УДК 528.063

ОСОБЕННОСТИ УРАВНИВАНИЯ СПУТНИКОВЫХ GPS-СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

В.Е. ПЛЮТА
(Полоцкий государственный университет)

Актуальной проблемой необходимо признать разработку основных принципов совместного использования спутниковых и традиционных геодезических измерений в виде технологической схемы, включающей полный комплекс полевых и камеральных работ. Учитывая, что спутниковые измерения осуществляются с использованием пространственной прямоугольной (или геодезической) системы координат, а наземные измерения выполняются, как правило, с применением плоской прямоугольной системы координат, достаточно актуальными оказываются вопросы, связанные с взаимным преобразованием координат и их функций из системы в систему. В этом плане наиболее перспективным в настоящее время представляется метод GPS-определений, который применительно к рассматриваемому объекту работ является многоаспектным. При этом актуальными оказываются проблемы разработки оптимальной технологической схемы производства работ и математической обработки спутниковых сетей по методу наименьших квадратов параметрическим или коррелатным способом.

Введение. На основе известных положений линейной алгебры и аналитической геометрии многими авторами разработан математический аппарат анализа корреляционных матриц спутниковых измерений, в котором: предусмотрено вычисление средней квадратической погрешности вектора базовой линии в заданном направлении; определена система координат, где экстремальные средние квадратические ошибки направлены коллинеарно координатным осям; определена матрица перехода к данной системе координат; определены углы между старыми и новыми координатными осями.

Рассмотрение корреляционных матриц, полученных по внутренней сходимости результатов измерений в серии, показывает, что они не могут непосредственно служить в качестве определяющих матриц для назначения весовой матрицы, так как дают завышенную оценку точности. Это следует из сравнения корреляционных матриц, полученных по внутренней сходимости результатов измерений в серии, с корреляционной матрицей, полученной в результате статической обработки результатов девяти независимых серий измерений.

Известно, что при правильном выборе места установки спутникового приемника, т.е. при открытом небосводе, отмечена некоррелированность результатов измерений приращения координат. В этом случае можно производить уравнивание спутниковой сети раздельно для каждой горизонтальной и вертикальной составляющих (как нивелирные сети) [1, 2].

Из двух известных в уравнительных вычислениях на ЭВМ способов уравнивания, коррелатного и параметрического, последний способ справедливо признается наиболее удобным для программирования, так как условные уравнения составлять во много раз труднее, чем параметрические. При этом в производственных программах, независимо от способа уравнивания, как правило, составляются и анализируются условные уравнения фигур, полюса и дирекционных углов, так как в инструктивных документах регламентируются допуски на свободные члены этих уравнений. В результате применяют и параметрический, и элементы коррелатного способа уравнивания [3].

1. Обработка независимых GPS-измерений коррелатным способом. В настоящее время GPS-измерения относительным методом спутниковой геодезии широко используются при развитии пространственных спутниковых геодезических сетей. Несмотря на то, что измерения выполняются с высокой точностью, существуют погрешности в измеренных приращениях ΔX, ΔY, ΔZ, иногда достигающие 20 мм и более. В связи с этим при наличии избыточных измеренных величин возникает задача уравнивания. Ниже будем рассматривать уравнивание свободной сети GPS, опирающейся на один исходный пункт, коррелатным способом.

Как отмечалось в [2], для независимых GPS-измерений теоретически и практически доказано, что GPS-измерения можно уравнивать раздельно по приращениям ΔX или ΔY или ΔZ без нарушения строгости решения. В результате в три раза уменьшается количество неизвестных при уравнивании GPS-сети коррелатным способом. Утверждается, что для уравнивания GPS-измерений можно применять алгоритмы и программы по обработке нивелирных сетей, задавая в исходной информации вместо превышений соответствующие приращения координат, измеренные спутниковыми методами. При этом несмотря на то, что измерения независимые, они могут быть неравноточными с весом $P = 1/\Delta_{км}$.

Пусть на объекте выполнено «N» измерений $y_1, y_2, ..., y_N$. Причем известно, что для построения данной геодезической сети без единого контроля требуется t измерений (называются необходимыми измерениями). При этом $N \geq t$. Разность $r = N - t$ определяет число избыточных измерений. Это число так-же равно числу независимых условных уравнений, связывающих измеренные величины некоторыми функциональными зависимостями:

$$\varphi_j(y_1,...y_N) = W; \; j = \overline{1,r}. \tag{1.1}$$

Это условное уравнение связи, где $y_1, y_2, \ldots, y_N$ – измеренные величины.

Пусть найден вектор поправок $V = (v_1, v_2, ..., v_N)^T$, который ликвидирует невязки условных уравнений $\varphi_j(y_1 + v_1, y_2 + v_2, ... y_N + v_N) = 0$, но данная задача неоднозначна, так как неизвестных поправок N, а уравнений r. При этом $N > r$. Поэтому отыскивают V под условием, например, если $V^T PV = \min$, то имеем условие МНК (метод наименьших квадратов).

Функция $\varphi(y)$, как правило, не линейна, и ее приводят к линейному виду, используя частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$, значения которых будут коэффициентами условных уравнений при поправках в измеренные величины.

Учитывая, что v_i малые величины, обозначив их через dy_i и используя ряд Тейлора, можно записать:

$$\varphi(y_1 + dy_1, ..., y_N + dy_N) = \varphi(y_1, ..., y_N) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)dy_i = 0$$

или

$$\varphi(y_1 + v_1, ..., y_N + v_N) = \varphi(y_1, ..., y_N) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)v_i = 0$$

или

$$dW + W = 0, \tag{1.2}$$

где dW – дифференциал невязки W,

$$dW = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)dy = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\right)v_i.$$

Таким образом, вместо нелинейного условного уравнения (1.1) имеем для одного условного уравнения в линейном виде:

$$b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + ... + b_{1N}v_N + W_1 = 0, \tag{1.3}$$

в котором $bj,i = \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}$, а для r условных уравнений имеем

$$B_{r\times N}V_{N\times 1} + W_{r\times 1} = 0, \tag{1.4}$$

где $B_{r\times N} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rN} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов условных уравнений; $V_{N\times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_N \end{pmatrix}$ – вектор поправок в измеряемые величины.

Это наши неизвестные, которые мы должны получить из r условных уравнений. Так как $r < N$, то система (1.2) или (1.4) не доопределена (уравнений меньше, чем неизвестных). Следовательно, решений множество. Из множества решений выбираем одно, которое обеспечивает $V^T PV = \min$.

$P_{N\times N} = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ldots & \\ & & P_N \end{pmatrix}$ – диагональная матрица весов независимых измеренных величин;

$W_{r\times 1} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \ldots \\ W_r \end{pmatrix}$ – вектор свободных членов условных уравнений.

Осуществляя обработку по МНК, перейдем к системе нормальных уравнений коррелат:

$$B_{r\times N}\cdot P^{-1}_{N\times N}\cdot B^{T}_{N\times r}\cdot K_{r\times 1}+W_{r\times 1}=0\,, \quad (1.5)$$

в котором количество коррелат (или неопределенных множителей Лагранжа) будет равно r, т.е. столько же, сколько нормальных уравнений. Коррелаты вычисляют по формуле:

$$K_{r\times 1}=-N^{-1}_{r\times r}W_{r\times 1}\,, \quad (1.6)$$

где $N_{r\times r}=B_{r\times N}\cdot P^{-1}_{N\times N}\cdot B^{T}_{N\times r}$.

Зная K, можно получить поправки в результаты измерений по формуле:

$$V_{N\times 1}=P^{-1}_{N\times N}\cdot B^{T}_{N\times r}\cdot K_{r\times 1}\,. \quad (1.7)$$

После нахождения уравненных значений результатов измерений находят уравненные координаты и выполняют оценку точности измеренных и уравненных величин по формулам:

$$m_F=\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}};\ \mu=\sqrt{\frac{V^TPV}{r}};\ \frac{1}{P_F}=N_{ff}-N_f^TN^{-1}_{r\times r}N_f\,, \quad (1.8)$$

где $N_{ff}=f_{1\times N}P^{-1}_{N\times N}f^{T}_{N\times 1}$, $N_f=B_{r\times N}P^{-1}_{N\times N}f^{T}_{N\times 1}$, в которых используются коэффициенты весовой функции

- нелинейный вид – $$F=\varphi(y_1,\dots,y_N)\,, \quad (1.9)$$

- линейный вид – $$F=f_0+f_1v_1+\dots+f_Nv_N\,, \quad (1.10)$$

где $f_{1\times N}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \dots\\ f_N\end{pmatrix},\ f_i=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}$.

Отсюда видно, что для оценки точности сторон, дирекционных углов и координат коэффициенты F будут соответствовать уравнению $\varphi(y)$ для условия сторон, условия дирекционных углов и условия координат.

Обратный вес функций можно получить и по формулам:

$$\frac{1}{P_F}=N_{ff}-V_f^TP^{-1}V_f\,, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{P_F}=N_{ff}+fV_f\,, \quad (1.12)$$

где в (1.11) и (1.12) используется вектор

$$V_f=-P^{-1}_{N\times N}B^{T}_{N\times r}N^{-1}_{r\times r}N_f\,. \quad (1.13)$$

2. Практические аспекты коррелатного уравнивания GPS-измерений

На рисунке 2.1 показан ряд GPS-построения.

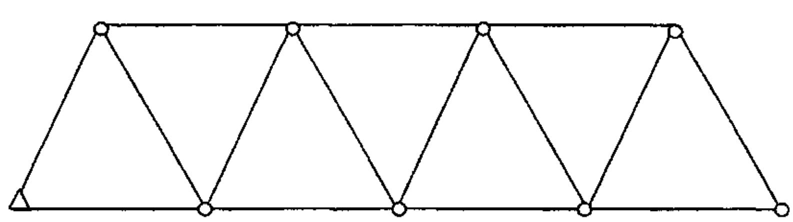

Рис. 2.1. Ряд спутниковых GPS-измерений

Для одной переменной величина N = 15; t = 8; следовательно, r = 7. Отсюда следует *вывод*: какой бы длинной цепочка не была, число условных уравнений в ней равно числу треугольников (7 условий фигур). В триангуляции подобную цепочку легко уравнять, разбрасывая невязку в каждом треугольнике поровну в каждый угол. Это возможно потому, что условные уравнения фигур не имеют общих поправок. В GPS-построениях такая методика не применима, так как есть общие поправки υ_Δ для связующих сторон. Только для построения, показанного на рисунке 2.2, возможно уравнивание простым разбрасыванием поправок υ_Δ в каждую сторону.

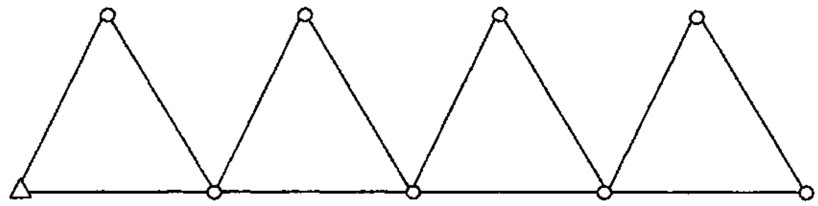

Рис. 2.2. GPS-измерения без общих поправок υ_Δ

Таким образом, чтобы уравнять построения на рисунке 2.1, можно применить двухгрупповой способ, включая в первую группу четыре условия фигур, показанные на рисунке 2.2, и три условия фигур поместить во вторую группу.

К сожалению, двухгрупповой способ Урмаева, предназначенный для уравнивания триангуляции, здесь не приемлем, так как мы имеем не поправки в углы, а поправки в приращения υ_Δ.

Приведем формулы двухгруппового уравнивания свободной GPS-сети [4, с. 240].

Систему условных уравнений $BV + W = 0$ делят на две группы:

$$B_1V + W_1 = 0\,; \tag{2.1}$$

$$B_2V + W_2 = 0, \tag{2.2}$$

с числом r_1 и r_2 уравнений в каждой ($r_1 + r_2 = r$). Затем систему второй группы преобразуют таким образом, чтобы преобразованная система и системы (2.1) и (2.2) привели к одному и тому же вектору V, а систему нормальных уравнений можно было бы разделить на две, не связанные общими поправками.

В случае неравноточных измерений получим:

$$N = \overline{N}_{22} = \overline{B}_2 P^{-1} \overline{B}_2^T, \text{ где } \overline{B}_2 = B_2 P^{-1}\,;\; P = B_2 U\,;$$

$$U = E - P^{-1} B_1^T N_{11}^{-1} B_1\,;\; N_{11} = B_1 P^{-1} B_1^T\,.$$

Для сложных GPS-сетей независимые условные уравнения, принадлежащие к первой группе, показаны на рисунке 2.3.

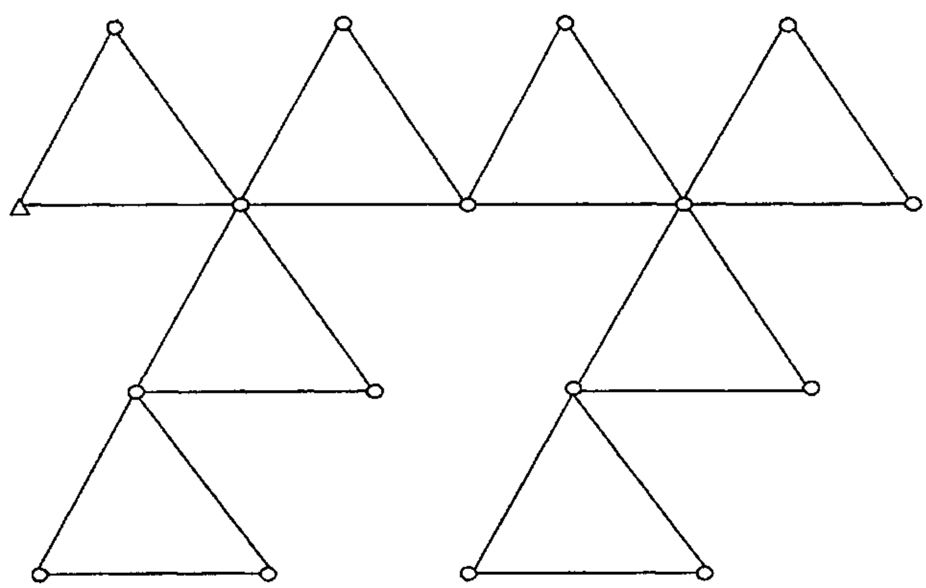

Рис. 2.3. Условные уравнения фигур для первой группы сплошной GPS-сети

Согласно рисунку 2.3 можно сделать вывод, что сплошные сети GPS следует уравнивать не двухгрупповым коррелатным способом (что сложно), а параметрическим способом.

Когда GPS-сеть несвободна (имеется более одного исходного пункта), то лучше применять коррелатный способ, формулы (1.5) – (1.13), так как это значительно упрощает алгоритм уравнивания. Еще более простым является алгоритм коррелатного уравнивания нуль-свободных (без исходных пунктов) геодезических сетей коррелатным способом, так как в процессе вычислений нст разницы, имеется или отсутствует один свободный пункт, так как возникают только условия фигур.

3. Обработка зависимых GPS-измерений коррелатным способом

Осуществляя обработку на МНК, перейдем к системе нормальных уравнений коррелат:

$$B_{r\times N}Q_{N\times N}B^{T}_{N\times r}K_{r\times 1}+W_{r\times 1}=0, \qquad (3.1)$$

в которой количество коррелат (или неопределенных множителей Лагранжа) будет равно r, т.е. столько же, сколько нормальных уравнений.

Коррелаты вычисляют по формуле:

$$K_{r\times 1}=-N^{1}_{r\times r}W_{r\times 1}, \qquad (3.2)$$

где $N_{r\times r}=B_{r\times N}Q_{N\times N}B^{1}_{N\times r}$.

Зная K, можно получить поправки в результаты измерений по формуле:

$$V_{N\times 1}=Q_{N\times N}B^{T}_{N\times r}K_{r\times 1}. \qquad (3.3)$$

В силу того, что условные уравнения для GPS-построений линейны, достаточно составить условные уравнения фигур, не имея условных уравнений координат, так как несвободные GPS-сети применять нецелесообразно.

В заключение отметим:

1) многогрупповой способ уравнивания спутниковых GPS-сетей применять нецелесообразно из-за сложности алгоритма разделения условных уравнений на группы;

2) формулы (3.1) – (3.3) рекомендуется применять в тех случаях, когда известна матрица коэффициентов условных уравнений B;

3) на практике рекомендуем применять автоматизированный алгоритм получения матрицы B, опубликованный в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Усов, Д.В. Методы уравнивания нивелирных сетей без исходных пунктов / Д.В. Усов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 105 – 113.
2. Мицкевич, В.И. Раздельное уравнивание GPS-измерений / В.И. Мицкевич, А.П. Присяжнюк, В.Г. Стержанов // Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2000. – 5 с. – Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 25.09.2000, № 720.-ГД.00.
3. Мицкевич, В.И. Коррелатно-параметрическое уравнивание геодезических сетей с применением корреляционной матрицы поправок измерений / В.И. Мицкевич, В.Е. Плюта // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. В, Прикладные науки. – 2006. – № 9. – С. 89 – 91.
4. Большаков, В.Д. Уравнивание геодезических построений: справ. пособие / В.Д. Большаков, Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.

Поступила 14.04.2008