# ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

## СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МИНИМИЗАЦИИ ДВУХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНОВЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

*канд. техн. наук В.В. ЯЛТЫХОВ, П.В. СУББОТЕНКО*
*(Полоцкий государственный университет);*
*канд. техн. наук П.М. ЛЕВДАНСКИЙ*
*(Легром, Минск)*

*Многокритериальная оптимизация (МК) используется с 1999 года при уравнивании локальных геодезических сетей. Причиной последнего является то, что в малых геодезических сетях (до 50 определяемых пунктов) невозможно установить закон распределения погрешностей наблюдений и при показателе степени $n = 2$ (МНК) результаты уравнивания практически мало отличаются от метода Lp-оценок при любом $1 \le n \le 3$. Метод МК предусматривает отыскание специальным способом степени $n_i$ под различными условиями в виде двух целевых функций. Первая целевая функция подобрана так же, как и в алгоритме Lp-оценок. Вторая целевая функция применяется в случае МК, предусматривает поиск степеней $n_i$ под различными критериями, например, $\min(\max M)$, где $M$ – средняя квадратическая ошибка положения пункта в слабом месте. Эффект от применения МК составляет 20 % в лучшую сторону по сравнению с МНК. Впервые рассмотрены различные методы поиска $n_i$ : метод релаксации, способ Якоби и алгоритм французского математика Коши.*

**Введение.** Как известно, недостаток метода $L_p$-оценок заключается в постоянстве показателя степени $n$ для всех разнородных результатов измерений, т.е., как и в МНК, используется одна степень для всех измерений в геодезической сети. Для того чтобы в полигонометрии для углов применить одну степень, а для сторон другую, в 1999 году профессором В.И. Мицкевичем была предложена многостепенная целевая функция $\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left| L_i(X) \right|^{n_i}$.

Предлагается найти степень $n_i$ не средствами математической статистики, а под условием минимума максимальной ошибки положения пункта в слабом месте сети. В результате получаются два критерия: основной и дополнительный. Чтобы воспользоваться многокритериальной оптимизацией, в 2000 году была разработана методика оценки точности любой функции с любыми степенями $n_i$ для каждой группы или для каждого измерения.

**Основная часть.** Рассмотрим случай многокритериальной оптимизации, когда при минимизации используются две целевые функции:

$$\Phi_1(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i \left| L_i(X) \right|^{n_i}; \tag{1}$$

$$\Phi_2(X) = \min(\max M), \tag{2}$$

где $N$ – количество результатов измерений; $P_i = \left(\frac{C_i}{\sigma_i}\right)^{n_i}$; $n_i$ – индивидуальный для каждого измерения показатель степени, который отыскивается соответствующим способом под условием $\Phi_2(X)$, в котором $M$ – значение ошибки планового положения пункта.

В таблице 1 приведены результаты оценки точности ($\mu = \sqrt{V^{\mathrm{T}} PV / r}$ ; $G$ – первое число обусловленности Тюринга; $M_j$ – ошибки положения пунктов и $P_j$ – вероятности попадания в круг ошибок, найденные по расширенной псевдообратной матрице из 10000 испытаний) для одной целевой функции $\Phi_1(X)$ при $n_i = 2{,}0$ (МНК).

Во всех случаях возьмем шесть тестовых примеров из [1, с. 93, 129, 153 (триангуляция), 179, 202 (трилатерация) и 217 (линейно-угловая сеть)].

Таблица 1

Обработка тестовых примеров по МНК

| Обозначения | Номер тестового примера | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\mu$ | 0,608 | 1,139 | 0,831 | 1,053 | 1,098 | 0,452 |
| $C$ | 83,1 | 12,1 | 34,4 | 67,8 | 5,9 | 55,9 |
| $M_1$ | 0,0523 | 0,0475 | 0,0424 | 0,0595 | 0,0373 | 0,0077 |
| $M_2$ | 0,0536 | 0,0292 | 0,0439 | 0,0766 | 0,0406 | 0,0141 |
| $M_3$ | 0,0245 | 0,0387 | 0,0206 | 0,0392 | – | 0,0125 |
| $M_4$ | – | – | – | 0,0589 | – | – |
| $P_1$ | 0,634 | 0,635 | 0,638 | 0,659 | 0,640 | 0,644 |
| $P_2$ | 0,635 | 0,632 | 0,649 | 0,673 | 0,622 | 0,645 |
| $P_3$ | 0,667 | 0,631 | 0,637 | 0,630 | – | 0,641 |
| $P_4$ | – | – | – | 0,658 | – | – |

В таблице 2 представлены результаты многокритериальной оптимизации методом релаксации с поиском $n_i$ с шагом $\delta_i = 0,1$ ( $j$ – количество приближений, которые равны одному просмотру $N$ измерений).

Таблица 2

Многокритериальная оптимизация с постоянным шагом релаксации $\delta_i = 0,1$

| Обозначения | Номер тестового примера | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\mu$ | 0,474 | 1,084 | 0,803 | 0,515 | 0,989 | 0,331 |
| $C$ | 84,8 | 11,2 | 35,2 | 56,1 | 5,7 | 40,0 |
| $M_1$ | 0,0467 | 0,0436 | 0,0469 | 0,0437 | 0,0381 | 0,0061 |
| $M_2$ | 0,0435 | 0,0325 | 0,0430 | 0,0549 | 0,0377 | 0,0110 |
| $M_3$ | 0,0196 | 0,0436 | 0,0208 | 0,0239 | – | 0,0111 |
| $M_4$ | – | – | – | 0,0459 | – | – |
| $P_1$ | 0,643 | 0,639 | 0,640 | 0,676 | 0,642 | 0,636 |
| $P_2$ | 0,640 | 0,632 | 0,648 | 0,659 | 0,624 | 0,651 |
| $P_3$ | 0,668 | 0,626 | 0,634 | 0,619 | – | 0,641 |
| $P_4$ | – | – | – | 0,676 | – | – |
| $K$ | 20 | 10 | 8 | 15 | 5 | 20 |

В таблице 3 приведены результаты многокритериальной оптимизации методом релаксации с поиском $n_i$ с шагом $\delta_i = 0,25$ ( $j \le 10$ ) и $\delta_i = 0,025$ ( $11 \le j \le 20$ ), что способствует большему изменению $n_i$, чем при $\delta_i = 0,1$.

Таблица 3

Многокритериальная оптимизация с переменным шагом релаксации

| Обозначения | Номер тестового примера | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\mu$ | 0,458 | 1,071 | 0,818 | 0,511 | 0,873 | 0,308 |
| $C$ | 82,2 | 11,5 | 28,8 | 57,7 | 5,3 | 31,5 |
| $M_1$ | 0,0446 | 0,0439 | 0,0375 | 0,0444 | 0,0383 | 0,0060 |
| $M_2$ | 0,0408 | 0,0326 | 0,0426 | 0,0534 | 0,0383 | 0,0105 |
| $M_3$ | 0,0157 | 0,0439 | 0,0248 | 0,0243 | – | 0,0106 |
| $M_4$ | – | – | – | 0,0450 | – | – |
| $P_1$ | 0,638 | 0,638 | 0,652 | 0,677 | 0,647 | 0,636 |
| $P_2$ | 0,641 | 0,637 | 0,648 | 0,659 | 0,625 | 0,645 |
| $P_3$ | 0,672 | 0,627 | 0,644 | 0,622 | – | 0,632 |
| $P_4$ | – | – | – | 0,678 | – | – |

В таблице 4 приведены результаты вычислений методом многокритериальной оптимизации с использованием способа Якоби:

$$(n_i)_{j+1} = (n_i)_j - \frac{\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial n_i}}{\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial n_i^2}}, \tag{3}$$

где $j$ – номер приближения ($j < 20$), а

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \frac{1}{2\delta}\left([\Phi_2]_\delta - [\Phi_2]_{-\delta}\right); \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial n^2} = \frac{1}{\delta^2}\left([\Phi_2]_\delta - 2\Phi_2 + [\Phi_2]_{-\delta}\right) \tag{5}$$

при $\delta_i = 0{,}01$, задаваемые в степень $n_i$.

Таблица 4

Многокритериальная оптимизация с применением способа Якоби

| Обозначения | Номер тестового примера | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\mu$ | 0,540 | 1,091 | 0,801 | 0,524 | 1,212 | 0,310 |
| $C$ | 76,5 | 11,5 | 34,7 | 58,1 | 5,82 | 37,0 |
| $M_1$ | 0,0483 | 0,0441 | 0,0408 | 0,0460 | 0,0399 | 0,0066 |
| $M_2$ | 0,0477 | 0,0320 | 0,0429 | 0,0573 | 0,0396 | 0,0108 |
| $M_3$ | 0,0212 | 0,0441 | 0,0208 | 0,0258 | – | 0,0108 |
| $M_4$ | – | – | – | 0,0468 | – | – |
| $P_1$ | 0,640 | 0,636 | 0,638 | 0,676 | 0,636 | 0,636 |
| $P_2$ | 0,637 | 0,635 | 0,648 | 0,660 | 0,633 | 0,650 |
| $P_3$ | 0,663 | 0,626 | 0,637 | 0,621 | – | 0,640 |
| $P_4$ | – | – | – | 0,673 | – | – |

Численно установлено, что в 50 % случаях $\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial n^2} < 0$, что говорит о том, что методом Ньютона из-за седловой точки в окрестностях минимума $\Phi_2(X)$ пользоваться для поиска оптимальных степеней $n_i$ нельзя. Расчетами установлено, что методом Якоби затрачивается в два раза меньше времени, чем методом релаксации.

В таблице 5 представлены результаты вычислений методом многокритериальной оптимизации с использованием способа Коши:

$$(n_i)_{j+1} = (n_i)_j - \lambda_j\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_i}\right), \tag{6}$$

где

$$\lambda_j = \frac{\Phi_2(X)}{\sum_{i=1}^{N}\left[\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial n_i}\right]^2}. \tag{7}$$

Первые частные производные, входящие в (5), (6) и (7), определялись численно по формуле (4) при $\delta_i = 0{,}01$.

Расчеты выполнялись комбинированным методом:

- первые пять приближений методом Якоби при ( $n_0 = 2{,}0$ );
- остальные ( $j < 40$ ) – методом Коши.

Время вычислений оказалось в 2 раза меньше, чем методом релаксации.

Таблица 5

Многокритериальная оптимизация с применением способа Коши

| Обозначения | Номер тестового примера | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\mu$ | 0,513 | 1,09 | 0,801 | 0,493 | 1,094 | 0,314 |
| $C$ | 79,0 | 11,4 | 35,3 | 56,0 | 5,78 | 39,0 |
| $M_1$ | 0,0479 | 0,0441 | 0,0424 | 0,0420 | 0,0380 | 0,0066 |
| $M_2$ | 0,0467 | 0,0311 | 0,0429 | 0,0501 | 0,0385 | 0,0111 |
| $M_3$ | 0,0209 | 0,0440 | 0,0209 | 0,0221 | – | 0,0111 |
| $M_4$ | – | – | – | 0,0433 | – | – |
| $P_1$ | 0,641 | 0,635 | 0,638 | 0,682 | 0,641 | 0,635 |
| $P_2$ | 0,640 | 0,633 | 0,647 | 0,657 | 0,623 | 0,652 |
| $P_3$ | 0,665 | 0,626 | 0,634 | 0,621 | – | 0,642 |
| $P_4$ | – | – | – | 0,679 | – | – |

В таблице 6 приведены для примера 1 значения $n_i$ для 13 направлений (не считая начальные нулевые направления). Здесь можно сравнить $n_i$ . Номер столбца таблицы 6 соответствует номеру таблиц, указанных выше. Таким образом, первый столбец – начальные значения $n_i$ (МНК); второй и третий – соответствуют методу релаксации; четвертый – Якоби; пятый – Коши.

Таблица 6

Величины $n_i$ , найденные для первого примера из [1, с. 93] в 5 случаях

| № п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,0 | 1,5 | 1,425 | 1,59 | 1,64 |
| 2 | 2,0 | 2,6 | 3,475 | 1,90 | 2,34 |
| 3 | 2,0 | 3,7 | 3,500 | 2,91 | 3,27 |
| 4 | 2,0 | 2,1 | 2,450 | 2,08 | 1,74 |
| 5 | 2,0 | 2,7 | 2,150 | 2,06 | 2,38 |
| 6 | 2,0 | 1,7 | 2,100 | 2,66 | 2,64 |
| 7 | 2,0 | 1,6 | 1,750 | 1,62 | 1,60 |
| 8 | 2,0 | 1,6 | 2,250 | 1,96 | 1,84 |
| 9 | 2,0 | 1,7 | 1,700 | 1,84 | 1,99 |
| 10 | 2,0 | 3,9 | 3,600 | 2,66 | 2,79 |
| 11 | 2,0 | 2,0 | 1,275 | 2,06 | 1,89 |
| 12 | 2,0 | 3,9 | 4,675 | 3,21 | 3,43 |
| 13 | 2,0 | 2,2 | 1,750 | 1,56 | 2,25 |

**Заключение.** Отметим, что предпочтение следует отдать методу релаксации (см. табл. 3) как наиболее надежному при решении задачи многокритериальной оптимизации. Названные выше методы использовались только для поиска $n_i$, а оценка точности выполнялась путем численного вычисления матрицы F способом, опубликованном в [2].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб. пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
2. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 5 с. – Деп. в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681-ГД 99.


*Поступила 14.04.2008*