УДК 528.063

ПОДСЧЕТ ЧИСЛА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ РЕКУРРЕНТНЫМ СПОСОБОМ

А.А. СКРИПЛЁНОК
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрен метод рекуррентного уравнивания, который стал с 1982 года повсеместно применяться при проектировании и уравнивании геодезических сетей. В основу положен параметрический способ уравнивания, позволяющий вычислить количество арифметических операций для любого геодезического построения. Получены формулы предрасчёта времени уравнивания рекуррентным способом на Pentium III. Так, чтобы уравнять геодезические сети 1 и 2 классов Республики Беларусь без разбиения сети на участки, потребуется 0,033 месяца, или 24 часа, счёта на персональном компьютере.

Согласно методике, разработанной нами, оптимальное количество участков для данного примера 12, что потребует 0, 000135 месяца (6 минут) непрерывной работы компьютера. Для уравнивания геодезической сети бывшего СССР (165 000 пунктов) количество участков – 18, а машинное время – не более 8 часов для каждого участка.

Введение. Известно, что уравнительные вычисления на ПК в зависимости от количества определяемых пунктов может занимать от 24 часов для Беларуси и 23 месяца для России машинного времени на *Pentium III*. Для таких обширных сетей, как в России, нельзя обойтись без разбиения сети на участки с последующим применением методики уравнивания по группам с обработкой по рекуррентному способу.

В статье предложены формулы и таблицы, с помощью которых легко подсчитать количество операций и времени на уравнительные вычисления для любого сплошного геодезического построения.

1. Основное содержание работы. Как неоднократно отмечалось [1 – 3], рекуррентное уравнивание геодезических сетей, основанное на последовательном учете некоррелированных измерений с уравниванием поправок

$$\upsilon_i = a_i \Delta x_i + l_i, \tag{1}$$

позволяет уравнивать обширные геодезические сети с применением формул:

$$Z_i^{\mathrm{T}} = Q_{i-1} a_i^{\mathrm{T}}; \tag{2}$$

$$q_i = \frac{1}{P_i} + a_i Z_i^{\mathrm{T}}; \tag{3}$$

$$Q_i = Q_{i-1} - \left(\frac{1}{q_i}\right) Z_i^{\mathrm{T}} Z_i, \tag{4}$$

где $P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ – вес i-го измерения.

Для уравнивания обширных сетей применяется метод подвижного треугольника. Но, по нашему мнению, подсчет числа арифметических операций в этом способе лучше всего может выполнить автор этого метода Ю.И. Маркузе [3]. Мы же будем придерживаться следующей методики.

Поясним на примере рисунка 1, как можно осуществить параллельное блочное уравнивание нивелирной сети рекуррентным способом.

Последовательность обработки сети (см. рис. 1) рекуррентным способом будет такой:

1) нивелирная сеть разбивается на три участка I, II, III. Для каждого получим обратные матрицы Q_I, Q_{II}, Q_{III} независимо друг от друга. При этом в I участке будут превышения $h_1 - h_8$, во втором участке $h_{10} - h_{13}$, а в третьем $h_{16} - h_{19}$. Видно, что измерения на стыке участков в обработку не берутся. Это превышения h_9, h_{14}, h_{15} и h_{20};

2) назначим матрицы Q_0 размерностью $Q_{I_{7\times7}}$, $Q_{II_{5\times5}}$, $Q_{III_{5\times5}}$. В трех участках задействованы все определяемые пункты нивелирной сети, при этом число параметров соответственно 7,5 и 5;

3) по формулам (2) – (4) формируются три обратные матрицы Q_I, Q_{II}, Q_{III};

4) для получения общей матрицы Q, охватывающей все участки (17 параметров), разместим Q_I, Q_{II}, Q_{III} по диагонали:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_I & 0 & 0 \\ 0 & Q_{II} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{III} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

5) по формулам (2) – (4) подключаем, используя (5), стыкующие для участков превышения: h_9, h_{14}, h_{15} и h_{20}.

Для экономии машинного времени при обработке больших участков нивелирных сетей можно стыковать участки последовательно. Например, стыкуем в начале Q_I и Q_{II}, подключая измерения h_9 и h_{14}, а затем к уже полученной матрице $Q_{I,II}$ присоединяем матрицу Q_{III}. В этом случае объем вычислений уменьшится, так как превышения h_9 и h_{14} подключаются при 12 параметрах, а не при 17, как это имело место в формуле (5).

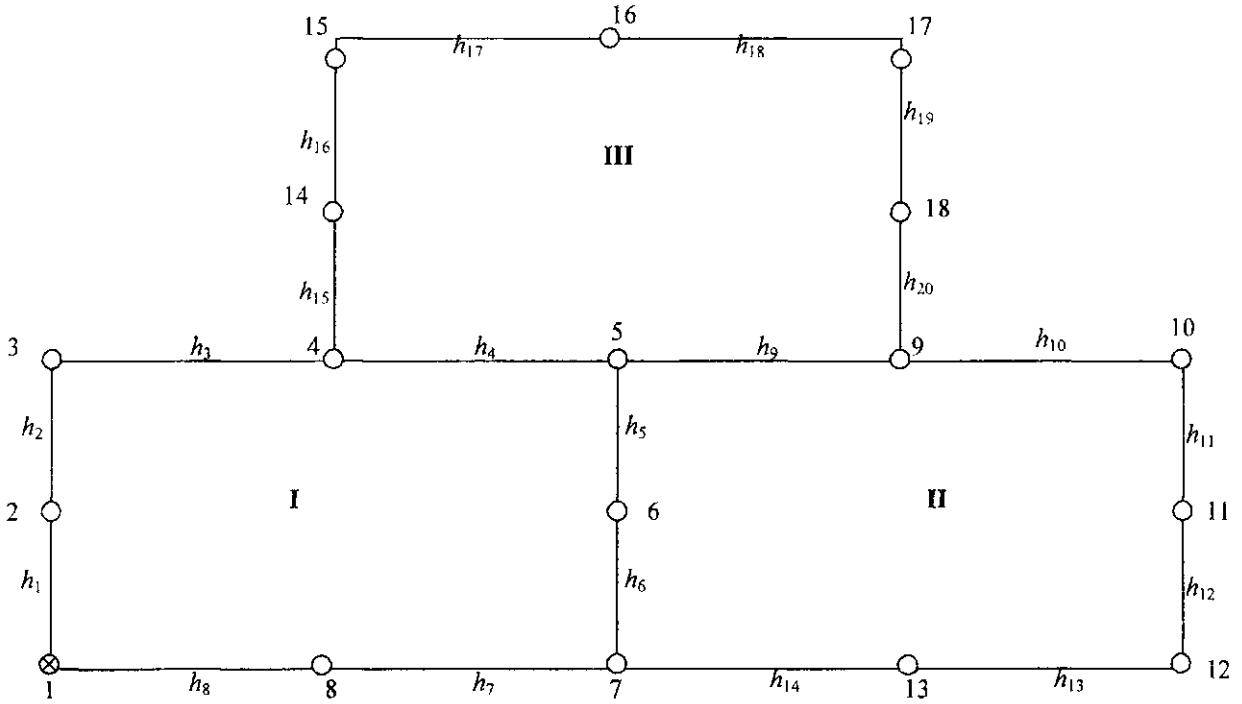

Рис. 1. Схема нивелирной сети

При уравнивании обширных геодезических сетей на современных компьютерах обычно придерживаются правила: «Экономия машинного времени за счет неэкономного расходования памяти ЭВМ». Следуя этому, будем держать в памяти ЭВМ полную, а не верхнюю треугольную обратную матрицу Q.

Подсчет числа арифметических операций легко осуществить для одного измерения, а затем, если их N, полученное число операций умножаем на N.

Начиная с формулы (2), подсчет арифметических операций d_i, в нашем случае d_2 будет таким.

Обозначим через a – наибольшее количество не нулевых коэффициентов в строке матрицы коэффициентов параметрических уравнений $A_{N\times t}$. В этом случае имеем:

$a = 2$ – для нивелирных сетей и сетей GPS;

$a = 4$ – для плановых сетей триангуляции (при уравнивании их по направлениям);

$a = 6$ – для плановых сетей триангуляции (при уравнивании их по углам).

Если t – количество параметров, то

$$d_2 = t(2a-1). \tag{6}$$

Здесь необходимо учесть, что из столбцов матрицы Q_{i-1} выбираются только те коэффициенты, которые соответствуют не нулевым значениям в векторе a_i.

Нетрудно посчитать, что с применением формулы (3)

$$d_3 = 2a+1, \tag{7}$$

где d_3 – количество арифметических операций при вычислении q_i для одного измерения, не беря во внимание нулевые коэффициенты вектора **Z**.

Аналогично для формулы (4) получим, что

$$d_4 = \frac{t(t+1)}{2}\cdot 3, \tag{8}$$

где 3 – количество арифметических операций в формуле (4) (одно умножение, одно деление и одно вычитание). При этом матрица Q симметрична, следовательно, количество вычисляемых элементов будет не t^2, а $\frac{t(t+1)}{2}$.

Общее число операций для одного измерения будет таким:

$$d = d_2 + d_3 + d_4 = t(3t + 4a + 5) + 2(2a + 1). \quad (9)$$

Обозначим через K – количество определяемых пунктов в плановых геодезических сетях, число измерений с запасом будет следующим:

$$N = (6+1)K = 3{,}5t, \quad (10)$$

где $t = 2K$.

Общее число арифметических операций для геодезических сетей

$$T = d \cdot N. \quad (11)$$

Перейдем к важному вопросу уравнивания обширных сетей – разделению ее на участки.

Для нивелирной сети, показанной на рисунке 1, такой проблемы не возникает, а вот для сплошных плановых сетей не ясно, на сколько участков необходимо разбить эту геодезическую сеть, чтобы получить минимальное значение T.

На рисунке 2 показана сеть, разбитая на $K_y = 12$ участков. Здесь через S_i обозначены стыки участков.

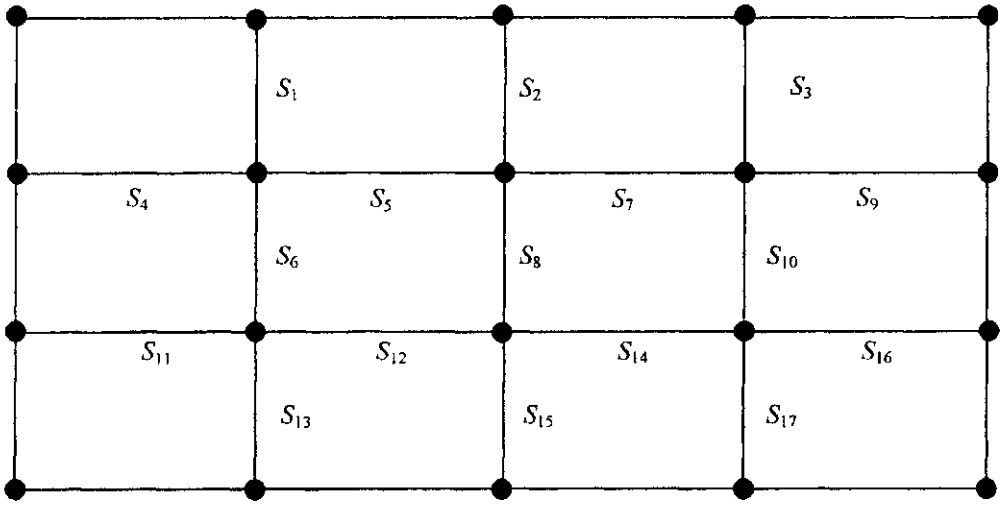

Рис. 2. Сплошная геодезическая сеть, разбитая на участки

Ясно, что стыки надо обрабатывать при последовательном подключении участков, а не сразу для всей геодезической сети. Количество стыков можно посчитать по формуле:

$$K_{cm} = 2(K_y - 1). \quad (12)$$

В нашем случае $K_{cm} = 22$, хотя на рисунке 2 их 17. Следовательно, по формуле (12) мы получим K_{cm} с запасом.

Количество измерений на одном стыке двух участков можно получить по формуле:

$$N_{cm} = \sqrt{\frac{K}{K_y}} \cdot 6. \quad (13)$$

Полагая, что число определяемых пунктов $K = 1200$, получим при $K_y = 12$ $N_{cm} = 60$, а для всей сети найдем

$$T_{cm} = T_1 \cdot N_{cm_1} + T_2 \cdot N_{cm_2} + \ldots + T_{K_{cm}} \cdot N_{K_{cm}}, \quad (14)$$

в которой K_{cm} – число арифметических операций для обработки всех стыков, а $T_j = d_j N_j$, где j – номер присоединенного участка, включая предыдущий при нарастающем значении T_j.

Поясняя, отметим, что $T_{K_{cm}} = d \cdot N$ для всей сети.

Общее количество арифметических операций на объект равно

$$T_{общ.} = T_0 + T_{ст}, \tag{15}$$

где T_0 определяется по формуле (11) и полагается, что для нашего примера T_0 будет получено независимо для всех 12-ти участков, применяя двенадцать ЭВМ.

Конечно, $T_{ст.}$ зависит от числа участков.

Для $T_{общ.}$ на рисунке 3 показан график изменения количества операций в зависимости от изменения числа участков. По программе SKRI1.exe отыскивался минимум функции (15).

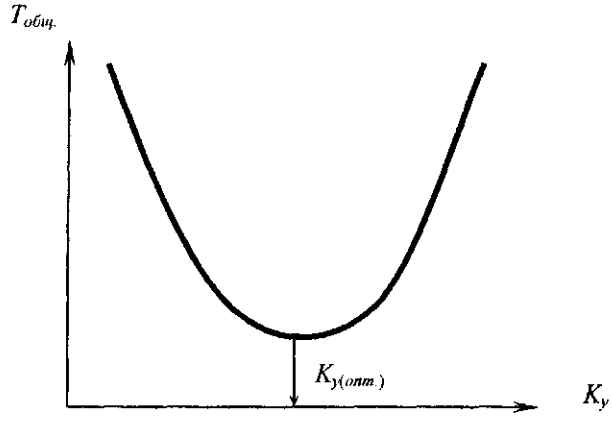

Рис. 3. Изменения количества операций в зависимости от изменения числа участков

В таблице приведены расчеты для T, $K_{y(опт)}$ и время счета τ при заданном K, полагая, что на Pentium III x = 667 000 000 операций в секунду.

Вычисление числа арифметических операций и времени по обработке на ПК

K	T без участков	τ в месяцах	$K_{y(опт)}$	T_0	τ в месяцах	$T_{общ.}$	$\tau_{общ.}$ в месяцах
165 000	$0{,}323 \cdot E^{18}$	190,0	18	$0{,}555 \cdot E^{14}$	0,033	$0{,}383 \cdot E^{15}$	0,225
9167	$0{,}555 \cdot E^{14}$	0,033	12	$0{,}322 \cdot E^{11}$	$0{,}19 \cdot E^{-4}$	$0{,}229 \cdot E^{12}$	$0{,}135 \cdot E^{-3}$
764	$0{,}323 \cdot E^{11}$	$0{,}19 \cdot 10^{-4}$	9	$0{,}452 \cdot E^{8}$	$0{,}266 \cdot E^{-7}$	$0{,}391 \cdot E^{9}$	$0{,}230 \cdot E^{-6}$
85	$0{,}460 \cdot E^{8}$	$0{,}271 \cdot 10^{-7}$	6	$0{,}248 \cdot E^{6}$	$0{,}146 \cdot E^{-9}$	$0{,}147 \cdot E^{7}$	$0{,}846 \cdot E^{-9}$
1000	$0{,}722 \cdot E^{11}$	$0{,}425 \cdot 10^{-4}$	9	$0{,}102 \cdot E^{9}$	$0{,}598 \cdot E^{-7}$	$0{,}782 \cdot E^{9}$	$0{,}460 \cdot E^{-6}$
2500	$0{,}113 \cdot E^{13}$	$0{,}633 \cdot 10^{-3}$	10	$0{,}114 \cdot E^{10}$	$0{,}671 \cdot E^{-6}$	$0{,}820 \cdot E^{10}$	$0{,}482 \cdot E^{-5}$
5000	$0{,}901 \cdot E^{13}$	$0{,}530 \cdot 10^{-2}$	11	$0{,}681 \cdot E^{10}$	$0{,}401 \cdot E^{-7}$	$0{,}485 \cdot E^{11}$	$0{,}285 \cdot E^{-4}$
50000	$0{,}900 \cdot E^{16}$	5,294	16	$0{,}220 \cdot E^{13}$	$0{,}129 \cdot E^{-2}$	$0{,}179 \cdot E^{14}$	$0{,}105 \cdot E^{-1}$
100000	$0{,}720 \cdot E^{17}$	42,35	17	$0{,}147 \cdot E^{14}$	$0{,}862 \cdot E^{-2}$	$0{,}106 \cdot E^{15}$	$0{,}622 \cdot E^{-1}$
1000000	$0{,}720 \cdot E^{20}$	42350	24	$0{,}521 \cdot E^{16}$	3,06	$0{,}391 \cdot E^{17}$	23,0

Заключение. Получены формулы предрасчёта времени уравнивания рекуррентным способом на Pentium III. Чтобы уравнять геодезические сети 1 и 2 классов Республики Беларусь без разбиения сети на участки, потребуется 0,033 месяца, или 24 часа, счёта на персональном компьютере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе, Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1982. –191 с.
2. Маркузе, Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1989. – 248 с.
3. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений: учеб. пособие для вузов / Ю.И. Маркузе. – М.: Недра, 1990. – 240 с.

Поступила 14.04.2008