z}\right)^2. \tag{3}$$

Средние квадратические ошибки по осям координат можно вычислить по известным формулам:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{V_x^T P_x V_x}{r}};\ \mu_y = \sqrt{\frac{V_y^T P_y V_y}{r}};\ \mu_z = \sqrt{\frac{V_z^T P_z V_z}{r}}\,, \tag{4}$$

где $r = N - t$ (N – количество измерений; t – число параметров).

Важным вопросом как при совместной, так и при раздельной обработке является вопрос уравнивания GPS-сетей без исходных пунктов. В работе [3] дано решение этой задачи на основе метода регуляризации. Но, как оказалось, для поиска параметра регуляризации необходимо до 10...15 раз получать обратную матрицу нормальных уравнений.

Для обработки GPS-построений и сетей нивелирования в производственных программах рекомендуем следующий метод получения N^+ [2, 3]:

$$N^+ = (N + I^T I)^{-1} - \frac{1}{\kappa^2} I^T I\,, \tag{5}$$

где $I = (1\ \ 1\ \ \ldots\ \ 1)_{1\times\kappa}$; κ – число всех пунктов геодезической сети.

Формула (5) легко программируется: 1) вычисляем $N = A^T PA$; 2) к каждому элементу этой матрицы прибавляем единицу и получаем обратную матрицу Q обычным путем; 3) из каждого элемента матрицы Q отнимаем $1/\kappa^2$ и получаем N^+.

Решим пример уравнивания реального GPS-четырехугольника совместным и раздельным способом при одном исходном пункте (табл. 1, 2) и при отсутствии исходных пунктов (табл. 3, 4), когда при использовании совместного способа матрица I в формуле (5) будет такой:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times l}. \tag{6}$$

Таблица 1

Совместное уравнивание GPS-четырехугольника без исходных пунктов (некоррелированные измерения). Программа kgpsnulo.bat

Обозначения	$n = 1{,}5$	$n = 2{,}0$	$n = 2{,}5$
μ	0,156	0,402	1,102
M_1	0,0051	0,0060	0,0054
M_2	0,0042	0,0051	0,0044
M_3	0,0047	0,0060	0,0053
M_4	0,0054	0,0067	0,0059
δ_{x1}	0,0004	–4701,1744	–0,0001
δ_{y1}	0,0016	11167,7361	–0,0007
δ_{z1}	0,0001	–732,4697	–0,0001
δ_{x2}	0,0000	–634,4412	–0,0001
δ_{y2}	0,0005	9396,2221	–0,0002
δ_{z2}	0,0008	–2781,3696	–0,0003
δ_{x3}	–0,0002	–0,0006	0,0001
δ_{y3}	–0,0006	–0,0025	–0,0002
δ_{z3}	0,0002	–0,0027	–0,0002
δ_{x4}	–0,0002	4919,3766	0,0001
δ_{y4}	–0,0016	4509,7454	0,0004
δ_{z4}	–0,0010	–4723,6609	0,0005

В таблице 2 приведены результаты вычислений по формулам, опубликованным ранее [4] для зависимых GPS-измерений.

Таблица 2

Совместное уравнивание GPS-четырехугольника без исходных пунктов (коррелированные измерения). Программа kgpsnulo.bat

Обозначения	$n = 1,5$	$n = 2,0$	$n = 2,5$
μ	0,180	0,411	1,108
M_1	0,0299	0,0127	0,0183
M_2	0,0273	0,0076	0,0065
M_3	0,0187	0,0142	0,0273
M_4	0,0068	0,0049	0,0091
δ_{x1}	0,0019	–4701,1746	–0,0016
δ_{y1}	0,0012	11167,7370	–0,0008
δ_{z1}	–0,0003	–732,4699	–0,0004
δ_{x2}	0,0001	–634,4412	0,0004
δ_{y2}	0,0003	9396,2224	0,0001
δ_{z2}	0,0011	–2781,3696	–0,0003
δ_{x3}	–0,0017	–0,0008	0,0006
δ_{y3}	0,0002	–0,0039	0,0001
δ_{z3}	0,0002	–0,0027	0,0005
δ_{x4}	–0,0003	4919,3770	0,0005
δ_{y4}	–0,0018	4509,7455	0,0007
δ_{z4}	–0,0010	–4723,6607	0,0002

Таблица 3

Оценка точности координат точек без исходных пунктов при раздельном уравнивании по X, Y и Z (некоррелированные измерения)

Обозначения	$n = 1,5$		$n = 2,0$		$N = 2,5$	
	Q_{ii}	m	Q_{ii}	m	Q_{ii}	m
Уравнивание по оси X						
μ	0,0494		0,126		0,337	
m_{x1}	442	1,04	102	1,27	10,6	1,10
m_{x2}	197	0,69	41,2	0,81	4,23	0,69
m_{x3}	231	0,75	41,2	0,81	4,23	0,69
m_{x4}	442	1,04	121	1,38	12,9	1,21
Уравнивание по оси Y						
μ	0,160		0,376		0,977	
m_{y1}	408	3,23	87,7	3,52	9,44	3,00
m_{y2}	313	2,83	79,3	3,35	8,04	2,77
m_{y3}	517	3,64	140	4,44	16,2	3,92
m_{y4}	408	3,23	99,6	3,75	10,6	3,18
Уравнивание по оси Z						
μ	0,212		0,573		1,605	
m_{z1}	258	3,41	33,0	3,29	3,36	2,94
m_{z2}	216	3,12	41,6	3,70	3,63	3,06
m_{z3}	178	2,83	36,5	3,46	3,11	2,83
m_{z4}	343	3,92	60,2	4,44	5,64	3,81
Совместная оценка точности при раздельном уравнивании						
μ	0,156		0,402		1,102	
M_1	5,19		6,00		5,33	
M_2	4,19		5,12		4,39	
M_3	4,75		5,93		5,34	
M_4	5,39		6,74		5,44	

В таблице 3 обработка выполнялась по формулам (1) – (6).

Таблица 4

Раздельное уравнивание GPS-четырехугольника по осям *X*, *Y*, *Z* без исходных пунктов

Обозначения	$n = 1,5$	$n = 2,0$	$n = 2,5$
Уравнивание по оси *X*			
δ_{x1}	–0,0004	–4701,1744	–0,0001
δ_{x2}	0,0000	–634,4412	–0,0001
δ_{x3}	0,0002	–0,0006	0,0001
δ_{x4}	0,0002	4919,3766	0,0001
Уравнивание по оси *Y*			
δ_{y1}	0,0016	11167,7361	–0,0007
δ_{y2}	0,0005	9396,2221	–0,0002
δ_{y3}	–0,0006	–0,0025	0,0002
δ_{y4}	–0,0016	4509,7454	0,0006
Уравнивание по оси *Z*			
δ_{z1}	0,0001	–732,4697	–0,0001
δ_{z2}	0,0008	–2781,3696	–0,0003
δ_{z3}	0,0002	–0,0027	–0,0002
δ_{z4}	–0,0010	–4723,6609	0,0005

Примечание. В таблицах 1 – 4: *n* – показатель степени ($n = 2,0$ – метод наименьших квадратов; $n = 1,0$ – метод наименьших модулей); δ – изменения приращений координат по сравнению с $n = 2,0$; μ – средняя квадратическая ошибка единицы веса; M_i – средняя квадратическая ошибка положения *i*-й точки.

По данным таблиц 1 – 4 можно сделать **выводы**: результаты уравнивания как совместного, так и раздельного полностью совпадают; при использовании различных степеней *n* наихудшие результаты оценки точности получены для метода, соответствующего $n = 1,5$, независимо от того присутствуют или отсутствуют исходные пункты; эффект, указанный в пункте 2, также присутствует при анализе величин δ_x, δ_y и δ_z, полученных при различных значениях *n*.

В **заключение** отметим, что с использованием формулы (5) составлена производственная программа по раздельному уравниванию GPS-сетей, внедренная в 2004 году в Республиканском унитарном предприятии «Белаэрокосмогеодезия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко, Е.Г. Особенности уравнивания сетей, построенных относительным методом спутниковой геодезии / Е.Г. Бойко, С.А. Ванин // Геодезия и картография. – 2001. – № 9. – С. 9 – 14.
2. Мицкевич, В.И. Раздельное уравнивание GPS-измерений / В.И. Мицкевич, А.П. Присяжнюк, В.Г. Стержанов / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 720.-ГД. 2000.
3. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов [и др.] // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1978. – № 3. – С. 3 – 10.
4. Мицкевич, В.И. Алгоритм обобщённого метода *Lp*-оценок на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 92 – 96.

Поступила 14.04.2008